LAS ACTIVIDADES MATEMÁTICAS, EL SABER Y LOS LIBROS DE TEXTO:
Necesidad de una visión socio-cultural y crítica

Wladimir Serrano Gómez
Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM)
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Miranda

A Hermelinda del Carmen y a María Rosa
A David Mora
A Andrés Moya
A Rosa Becerra
A Walter O. Beyer K.
A Rovimar Serrano
A Sonia Jacobo

CONVENIO ANDRÉS BELLO
GIDEM Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática
Fondo Editorial Ipasme
Instituto Internacional de Integración

Idea original: Instituto Internacional de Integración del Convenio Andrés Bello (III-CAB)

Director del Libro: Dr. David Mora

Coordinador General: Dr. David Mora

Autor: Wladimir Serrano Gómez

Edición General: III-CAB, Solveiga Ploskonka

Imagen de la portada: Dr. David Mora, Javier Quispe

LAS ACTIVIDADES MATEMÁTICAS, EL SABER Y LOS LIBROS DE TEXTO:
Necesidad de una visión socio-cultural y crítica

DL: 4-1-1511-09

ISBN: 978-99954-725-9-7

Producción: III-CAB
Macario Pinilla Nº. 453 La Paz - Bolivia
Casilla 7796/Fax 2432088/Tel (591) (2) 2435018 - (591) (2) 2434939
Para mayor información: www.iiicab.org.bo

Impreso en: La Paz - Bolivia

Fondo Editorial Ipasme
Locales Ipasme, final Calle Chile con Av. Victoria
(Presidente Medina), Urbanización Las Acacias,
Municipio Bolivariano Libertador, Caracas,
Distrito Capital, Venezuela.
Apartado Postal: 1040.
Teléfonos: +58(212) 633 53 30
Fax: +58(212) 632 97 65
E-mail: fondoeditorial.ipasme@yahoo.com
Página Web: http://fondoeditorialipasme.wordpress.com

Gobierno Bolivariano de Venezuela | Ministerio del Poder Popular para Relaciones Exteriores

Venezuela AHORA ES DE TODOS

Fondo Editorial Ipasme

"2009: Hacia la consolidación del Estado Socialista"
IPASME A LA VANGUARDIA DE LA SEGURIDAD SOCIAL

Grupo de Investigación
y Difusión en Educación Matemática (Gidem)

GIDEM
Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática

Alí Ramón Rojas Olaya (IPC-UPEL)
Andrés Eloy Moya (IPMJMSM-UPEL)
Carlos Torres (IPC-UPEL)
Castor David Mora (IIIEI-CAB)
Hernán Paredes (IPMJMSM-UPEL)
Norberto Reaño (IPMJMSM-UPEL)
Orlando Mendoza (IPM-UPEL)
Rosa Becerra (IPC-UPEL)
Walter Beyer (UNA)
Wladimir Serrano (IPMJMSM-UPEL)
Yolanda Serres (UCV)

IPC: Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, IPMJMSM: Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez", IIIEI-CAB: Instituto Internacional de Investigación Educativa para la Integración del Convenio Andrés Bello. IPM: Instituto Pedagógico de Maracay, UNA: Universidad Nacional Abierta, UCV: Universidad Central de Venezuela.

En este trabajo nos ocupamos de las actividades o prácticas matemáticas como contar, localizar, medir, jugar, diseñar y explicar (Bishop, 1999) en una selección de libros de texto de matemáticas del 7º grado de la Educación Básica venezolano. Consiste en un estudio teórico reflexivo con apoyo en un estudio descriptivo en el que empleamos técnicas de análisis de contenido en libros de texto. Discutimos el papel que desempeñan los libros de texto en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, y sobre el saber en el seno de la educación matemática en el marco de la sociedad moderna y algunas de las funciones del conocimiento que se pueden asociar a ella, como la mercantilista, la hegemónica-tecnocrática y la humanista. Estas ideas nos permiten acercarnos, desde una óptica que denominamos crítica o estructural, a una selección de siete (7) libros de texto del 7º grado de la Educación Básica con la intención de responder las siguientes cuestiones: ¿Qué tipo de actividades matemáticas o protomatemáticas (Bishop, 1999) exponen y proponen los libros de texto de matemáticas?, ¿cuál es su relación con actividades como contar, localizar, medir, jugar, diseñar y explicar?, ¿qué tipo de saber se corresponde con las actividades expuestas y propuestas en los libros de texto de matemáticas? y, ¿de qué forma pueden favorecer los libros de texto al desarrollo del pensamiento matemático?

LAS ACTIVIDADES MATEMÁTICAS, EL SABER Y LOS LIBROS DE TEXTO:
Necesidad de una visión socio-cultural y crítica – Wladimir Serrano Gómez – 2009

Es justo reconocer el aporte que para mi pensamiento y dedicación ha tenido el Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM), agradezco entonces al Dr. C. D. Mora, coordinador del grupo (Instituto Internacional de Integración – Convenio Andrés Bello), y a los profesores Dra. Yolanda Serres, Walter Beyer, Dr. Fredy González, Carlos Torres, Jorge Trujillo, Dra. Rosa Becerra, Dr. Andrés Moya y Alí Rojas Olaya.

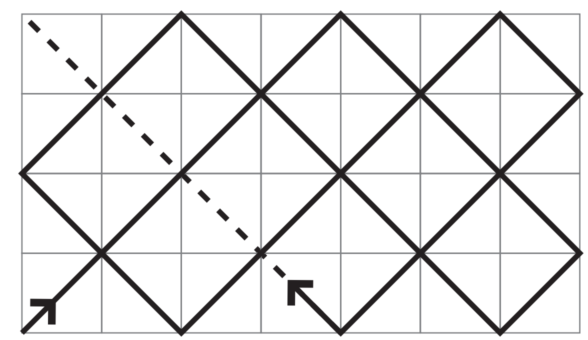
"Mis" estudiantes de la UEN Liceo "Agustín Aveledo" también me han permitido estructurar una visión particular de la matemática escolar y de la Educación Matemática.

Esta práctica ha enriquecido, e incluso orientado, al desarrollo teórico. No puedo dejar de mencionar la influencia que he recibido de las lecturas de L. Wittgenstein, de su Tractatus logico-philosophicus, de sus Cuadernos azul y marrón, de Investigaciones filosóficas, entre otros de sus trabajos.

Para esta investigación han sido una fuente invalorable las ideas de A. Bishop y de O. Skovsmose.

Agradezco, además, a los encargados de la Biblioteca de la UEN Liceo "Agustín Aveledo" de La Pastora y a todos los miembros del Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas del Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez.

ÍNDICE



INTRODUCCIÓN

Los libros de texto siempre han desempeñado un papel destacado en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, signando tanto los problemas que se abordan en el contexto del aula como buena parte del currículo que se concreta en la práctica; su estudio puede revelar algunos aspectos sobre las bases pedagógicas, didácticas y filosóficas que lo soportan, la posición del autor acerca del saber matemático, la educación y la actividad matemática que realizan o deben realizar los estudiantes. También reflejan la posición del autor en relación con el papel de los algoritmos y el paradigma del ejercicio.

En Venezuela existen muy pocos trabajos en los que las unidades de análisis son libros de texto de matemáticas; de éstos, la mayoría son de naturaleza histórica, epistemológica y didáctica. De hecho, el estudio de los libros de texto de matemáticas no constituye una línea de investigación en los programas de postgrado en nuestras Universidades. Solamente podemos referir a una línea de investigación adscrita desde 2002 a la unidad de investigación de la Escuela de Educación de la Universidad Central de Venezuela, denominada *el texto escolar como objeto de investigación* (ver Ramírez, 2003). En el ámbito internacional podemos referir trabajos importantes en este sentido (fundamentalmente de naturaleza también histórica, epistemológica y didáctica).

Podemos entonces plantearnos muchas preguntas: ¿cuál ha sido el propósito de los estudios sobre libros de texto en nuestro país y de algunos de los más relevantes estudios en el ámbito internacional? ¿qué funciones del conocimiento pueden asociarse a la educación matemática, en particular en los textos?, ¿qué actividades o prácticas matemáticas encuentran espacios en los libros de matemáticas? y ¿cómo pueden favorecer los libros de texto de matemáticas el desarrollo del pensamiento matemático de los niños, niñas y jóvenes?

Para responder estas preguntas seguiremos el enfoque sociocultural de las matemáticas que expone Bishop (1999) y algunas ideas en el marco de la Educación Matemática Crítica, tal es el caso de las nociones *crítica* y *saber*.

Consideramos que estas perspectivas teóricas, aún cuando tienen algunos puntos en los que se diferencian, como por ejemplo:

(a) La valoración de cierta racionalidad que se hace desde la Educación Matemática Crítica (EMC); en cambio, la Etnomatemática atiende al conocimiento propio de los grupos culturales.

(b) Para la Etnomatemática el conocimiento matemático es una de las formas de desenvolverse en el medio social y ambiental; y para la EMC constituye una competencia para ejercer la ciudadanía en un marco democrático, para juzgar los hechos y decisiones que afectan al colectivo y para evitar la consolidación de las estructuras tecnócratas.

Por otra parte, algunos de los puntos donde pueden complementarse son los siguientes:

(1) Para ambas perspectivas es importante la forma como se ha generado el conocimiento matemático en un grupo, así como la interacción y acciones de sus miembros en este proceso.

(2) Se concibe las matemáticas en estrecha relación con el mundo y la realidad.

(3) Las matemáticas son consideradas una herramienta fundamental para la comprensión del mundo y de la realidad, así como del binomio hombre-mundo (la Etnomatemática lo hace desde un enfoque sociocultural, y la Educación Matemática Crítica desde un enfoque sociopolítico).

En esta investigación consideramos el valor que otorga Bishop (1999) a las actividades matemáticas o protomatemáticas[1], y una discusión sobre algunos de los tipos de saber o conocimiento matemático que se pueden asociar a la educación matemática.

Nuestro interés central será estudiar el tipo de actividades matemáticas que se exponen y proponen en una selección de libros de texto de matemáticas del 7º grado de la Educación Básica venezolana, así como las relaciones que existen entre las actividades expuestas/propuestas en los libros de texto de matemáticas y el tipo de saber que éstos promueven. Somos de la idea de que los libros de texto tienen un potencial enorme para acercarnos a la comprensión de algunos elementos del currículo en educación matemática en todos los niveles de la educación. Tanto las vinculadas al currículo *previsto* como al *oculto*. Sin embargo, podemos preguntarnos ¿por qué estudiar algunos de los libros de texto de matemáticas con la óptica de Bishop (1999)?, si es bien conocido el enfoque teórico que les sirve de base y el contexto histórico que les sirvió de marco: Nuestra investigación puede servir de impulso para la publicación en nuestro país de libros de texto de la matemática escolar que se correspondan con una visión sociocultural y crítica de la educación matemática; este impulso pasa por estudiar, desde tal visión, a los textos de matemáticas de la Educación Básica que utilizan actualmente nuestros estudiantes –aún cuando algunos de ellos tengan ya cerca de 20 años en el mercado.

1 Bishop (1999).

En este sentido, hemos organizado este trabajo en cinco capítulos. El primero describe una introducción al estudio que reportamos: la revisión de algunas investigaciones sobre textos en Venezuela y en otros países, sus aportes y conclusiones relevantes, la categorización de los estudios de esta naturaleza, así como las interrogantes y objetivos que nos planteamos. En el segundo capítulo discutimos sobre las matemáticas desde algunas de las corrientes en Educación Matemática y sobre el saber o conocer en el marco de la sociedad moderna. En el tercer capítulo referimos las seis prácticas o actividades matemáticas (o protomatemáticas) que analiza Bishop (1999), siguiendo un enfoque sociocultural, así como las categorías que plantea Mora (2005). Seguidamente (capítulo cuarto) presentamos un estudio descriptivo de una selección de libros de texto de matemáticas del 7º grado de la Educación Básica, y además, indagamos sobre las funciones del conocimiento que se asocian a los textos –lo cual refleja nuestra posición sobre la educación matemática y su papel en la sociedad moderna: en la formación del hombre y en la transformación de la sociedad. Finalmente, en el quinto capítulo discutimos sobre la naturaleza del pensamiento matemático y algunas de las actividades propuestas en los libros de texto de matemáticas que pueden favorecer su desarrollo, y en particular, la transición del *pensamiento matemático elemental* al *avanzado*.

I

LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS: UNA INTRODUCCIÓN A SU ESTUDIO

Propósito y Algunos Antecedentes de Investigación

Los libros de texto representan uno de los elementos del currículo que posee mayor incidencia en el proceso de enseñanza/aprendizaje tanto de las matemáticas como de otras disciplinas escolares, e incluso, universitarias, tal como se señala, por ejemplo, en: el Informe Cockroft (1985), Schubring (1987) y Beyer (2006a). Los libros, determinan en buena medida el currículo que se da en la práctica, más que los programas de estudio, los planes y las políticas generales del Estado –precisamente por constituir un elemento que se usa en el contexto del aula. Esta es una de las ideas que motiva la presente investigación.

En los libros de texto de matemáticas se refleja la posición del autor sobre los modelos pedagógicos y didácticos que sigue, así como su filosofía de la educación, y las bases psicológicas y sociológicas que asume –cuando éstas tienen lugar. Es decir, los libros de texto contienen mucha más información que la exposición de ideas matemáticas, los ejemplos, problemas y actividades expuestas y/o propuestas a los estudiantes (o lectores). Son, en su conjunto, una fuente invalorable para estudiar, por ejemplo, (a) la conceptuación, (b) el tipo de actividades que proponen, (c) los esquemas que siguen para exponer sus ideas, (d) su relación con lo que algunos autores llaman el *paradigma del ejercicio* [ver Skovsmose (2000) para una discusión sobre este término], y (e) su correspondencia con la consolidación del *status quo*, los problemas sociales y las *desigualdades existentes*. Algunos de estos puntos se relacionan con el currículo oculto; que, intencionalmente o no, el texto deja entrever a los lectores; son ideas que pueden tener un peso tan importante como las que se explicitan en el libro.

También puede estudiarse su relación con las diversas corrientes de la Educación Matemática (la *Didáctica Fundamental*, el *Enfoque Ontosemiótico*, el *Pensamiento Matemático Avanzado*, el *Acercamiento Socioepistemológico*, el *Enfoque Cultural*, la *Etnomatemática*, y la *Educación Matemática Crítica* –por sólo mencionar algunas de las corrientes más conocidas en el ámbito internacional).

En este trabajo **estudiamos las actividades matemáticas o protomatemáticas y las funciones del saber asociadas a los libros de texto de matemáticas que se usan actualmente en Venezuela, particularmente en una selección de textos del 7º grado.**

Existen muy pocos trabajos de investigación sobre los libros de texto de matemáticas en nuestro país. Podemos referir, sin embargo, a:

(1) Qüenza, Tejada, Jaén, y Castillo (1984): **El libro de texto en Venezuela**. En esta investigación se describen y ubican cronológicamente muchos de los libros de texto de matemáticas autóctonos (escritos por venezolanos), en particular los precursores de los libros escolares –la lista que presenta no es exhaustiva.

(2) Brito (2002): **Los libros de matemáticas en la Venezuela del siglo XIX**. Este es un trabajo de licenciatura (de la Universidad Central de Venezuela) en el que se estudian las características de los libros de texto usados en Venezuela durante el siglo XIX, así como algunos elementos del contexto histórico y sociocultural de la época que permiten comprender su enfoque e intereses.

(3) Brito (2004): **Panorama matemático en la Venezuela colonial**. Esta investigación, que se reporta junto a la de Beyer (2004) en *Tópicos en educación matemática* (Mora *et al.*, 2004), incluye una descripción de los libros de texto de matemáticas traídos al país durante la Colonia, las referencias sobre la escasez de textos en ciencias naturales y matemáticas, una revisión de un texto de Juan Pérez de Moya (texto, publicado en 1558, ampliamente difundido en España y, durante el siglo XVIII, en Venezuela), el inicio de los estudios académicos de matemáticas en Venezuela, y comentarios sobre algunos sucesos que vinculan las matemáticas y la revolución independentista –relacionados con la formación matemática de *El Libertador* Simón Bolívar y de *El Mariscal* Antonio José de Sucre.

(4) Beyer (2004): **Bossio, Chela, Duarte y Zavrotsky: Un lazo de oro para la matemática y la educación matemática en Venezuela**; aquí el autor establece, a través de un estudio histórico, las conexiones entre estos cuatro personajes (fundamentalmente en el período 1940-1960), su vida profesional y su impacto en las matemáticas y en la educación matemática en Venezuela. Se muestra que sus obras, entre las que cabe mencionar sus libros de texto, permiten ubicar los inicios de la Educación Matemática como campo disciplinar en el país, y entender a Bossio, Chela, Duarte y Zavrotsky como referencias importantes para las matemáticas y su enseñanza.

(5) Beyer (2006a): **Algunos libros de aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912**. Trabajo, parte de uno más amplio aún no publicado en el que se sigue y adapta la metodología de Schubring (1987) para describir y comparar los textos de aritmética usados en Venezuela durante el período descrito [justo desde la impresión en el país del primer texto de aritmética –el de Romero y Serrano (1826)], así como para establecer las concepciones acerca de la matemática que eran sostenidas en esa época. En este estudio se evidencia que muchos de los libros de matemáticas escritos en este período estuvieron dedicados a la aritmética (con una fuerte componente de la aritmética comercial) y signaron en gran medida el currículo dado en la práctica –pues los programas oficiales para la Educación Primaria entraron en vigor desde 1912, y heredaron su carácter de *catecismo* de otras obras que le precedieron en España y otros países americanos.

Nuestro trabajo tiene una gran deuda con esta investigación debido a su interés por los elementos históricos (expresados en políticas, planes, programas, libros de texto, etc.) que permitan describir en parte la educación matemática que se da en el contexto del aula.

(6) Serrano (2004): **Elementos de álgebra: unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra (IAA) del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez"**. Uno de los objetivos de este trabajo de grado de Maestría [Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Caracas] consiste en estudiar el discurso y el lenguaje matemático en una selección de libros de texto para el primer curso de álgebra de este instituto. Entre sus conclusiones se destaca:

- Se destaca el hecho de que un libro de texto de matemáticas, que se destine al curso IAA (aunque *hacemos* extensiva la observación a otros libros de texto y cursos de matemática, elementales y avanzados), debe utilizar un lenguaje matemático (nivel matemático de la MLABS)[2] que se desplace por las dimensiones Verbal, Simbólica, Gráfica y Mixta, y en general, un discurso matemático que se desplace por los distintos niveles y dimensiones de la MLABS.
- El discurso debe atender también, a los principios y reglas que rigen el lenguaje matemático: (a) fonológica, (b) simbólica y gráfica, (c) sintáctica, (d) semántica y (e) expresiva y evocativa.
- Por otra parte, el discurso en un libro de texto utilizado por un grupo [o lector] junto con los principios y reglas que se construyan y/o manejen, contribuyen a estructurar los juegos de lenguaje[3] de los que dispone y emplea el grupo [o lector].

Observamos que casi todos estos trabajos son de naturaleza histórica.

2 Matriz Lacombe-Adda-Beyer. Ver Beyer (1994).
3 Ver Serrano (2004, 2006a).

En nuestro país, el estudio de los libros de texto de matemáticas no se ha constituido como una línea de investigación[4]. Incluso, en los diversos eventos profesionales organizados por la *Asociación Venezolana de Educación Matemática* (ASOVEMAT), por el *Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia* (CENAMEC) –entre otras Instituciones (Universidades e Institutos[5]), en la publicación oficial de ASOVEMAT, la revista *Enseñanza de la Matemática*, en el *Boletín EM* de la ASOVEMAT Región Capital, en las revistas *Paradigma*[6] y *Pedagogía*[7], en los libros publicados en el país, y en los Trabajos Especiales de Grado (en los Programas de Postgrado), existen muy pocos trabajos en este sentido [ver Serres (2004)].

En el ámbito internacional podemos referir, por ejemplo, los siguientes:

(a) Schubring (1986): **Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs**. Este artículo precedió a su conocido *On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors* (Schubring, 1987). En él analiza una selección de textos franceses y alemanes, en particular, la evolución histórica de los números negativos y su relación con obstáculos internos a las matemáticas (sobre las dificultades para definir los conceptos de cantidad, magnitud y número) y epistemológicos (sobre la transmisión del conocimiento científico).

> Las ideas de este autor han sido fundamentales para emprender otros estudios de tipo histórico en conexión con la epistemología (en los que las unidades de análisis son libros de texto de matemáticas), en particular las de su artículo de 1987: donde presenta una metodología de investigación al respecto.

(b) Johansson (2006): **Teaching mathematics with textbooks. A classroom and curricular perspective**. En esta tesis Doctoral (Lulea University of Technology) se estudian los libros de texto y su uso en el contexto del aula. Asumen el currículo desde una perspectiva amplia (que abarca lo previsto, lo puesto en práctica y lo alcanzado). Algunos de los resultados de esta investigación, desarrollada en Suecia, son:

4 Han sido de más interés, áreas como la resolución de problemas, estrategias y metodologías en el aula, juegos y recursos, procesos cognitivos, entre otras. Ver Ramírez (2003) para una discusión del texto escolar, en sus distintas áreas y disciplinas, como línea de investigación en educación.

5 En especial en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador –principal casa de estudios del país dedicada a la formación de docentes.

6 Que, aunque no está dedicada exclusivamente a la Educación Matemática, ha abierto espacios desde sus primeros números a este campo disciplinar –revista que cuenta ya con 27 años; y es una de las publicaciones de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, en su Instituto Pedagógico de Maracay.

7 Revista de la Universidad Central de Venezuela.

- El libro de texto influencia las tareas que realizan los estudiantes en el aula y además los ejemplos que presenta el profesor en el pizarrón, los conceptos que expone y cómo los introduce.
- Buena parte de la actividad de los estudiantes se realiza trabajando individualmente con sus libros de texto.
- Los profesores buscan espacios para estudiar algunas ideas matemáticas que el libro no cubre, o bien, para utilizar otros recursos distintos al libro.
- El profesor de matemáticas en Suecia demuestra una relativa autonomía sobre el libro de texto, aun cuando es la herramienta más común en las aulas de ese país.

(c) Maz (2005): relevante investigación doctoral de tipo histórica que combina análisis fenomenológico y de contenido sobre **Los números negativos en los libros de texto en España durante los siglos XVIII y XIX**. Análisis que organiza en el marco cuatro períodos: el de la influencia *Jesuita*, el período *Ilustrado*, el período *Romántico* y el período de la *Restauración*.

(d) Brändström (2005): **Differentiated tasks in mathematics textbooks. An analysis of the levels of difficulty.** Tesis de Licenciatura (Lulea University of Technology) en la que se estudia la distinción de las tareas propuestas en los libros de texto, su desarrollo en el aula, su nivel de dificultad y su relación con la educación matemática. Se centra en el análisis de tres libros de texto del 7º grado en Suecia, particularmente el capítulo que aborda el tema de *fracciones*. El análisis de las tareas se llevó a cabo con base en cuatro aspectos: uso de imágenes, número de operaciones requeridas, procesos cognoscitivos usados, y demandas cognitivas. Entre sus resultados se encuentran:

- El uso de las imágenes es menos importante que el esperado.
- La diferenciación de tareas se da en los libros estudiados; sin embargo, en todos estos predomina un nivel bajo de dificultad.

(e) González María (2006): **Sistemas de representación en la enseñanza de los puntos críticos: Perspectiva histórica**. Artículo basado en la tesis Doctoral (Universidad de Salamanca), donde se estudian los sistemas simbólicos de representación y su evolución en textos de análisis matemático (fundamentalmente franceses, uno inglés, uno alemán y uno español) de autores como L´Hopital, MacLaurin, Euler, Bézout, Bails, Lagrange y Lacroix, publicados entre los años 1696 y 1837; enfatizando el análisis en la idea de los puntos críticos.

Una de las características relevantes de esta investigación es que llevó a cabo tres tipos de análisis:

- Socio-cultural,
- Epistemológico, y
- Didáctico.

(f) Morales (2008): En **Discriminación a través de las ilustraciones de libros de texto de educación secundaria en España** hace un estudio semiótico del racismo verbal y gráfico en 250 imágenes tomadas de 10 libros de texto de ciencias sociales publicados en España entre 1995 y 2004. Este estudio concluye que la selección de las imágenes por parte de los autores intenta reproducir las desigualdades existentes, en particular el racismo, la xenofobia y la discriminación.

Tanto en el ámbito internacional como en el nacional, muchos de los estudios con libros de texto de matemáticas pueden describirse como de tipo histórico, epistemológico y didáctico –tal como veremos en la sección que sigue[8]. Incluso, este interés también se presenta en el seno de varias de las instituciones y organizaciones internacionales dedicadas exclusivamente a la investigación sobre libros de texto[9].

Intereses de Estudio en los Libros de Texto

En el ámbito internacional existen muchos trabajos en el área que nos ocupa. Sólo hemos citado algunos de los que consideramos relevantes en este campo de investigación. No obstante, los libros de texto como unidad de análisis ofrecen muchas y diversas perspectivas de investigación, precisamente por el sitial que ocupan en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, tal como comentamos al inicio de este capítulo. La lista adjunta (cuadro 0) intenta recoger algunos de estos intereses. Naturalmente no es una lista completa.

8 Ver también: Abrate, Delgado y Pochulu (s.f.), Azcárate y Camacho (2003), Calvo, Busto y Escribano (s.f.), Cobo y Batanero (2004), Maz y Rico (2007), Pascual y otros (2006), Serradó y Azcárate (2003), Sierra, González y López (2000).

9 Uno de los de mayor relevancia es el Instituto Georg Eckert para la Investigación Internacional sobre Libros de Texto.

Cuadro 0. *Algunos intereses de estudio en los libros de texto (LT) de matemáticas.*

	Interés de estudio	Tópicos (ejemplos)
1	Evolución histórica de un concepto o idea matemática	• Números enteros negativos, racionales, reales y complejos. • Ecuación. • Función. • Límite, derivada, integral, etc. • Conjunto.
2	Ideas y temas matemáticos tratados en los LT en un período, así como su relación con el contexto científico y sociocultural.	La matemática escolar durante la Colonia, en el marco del movimiento de la *matemática moderna*, etc.
3	El texto, el lenguaje y el discurso	Lenguaje y discurso matemático utilizados –dimensiones y niveles en los que éstos se dan, etc.
4	Actividades propuestas	• Naturaleza de las actividades y de los problemas matemáticos propuestos a los estudiantes/lectores. • Correspondencia con el *paradigma del ejercicio*, etc. • Vínculos con el entorno socio-cultural, político, económico, histórico.
5	Bases pedagógicas, didácticas y matemáticas que sustentan el LT.	Estudio de la posición (pedagógica…) del autor reflejada (implícita o explícitamente) en el libro de texto, etc.
6	Los LT y su relación con la cultura, con otras disciplinas y con el entorno.	• Los LT y la educación de poblaciones indígenas, rurales y urbanas. • La cultura o la transculturización en los LT. • Tipo de problemas (culturales, de otras disciplinas…) que abordan.
7	**Los LT y su relación con las estructuras de control social y con el poder (económico…).**	El currículo oculto o no en los LT: • Antiecológico. • Discriminación de género, idioma, color de piel, grupo socioeconómico, etc. • Vínculos con las ideas de *consumismo*, etc. • Vínculos con las ideas de poder y control asociadas a ciertos grupos de la Iglesia Católica, etc. • Los tipos de saber que promueven.

En el cuadro hemos resaltado en negrillas las áreas de interés en las que se inscribe este trabajo.

Esta lista podría servir de matriz general e inicial para estimular la investigación en nuestro país, así como en el contexto Latinoamericano, en este importante campo de la Educación Matemática.

Por ejemplo, reportes sobre la discriminación –de género, de color, socioeconómica, etc.–en los libros de texto de la Educación Básica realizados en varios países (en áreas como la historia, la geografía y las ciencias naturales), sobre el papel que cumplen en la concienciación o no, por la preservación del medio ambiente, sobre el sentido de las guerras y sus efectos, o sobre la cultura de nuestros pobladores originarios, entre otros, han abierto nuevas perspectivas de investigación.

Además, aparte de la clasificación que hemos presentado (que llamamos "por intereses"), los estudios de libros de texto pueden clasificarse por "tipo". La lista que sigue reúne algunos, como en el caso anterior, pueden darse ciertas combinaciones. De hecho, no constituyen categorías excluyentes. Estos estudios son:

Cuadro 1. *Algunos tipos de investigación sobre libros de texto de matemáticas.*

	Tipo de estudio	Descripción
1	Histórico	Sobre la evolución de conceptos e ideas matemáticas, del lenguaje matemático utilizado, de las relaciones del texto (y sus ideas) con el contexto de la época, etc.
2	Epistemológico	Naturaleza y fundamentación de las ideas matemáticas que aborda el libro de texto.
3	Didáctico	Sobre los modelos didácticos y pedagógicos que soportan el libro de texto y su estructura.
4	Comparativo	Comparación y/o evaluación de los libros de texto (por niveles educativos, regiones, países, etc.), atendiendo a alguno de los aspectos de los otros tipos de estudio aquí referidos.
5	Estructural	Estudio del currículo oculto o no oculto, en los libros de texto de matemáticas sobre ideas como el saber, la relación del hombre con el entorno, consigo mismo y con los demás.

Los estudios de tipo estructural han sido poco comunes en nuestra comunidad de investigación, e incluso, en el ámbito internacional. En éstos tiene lugar el análisis de

las ideas tecnocráticas contenidas en el libro de texto, de los modelos de enseñanza basados en el dar/recibir información, de las aplicaciones y la modelación matemática, los espacios que abren para el trabajo colectivo y grupal, entre otros.

Desde la Pedagogía Crítica y desde la Educación Matemática Crítica pueden abordarse tópicos como los que hemos señalado.

Algunas Interrogantes y Objetivos

En el marco de los intereses y de los tipos de estudios que hemos referido párrafos atrás, se encuentra el relacionado con el saber que promueven los libros de texto escolares, así como las actividades matemáticas o protomatemáticas que exponen y proponen a los estudiantes.

Nos planteamos entonces, con base en las ideas anteriormente expuestas, las siguientes interrogantes que describen la orientación primaria de este trabajo.

- ¿Qué tipo de actividades exponen y proponen los libros de texto de matemáticas? ¿Cuál es su relación con actividades como contar, localizar, medir, jugar, diseñar y explicar?
- ¿Qué tipo de saber se corresponde con las actividades expuestas y propuestas en los libros de texto de matemáticas?

Y, con la intención de delimitar el estudio exploratorio y descriptivo, hemos seguido los objetivos que describimos a continuación: (a) Estudiar el tipo de actividades matemáticas o protomatemáticas que se exponen y proponen en una selección de libros de texto de matemáticas del 7º grado de la Educación Básica venezolana, y (b) Estudiar las relaciones que existen entre las actividades expuestas/propuestas en los libros de texto de matemáticas y el tipo de saber que éstos promueven.

En el Capítulo IV describimos el método que seguimos para estudiar las preguntas base –antes expuestas, y la discusión de los resultados obtenidos.

II

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y ALGUNAS VISIONES SOBRE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

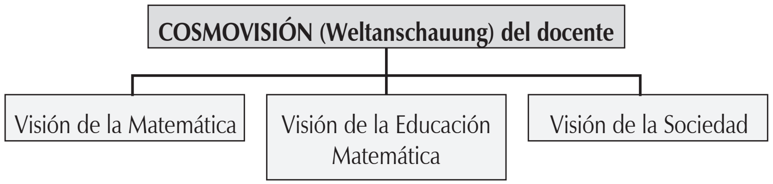
Introducción

Los diversos desarrollos de la *Educación Matemática* como disciplina científica, tal es el caso de la *Didáctica Fundamental* [Brousseau (1986), Chevallard (1992, 2000)], la *Matemática y Realidad* (Freudenthal, 1983), el *Pensamiento Matemático Avanzado* (Tall, 1991), el *Acercamiento Socioepistemológico* (Cantoral, 2000; Cantoral y Farfán, 2003), el *Enfoque Cultural* (Bishop, 1999), el *Enfoque Ontosemiótico* (Godino, 2002), la *Etnomatemática* (D´Ambrosio, 1985) y la *Educación Matemática Crítica* (Mellin-Olsen, 1987; Skovsmose, 1999; Valero, 1999; Mosquera, 1998, Mora, 2002, 2004; Mora y otros 2005), que entre otros, han estructurado fundamentos filosóficos, epistemológicos, pedagógicos, psicológicos y didácticos particulares; los que permiten hacer algunas distinciones. Estos fundamentos dan respuestas también diversas a preguntas como ¿en qué consiste la educación y la educación matemática?, ¿cuál es la naturaleza de la *matemática escolar*?, ¿en qué ámbito se construye el saber?, ¿por qué hablar de una educación matemática en nuestras sociedades?, ¿cómo viabilizar la educación matemática en el marco de la educación formal, en los niveles de la Educación Básica o Media Diversificada y Profesional venezolana, por ejemplo?, ¿qué relaciones se establecen o buscan entre los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas y la realidad o el contexto social? y ¿qué relaciones existen entre los distintos elementos del currículo (tal es el caso de los libros de texto) y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

Algunas de estas preguntas han sido y son centrales en las discusiones curriculares en todos los niveles y modalidades del sistema educativo venezolano, e incluso, en el ámbito internacional; en la conformación de la *cosmovisión*[10] del docente (Beyer, 2002) y de los estudiantes, aún cuando puedan darse implícitamente; así como también en el desarrollo de la práctica educativa en sí, en el diseño de libros de texto, paquetes de cálculo, juegos didácticos, instrumentos de evaluación, entre otros.

10 Esta noción es muy conocida en filosofía; Beyer (2002) estudia este concepto en el ámbito de la Educación Matemática –de allí su importancia. La cosmovisión involucra la visión que alguien tiene sobre la matemática, sobre la educación matemática y sobre la sociedad.

Figura 0. *La cosmovisión del docente (Beyer, 2002, p. 2).*



Hoy en día, en el contexto de la sociedad moderna, en el marco de los grandes contrastes entre el desarrollo tecnológico, en especial en el área de la información y de la comunicación, y el grado de acceso a estas tecnologías, así como el inherente a las estructuras de producción de alimentos básicos, de energía, del manejo de sus recursos naturales –como el agua, el petróleo y el gas–, y de su naturaleza (bien sea organizacional o legal), la educación, y la educación matemática en particular, han adquirido un importante papel frente a esta realidad. Ya Adorno (1998) plantaba la necesidad de reflexionar y emprender acciones desde la educación ante atrocidades como las de *Auschwitz*, después de la Segunda Guerra Mundial. Los *nuevos Auschwitz* deben también servir de evaluación para la educación en sí misma; fenómenos que encuentran ejemplos en las guerras de (o en) Afganistán e Irak, en el poderío nuclear y el creciente desarrollo armamentista, en los problemas de acceso al agua potable o a la electricidad. Desde la *Pedagogía Crítica* y desde la *Educación Matemática Crítica* se han hecho importantes aportes teóricos y prácticos en relación con esta exigencia. En esta reflexión juega un papel relevante el enfoque teórico que se siga y la *cosmovisión* que sirva como la *lente* por medio de la cual se observe tanto a la realidad, a la matemática en sí misma, a la educación, y al saber o al conocer.

En la complejidad que representa la sociedad moderna, la *matemática escolar* es considerada una de las áreas del conocimiento que posee un importante potencial en la formación de la *ciudadanía*; para la *acción* y la *crítica* en el marco de su sociedad [ver Mellin-Olsen (1987), Skovsmose (1999), Mora (2005), Serrano, (2005a), Serres y Serrano (2004), entre otros]. La matemática es considerada una de las disciplinas a las que los estudiantes y profesores califican de prioritaria en el marco del sistema escolar –de hecho, así lo reflejan los estudios nacionales e internacionales de evaluación de competencias[11]; y por otra parte como una de las que se asocian a las dificultades para el aprendizaje y para la prosecución en los estudios desde la escuela hasta la universidad.

11 Ver, por ejemplo, los reportes del SINEA, TIMSS y PISA [ver: Ministerio de Educación (1998a, 1998b, 1999), OECD (1999, 2000, 2001) y Martin et al (1997, 2004)] – Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje, Third International Mathematics and Science Study y, Program for International Student Assessment, respectivamente.

La naturaleza de la *matemática escolar*, bien sea la delineada en el currículo “escrito” o en la que se concreta en la práctica, incide en la visión que se forman los estudiantes de la disciplina en sí, de sus relaciones con otras áreas, y de su papel en la comprensión y/o transformación de ciertas problemáticas que afectan a su entorno cultural. Aún cuando no existe una única manera de entender a la *matemática escolar*, la reflexión sobre estos puntos permitirá estudiar algunos de los elementos que se corresponden con una Educación Matemática que haga explícito su rol sociopolítico.

La Matemática Escolar en Algunos de los Desarrollos de la Educación Matemática

La *matemática escolar* y las actividades matemáticas o protomatemáticas expresadas en el currículo de la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional venezolana, tanto las delineadas en los programas, en otros documentos oficiales, como en el currículo que se concreta en la práctica, obedecen a una compleja gama de factores. Entre ellos podemos mencionar las políticas educativas del Estado, el enfoque curricular que subyace explícita o implícitamente, y muy especialmente, la concepción que se tenga de las matemáticas y los libros de texto; éstos poseen una incidencia en el currículo que se concreta en la práctica, quizás mayor a la expresada en los planes, programas y políticas del Estado –ver, por ejemplo, Schubring (1987), Beyer (2006a). Los diseñadores del currículo, autores de libros de texto y profesores de aula, manejan y viabilizan sus propias concepciones de lo que es o no es la matemática, así como de las actividades que le son propias. Esta situación también se presenta en el seno de la Educación Matemática como disciplina científica.

En la *Didáctica Fundamental* y en algunos *Enfoques Psicológicos* de la Educación Matemática, corrientes que influyeron de forma notoria en los cambios curriculares ocurridos en Venezuela desde la década que inicia en 1970, la matemática se concibe como el campo de actividad profesional del matemático; de acuerdo con estas corrientes, ella es la disciplina científica en cuyo interior se produce el conocimiento matemático. Además, entienden a la *matemática escolar* como el área en la que se estudian saberes (denominados saberes “a enseñar”) que son aproximaciones al “saber sabio” o al saber que produce el matemático. El “saber a enseñar” es adaptado en función del “saber sabio”[12]. El profesor es el encargado de propiciar situaciones didácticas que permitan a los estudiantes acercarse al “saber a enseñar”, proceso que se denomina “transposición didáctica”. Algunas de las críticas a este sistema (representado por el *triángulo didáctico*) (ver Serrano 2005b, 2006b) son:

12 Esta adaptación puede hacerla el docente; aunque fundamentalmente se encuentra descrita en el currículo de la matemática escolar.

(1) En este modelo se circunscribe la producción del conocimiento matemático al matemático profesional –los profesores y estudiantes, entre otros miembros de la sociedad, no producen estos conocimientos.

(2) Estas ideas se corresponden con una visión eurocéntrica de la matemática; entendiendo por ello al hecho de tomar como referencia única a la matemática que se desarrolló en el ámbito profesional del matemático en la cultura occidental, fundamentalmente en Europa; y

(3) El modelo *saber sabio – saber a enseñar* no permite valorar el saber o el conocimiento que es producido fuera de contextos especializados como el de la ciencia matemática. Esto es, este modelo ofrece dificultades teóricas para valorar el conocimiento que se produce en el seno de los diversos y múltiples grupos culturales que coexisten en una sociedad y en un momento histórico en especial.

Sólo recientemente, a partir de los cambios curriculares en la primera y segunda etapas de la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional (por ejemplo, los concernientes a la *Escuela* y *Liceo Bolivariano* en el marco de la *Educación Bolivariana*. Ver Ministerio de Educación y Deportes, 2004a, 2004b) se concibe a las matemáticas escolares de forma más amplia, describiéndolas desde la interdisciplinariedad y en relación con el entorno sociocultural e histórico. No obstante, es común en el ámbito internacional el modelo *saber sabio – saber a enseñar* como base de los planteamientos pedagógicos y didácticos. Esto es, la *cosmovisión* (Beyer, 2002) del docente de matemáticas tanto en el ámbito nacional como en el mundial, tiene una importante influencia de la visión de las matemáticas como un edificio en el que se han estructurado lógicamente, las ideas y teorías a lo largo de la historia, y de las matemáticas como campo específico del matemático de profesión (Serrano, 2005b). Uno de los conceptos que puede contribuir al estudio de este hecho es el *paradigma del ejercicio*; tesis que describe la actividad matemática en el contexto del aula con apoyo central en el esquema de trabajo *exposición (del profesor) – ejercicios (de los estudiantes)*. También, en reportes nacionales como los del SINEA para el tercer, sexto y noveno grados de la Educación Básica (Ministerio de Educación, 1998a, 1998b, 1999), e incluso, en algunos de los recientes estudios internacionales, como el TIMSS y el PISA, puede estudiarse el reflejo en la evaluación de este esquema de trabajo en el aula.

En el *Pensamiento Matemático Avanzado* también se tiene como única referencia el *edificio matemático* al que se ha descrito antes. La actividad propia del matemático profesional, así como el estudio de sus procesos cognitivos y metacognitivos son esenciales para realizar inferencias sobre la actividad matemática de los estudiantes fuera del campo especializado de la ciencia matemática; en especial, en la educación *preuniversitaria* y

universitaria (ver por ejemplo: Tall, 1991). Es claro que estas inferencias con base en las actividades y en los procesos cognitivos de los matemáticos de profesión son importantes para el análisis de lo que debe ser la actividad matemática de los estudiantes en los diversos niveles y modalidades de la educación venezolana, así como también en otras sociedades, en especial por los aportes que tiene la *Psicología de la Educación Matemática* para el análisis de los procesos de enseñanza/aprendizaje en sí, para la comprensión de elementos que describen al pensamiento matemático avanzado y elemental, de los procesos que lo conforman, y de las posibles implicaciones didácticas y pedagógicas de la comprensión de la naturaleza del pensamiento matemático y de sus procesos en la práctica en sí, particularmente al tratar conceptos como *función*, *límite*, *infinito*, *derivada*, *integral*, *grupo*, *anillo*, *espacio vectorial*, etc. Sin embargo, este enfoque no centra su atención en otras visiones (o *cosmovisión*) de la matemática que la vinculan con los procesos que son naturales a un grupo cultural, como es el caso del *Enfoque Cultural en la Educación Matemática* de Bishop (1999). Algo similar sucede en campos como el *Acercamiento Socioepistemológico*, en el que, aun cuando se consideran elementos como el papel que juega la historia de las matemáticas para orientar las ideas y prácticas a llevar a cabo en el contexto del aula, es una historia fundamentalmente interesada en la evolución de ciertos conceptos e ideas en el interior de la ciencia matemática (entre los que pueden citarse: *número*, *ecuaciones*, *área*, *volumen*, etc.), no en la que se ha desarrollado fuera de ella. En este sentido, pueden establecerse comparaciones entre campos como la *Didáctica Fundamental*, el *Pensamiento Matemático Avanzado* y la *Socioepistemología*, en cuanto a la relevante o única referencia a la ciencia matemática; tesis que puede caracterizarse con la idea del *saber sabio*, tal como se hace en uno de estos desarrollos.

En el *Enfoque Cultural* de Bishop (1999) la matemática escolar debe reconocer y demostrar su relación con la cultura[13], planteamiento que seguimos en nuestra investigación. De hecho, de acuerdo con este autor, las matemáticas son en sí un producto cultural. Posición que contrasta con la concepción que ubica a las matemáticas como un producto exclusivo de los matemáticos de profesión. Bishop ve en los grupos culturales la verdadera riqueza de las matemáticas en tanto que son sus productos los que sirven al desarrollo de su propia cultura, además, permiten estudiar las raíces de su pensamiento matemático. Esta es precisamente una de las conclusiones que pueden extraerse de sus

13 Aunque, como hemos visto, la relación de la matemática escolar con la cultura adquiere un significado distinto en cada uno de los desarrollo de la educación matemática que hemos comentado. La posición de Bishop (1999) sobre la matemática escolar se nutre de investigaciones sobre las matemáticas que son propias a diversos grupos culturales alrededor del mundo. Para Bishop, el currículo de la matemática escolar debe acercarse a las matemáticas propias de nuestras culturas; no obstante, esta idea contrasta con la visión que se tiene de las matemáticas en el currículo (no solamente en nuestro país) y con la cosmovisión de los profesores y estudiantes.

investigaciones basadas en estudios antropológicos y comparativos. Estos planteamientos junto con la posición de asumir la educación matemática como un proceso de naturaleza social, humano e interpersonal (ob. cit., p. 31), (no signada por el objetivo de adquirir técnicas matemáticas[14] o por el principio de la "eficiencia"[15]), orientan su trabajo hacia la descripción de seis actividades matemáticas o protomatemáticas que, sostiene, están presenten en todas las culturas:

(a) ***Contar***

(b) ***Localizar***

(c) ***Medir***

(d) ***Diseñar***

(e) ***Jugar*** y

(f) ***Explicar***

Así como al estudio de la *enculturación* (en la escuela) como proceso en el que se inicia al niño en las simbolizaciones, conceptualizaciones y valores de la cultura matemática y, se crea y recrea un marco de conocimientos determinado (ob. cit., p. 120).

Una Discusión sobre el Saber o el Conocer en la Matemática Escolar

La distinción que haremos aquí de algunos de los programas de investigación en Educación Matemática no pretende reunir los elementos y relaciones que los constituyen (los trabajos referidos son un buen punto de entrada), nos proponemos más bien estudiar la manera como entienden las nociones: "educación", "saber" o "conocer".

No es extraño que ciertas nociones básicas como las citadas no se den explícitamente en algunos desarrollos de la Educación Matemática, sino que se asuman de un modo bastante general o intuitivo. Esto, como sabemos, no es ajeno, incluso, a la matemática como disciplina científica; podemos pensar en objetos como "punto", "recta" y "plano" en la Geometría Euclídea, o en "conjunto", "elemento" y pertenencia" en la Teoría de Conjuntos. Así, estudiar la naturaleza de la "educación", del "saber" o del "conocimiento"

14 Lo que se ha asociado al *Paradigma del ejercicio*.

15 Bishop (1999) critica el *principio absoluto de eficiencia* con el que se juzga o evalúa la actuación de los estudiantes en un sistema caracterizado por un currículo planificado, por el uso de libros de texto controlados, materiales prescritos y pruebas secuenciadas. Esto es, critica el concepto de la eficiencia en ese marco particular y restringido. Deja implícita entonces la idea de ubicar este concepto en un marco mucho más general, como lo es la cultura que envuelve el grupo escolar.

es una actividad que obliga a concebir a la Educación Matemática como una dimensión que va mucho más allá de las relaciones entre la matemática y la metodología didáctica, lo cual puede asociarse a una educación basada en la transmisión de información y caracterizada por un esquema de trabajo en aula que sigue la secuencia e*xposición (del profesor)-ejercicios (del alumno o estudiante)*. Freire llamó a esto *educación bancaria* o concepción bancaria de la educación.

Asumimos la Educación Matemática desde un enfoque multi e interdisciplinar [Mosquera (1998), Mora (2002), Moya (2004), Serrano (2005a, 2005b)]. Disciplina en la que intervienen, la matemática, su historia, la sociología, la psicología, la pedagogía, la lingüística y la semiótica, antropología, historia y epistemología de las ciencias, la política y la filosofía. La reflexión sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática no puede circunscribirse a la matemática y a una metodología de trabajo en el aula, o exclusivamente a la psicología (enfoque psicológico)[16]; si es así se encontrarían respuestas parciales, o alejadas de la necesaria transformación que requiere la educación y la sociedad venezolana. Por ejemplo, podemos pensar en las preguntas: ¿Cuál es el papel de la educación matemática en la sociedad?, ¿cómo se concibe la matemática escolar?, ¿y la actividad matemática?, ¿cuáles son las relaciones de la educación matemática con los problemas y crisis que afectan tanto al entorno del grupo escolar como a la sociedad en general?

Una visión restringida de esta disciplina conlleva una visión restringida al intentar responder estas cuestiones. Aunque, también, en algunos de sus desarrollos estas preguntas no tienen lugar. Como expresamos párrafos atrás, ésta no es una visión generalizada de su contenido y objetivos. Desde países como Dinamarca, Sudáfrica, Brasil y, recientemente desde Venezuela y Bolivia, se ha impulsado este tipo de reflexión teórico-práctica. En México, Colombia y Estados Unidos, en cambio, tres de los países americanos que junto a Brasil presentan un avanzado desarrollo teórico en este campo, la Educación Matemática Crítica no es una tradición, sólo pueden citarse algunos trabajos [ver, por ejemplo: Valero (1996, 1999) y Gutstein (2003)].

El Saber – el Conocer

Una de las nociones centrales en toda teoría de la Educación Matemática es precisamente "saber" o "conocer"; en ella descansa buena parte de la idea que se asuma de educación. En este trabajo no distinguiremos entre estos términos, aunque ello sí se hace, por ejemplo, en la *Didáctica Fundamental*. Para algunos, el saber es algo que ha

16 Por citar una de las líneas de investigación que ha sido característica de la investigación venezolana en educación matemática, junto con las metodologías de trabajo en el aula de matemáticas y la resolución de problemas.

sido elaborado en el seno de una disciplina por parte de los científicos; los no-científicos o el común de las personas sólo pueden aproximarse a ese saber, mas no crearlo. Para Brousseau (1990) "el saber nunca es exactamente el mismo para sus creadores, para sus usuarios, para los alumnos, etc., cambia" (p. 261). Esta tesis formula, en otras palabras, la relatividad del conocer, idea que compartimos, pero incluye, además, la suposición de que el saber es creado por algunos (los matemáticos) y usado por otros, por parte de otras disciplinas científicas e incluso por los estudiantes; quizá para hacer aplicaciones de las matemáticas o para fundamentar algunos de los métodos que utilizan o los planteamientos teóricos base que siguen. Es este último supuesto el que no seguimos.

> El matemático no comunica sus resultados tal como los ha hallado; los reorganiza, les da la forma más general posible; realiza una "didáctica práctica" que consiste en dar al saber una forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada, atemporal.
>
> El docente realiza primero el trabajo inverso al del científico, una recontextualización y repersonalización del saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau, 1994, p. 65).

La tarea del docente bajo esta perspectiva es proponer al estudiante situaciones de aprendizaje con base en la recontextualización y repersonalización que ha hecho del saber del matemático. Consiste en hacer la *transposición didáctica*[17] del saber sabio (o saber del sabio) al saber enseñado; planteamiento que es central en la Didáctica Fundamental. Entonces, adapta, modifica y reorganiza el saber del sabio, obteniendo así un saber a enseñar y, posteriormente, un saber enseñado. Los estudiantes deben apropiarse de este saber "adaptado" por medio de las situaciones que proponga el profesor. "Para que la enseñanza de un determinado elemento del saber sea meramente *posible*, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado" (Chevallard, 2000, p. 16).

Ciertamente la Didáctica Fundamental ha hecho aportes importantes a la reflexión sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática, entre ellos podemos citar (a) la idea de vigilancia epistemológica, según la cual el didacta se pregunta por las evidencias, cuestiona las ideas que parecen simples y se desprende de la engañosa familiaridad de su objeto de estudio (Chevallard, 2000), (b) la caracterización de los

17 Chevallard (2000, p. 45) define la transposición didáctica de la siguiente manera: Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El "trabajo" que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es *denominado transposición didáctica*.

efectos Jourdain, Topaze y el Deslizamiento Metacognitivo, (c) la idea de contrato didáctico y de noosfera, y (d) sus planteamientos sobre las relaciones entre el docente, los estudiantes y el conocimiento matemático. En este marco teórico, el matemático tiene una fuerte influencia en el qué enseñar, y no así el profesor, restringiendo la actividad docente al cómo enseñar. Tesis que se contrapone a una Educación Matemática de naturaleza multi y multidisciplinaria.

En la Didáctica Fundamental, la matemática escolar tiene como único referente a la matemática que se ha desarrollado y organizado a través de los siglos, a la matemática del matemático. Es claro que teorías como la geometría lineal en la que se fundan los conceptos y proposiciones euclídeas en las ideas del álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales, el cálculo integral o la teoría de números, por solo mencionar algunas de ellas, se han desarrollado, fundamentalmente, en el seno de comunidades científicas; pero muchas de estas ideas y actividades matemáticas o protomatemáticas están también presentes fuera del "núcleo científico" al que hemos hecho referencia. La matemática es una actividad propia de la cultura y de los pueblos. Actividades como contar, medir, calcular, representar, estimar y modelar han sido naturales a la cultura de los pueblos (Bishop, 1999). Pensemos en el empleo de distintas *bases*, desarrollo de sistemas de números como el indio-arábigo, el propio a culturas indígenas como la Maya, o aquella de los Yanomami en Venezuela, los diversos patrones de medida que construyeron y aún se usan en comunidades y pueblos, como las antropométricas y las que tienen como referente a objetos, los métodos de cálculo y registro como el ábaco, marcador con esferas, quipu incaico, entre otros.

Una cuestión central en este punto es si la matemática que es propia a un grupo cultural aporta las herramientas necesarias para estudiar, comprender y transformar situaciones socioeconómicas que le afectan. Es claro que la matemática no es la única fuente para alcanzar estos objetivos, o incluso, para plantearlos, pero esta representa una base importante para tomar decisiones y actuar en el amplio rango de las estructuras sociales, económicas, educativas y culturales. Éste es en sí un problema complejo. Podemos pensar en los grupos étnicos de nuestro país y en la matemática de que disponen para comprender el lado matemático de la opresión y las desigualdades que viven los pueblos Latinoamericanos, en la que es propia a los otros grupos que integran la población de nuestro país y en la que tiene raíces en su seno. Los estudiantes de la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional se forman exclusivamente en la matemática occidental, en el marco de la visión eurocéntrica de las matemáticas. La educación aquí consiste en apropiarse de la matemática desde una visión interna: se definen, enuncian propiedades y aportan ejemplos, se explican y usan algoritmos, resuelven problemas y, en algunos casos, se demuestran propiedades. Es la matemática a imagen del matemático. En este caso tampoco hay condiciones para comprender el lado matemático de la opresión y las desigualdades, y adicionalmente, el de la liberación de los pueblos a través de su *concienciación*. No las hay, pues esta educación no tiene tal contenido político. Es una educación que se orienta sólo a la matemática como ciencia; se enmarca y encierra en la disciplina. Esta última visión está ligada a la idea de que las nociones y actividades matemáticas son inherentes a los científicos, a los sabios. No obstante, ¿filosofar es algo exclusivo de los filósofos? Y filosofar es algo tan antiguo como el pensar matemáticamente.

La expresión *"Nadie entre sin saber geometría"*[18] no se circunscribe solamente a la época griega. Hoy en día, las estructuras tecnocráticas se sustentan en este viejo precepto de *la Academia*, en el conocimiento que poseen y en el que no poseen los pueblos; mencionemos, por ejemplo, el "caso PDVSA"[19], los créditos denominados indexados, los impuestos, las "regalías" por concepto de explotación de recursos naturales (gas, petróleo, etc.), la deuda externa, las patentes para comercializar de manera exclusiva medicamentos que ya se habían usado en ciertas comunidades indígenas[20], e incluso, en problemas como la drogadicción, el alcoholismo, el hábito de fumar, embarazo precoz, etc. Así, entender a la educación matemática con la idea del saber sabio, del saber a enseñar y del saber enseñado, se relaciona con una concepción ingenua de la educación.

Entonces, ¿cómo concebir el saber si pensamos en una educación matemática que no priorice la tesis del saber sabio como única "fuente" de producción del conocimiento matemático?

Hacia una Educación Crítica de las Matemáticas

Actualmente, algunos adelantos teóricos en el seno de la matemática como disciplina científica inciden notablemente en las estructuras económicas y sociales de nuestros pueblos. Nociones como la optimación, encriptación de datos, métodos estadísticos cuali-cuantitativos, cálculo diferencial e integral y sistemas de ecuaciones, teoría de matrices, interpretación y análisis gráfico, ecuaciones diferenciales, la idea del caos, entre muchas otras, soportan en parte a las decisiones políticas, económicas y sociales, y, al mismo tiempo, no son manejadas por el ciudadano en general.

18 Platón, abandonando la modestia socrática, estaba seguro de conocer las exigencias del saber y el camino hacia el saber más estricto. El camino a la verdad lo relaciona con la geometría; considera a la geometría el fundamento de todo saber.

19 Petróleos de Venezuela Sociedad Anónima.

20 Aquí pueden citarse muchos ejemplos relacionados con cicatrizantes, anestésicos locales, tónicos cardíacos, etc.

Skovsmose (1999) llamó *paradoja de Vico*[21] al hecho de que en su sociedad el común de las personas no comprenda la tecnología que soporta su aparato industrial y las decisiones del gobierno que se basan en ésta. Skovsmose se refiere a la sociedad danesa, propia de un alto desarrollo tecnológico e industrial; sin embargo, esta paradoja también se presenta en nuestro país y no sólo en el plano tecnológico. Un ejemplo de ello es la incomprensión y confusión en torno a las "encuestas a salida de urna" llevadas a cabo durante el *Referendo Presidencial* de 2004 en nuestro país; aquí, parte de la población no reflexionaba sobre algunas de las características de este método: la muestra seleccionada, el nivel socioeconómico de esta, lugares en los que se recogió información, errores de inferencia, la idea de aleatoriedad, entre otras, lo cual fue aprovechado mediáticamente por grupos con intereses partidistas y no-nacionales. Otro ejemplo es el cálculo que realizaban recientemente las instituciones financieras para el cobro de intereses sobre intereses en el caso de préstamos personales y para la adquisición de vivienda y vehículos. La matemática juega un rol importante en las decisiones que afectan a la población en general, tal es el caso de las que tienen que ver con la seguridad alimentaria, asistencial y médica, con los niveles de producción y exportación de energía (petróleo, gas, entre otras) y rubros agrícolas y pecuarios, tasas de interés e impuestos, etc. Por ejemplo, se puede modelar matemáticamente el crecimiento de una población de insectos que afectan negativamente un cultivo y tomar decisiones sobre el control de ésta: ¿Cuáles son los efectos del uso de plaguicidas en esta población? ¿Y en el medio ambiente? ¿El uso de plaguicidas perjudica a otros insectos que no deterioran el cultivo? ¿Qué ventajas tienen los cultivos orgánicos?, entre otras preguntas importantes. Nos referimos a una modelación, no por un matemático, sino por el ciudadano común (en este caso, los agricultores).

En este contexto surge la pregunta ¿es el saber del sabio el único referente para la educación matemática? Si solamente nos preguntamos qué matemáticas enseñar, podríamos suponer *a priori* que las matemáticas a estudiar son sólo las que han organizado los matemáticos en el transcurso de la historia, y no la matemática que está presente en nuestra sociedad; se omitiría así la visión de la matemática en relación con la realidad y sus fenómenos, con sus problemas. Tal visión se ubica en el mundo de las ideas que describió Platón, y no en las ideas en conexión con la acción sobre el mundo y sus problemas. Fijar el saber del matemático, o el saber del sabio, como único referente

21 Giambattista [Giovanni Battista] Vico (1688-1744). Este filósofo italiano sostuvo la idea de que sólo podíamos conocer las cosas que el mismo hombre había creado. La tecnología es una de estas; sin embargo, en la sociedad moderna el común de las personas no la comprende. Es por ello que Skovsmose utiliza la expresión "Paradoja de Vico". Además, Vico planteaba, en clara oposición al racionalismo de su época, que la sociedad humana necesitaba más que la razón para funcionar bien. Necesitaba creencias y tradiciones. Criticaba también que no se formara a los jóvenes con interés por los asuntos de la sociedad en que viven.

para la educación matemática, conlleva una actividad encerrada en la matemática[22] que se ha estructurado lógicamente a través de los siglos y, desde nuestra perspectiva, es un supuesto que no impulsa la necesaria transformación del sistema educativo venezolano en función de la formación del ser crítico y del ciudadano integral.

La idea del saber sabio como única referencia para la enseñanza/aprendizaje de la matemática no es exclusiva a la Didáctica Fundamental. Aun cuando no es un término usado en otros desarrollos, constituye un soporte no explícito para sus planteamientos. Por ejemplo, en el Pensamiento Matemático Avanzado es central la visión de que los matemáticos de profesión tienen de la misma matemática, de la educación, de los procesos que envuelve su pensamiento, así como de las ideas matemáticas a que han llegado (conocimiento matemático). Uno de sus intereses es buscar elementos en la actividad y pensamiento de los matemáticos cuando éstos resuelven problemas e investigan, con la intención de compararlos con el tipo de pensamiento en estudiantes de los niveles preuniversitarios y universitarios. Tall (1991) lo expresa así al comienzo de su trabajo: "Aunque consideraremos la naturaleza del pensamiento matemático avanzado desde un punto de vista psicológico, nuestro principal objetivo será buscar penetraciones de valor en el trabajo profesional del matemático como investigador y como profesor" (p. 3). Si bien consideramos que ésta es una fuente importante de análisis de la actividad y pensamiento matemáticos, hemos señalado ya que no es la única referencia para ello. Otros trabajos dentro del enfoque psicológico y el Acercamiento Socioepistemológico[23], entre otros, también asumen implícitamente la idea del saber sabio. Tal visión puede llevar a una educación cuyo eje es el estudio de aspectos de la estructura formal de la matemática, de una matemática separada del potencial papel que puede jugar en la sociedad. Es una educación disciplinar, desvinculada de la realidad social e histórica. Una educación así, tiene como objetivo el que los estudiantes se apropien de parcelas modificadas del saber sabio, mas no el apropiarse de saberes y construir otros en función de la comprensión y/o transformación de problemas y crisis, esto es, tal como explicaba Freire (1990:32): estudiar, si se busca la formación del ser crítico, "no es consumir ideas, sino crearlas y recrearlas". Naturalmente, el estudio disciplinar de las matemáticas obedece a otros intereses; el problema surge cuando los profesores confunden éstos con los de la educación Básica, Media Diversificada y Profesional, e incluso, generalmente, con los de los estudios universitarios.

La verdad en el contexto de la idea del saber sabio es la de la ciencia matemática, fundamentalmente la del formalismo en la matemática. El conocimiento aquí se relaciona con la deducción y lo universal. Podemos plantear entonces la pregunta: ¿cómo es la

22 Que aquí llamamos actividad intra matemática.
23 Teoría que se ha estructurado en México.

verdad en la Didáctica Fundamental (en el Acercamiento Socioepistemológico o en el Pensamiento Matemático Avanzado)? La verdad es la característica de todo conocimiento matemático, bien porque ciertas proposiciones se asumen como tales (axiomas), porque ya se las ha probado (teoremas, lemas, corolarios) o porque se cree que así lo sean (conjeturas). Esta relación estrecha entre conocimiento y verdad en la ciencia matemática ha opacado la manera de ver, desde la educación, el conocimiento escolar. Es por ello que las tendencias multi y transdisciplinarias han calado poco en la práctica; aunque tampoco constituyen una tesis generalizada en los estudios teóricos. Desde esta última perspectiva, la definición del conocimiento por medio de la verdad no explica completamente su naturaleza; ésta descansa más bien en el significado. Visión que se da en el Interaccionismo Simbólico, en el Enfoque Sociocultural, la Etnomatemática y la Educación Matemática Crítica, perspectivas que aun cuando poseen bases filosóficas y pedagógicas distintas, comparten la idea de que el significado se construye socialmente, y no la de un significado identificado únicamente con la verdad en la ciencia matemática (propia de una actividad escolar intramatemática).

Este problema, el asociado al "saber sabio" como única referencia para la educación, supone que se "adiciona" a la naturaleza del conocer el ámbito de la actividad intelectual de los matemáticos de profesión, lo cual puede relacionarse con el supuesto de Platón: *la Academia* como fuente de producción del saber; los sabios como fuente de producción del saber. Sin embargo, también podemos pensar en las estructuras tecnocráticas de la actualidad, en las tecnocracias, como los "ambientes" en los que se "concentra" el conocimiento. En cambio, la construcción social del significado como una base de los planteamientos pedagógicos que aquí se siguen, es propia a todo grupo, tal es el caso del aula de matemáticas. La posibilidad, origen, esencia, formas de conocimiento y su relación con el significado no son conceptos exclusivos al conocimiento "del sabio", lo son también para el conocimiento que se da fuera del núcleo científico de esta ciencia: en la vida cotidiana, en el trabajo o en ambientes de estudio como la escuela. Este es uno de los potenciales roles de la educación.

Ciertamente estas ideas responden desde otra óptica a preguntas como: ¿se logra conocer el objeto? y ¿obedece el conocimiento sólo a la razón o a la experiencia? Considérese la proposición "Por un punto exterior a una recta L pasa una única recta L´ paralela a L". En la Geometría Euclídea es algo que no se puede probar a partir de los demás postulados; es en sí otro postulado (el Quinto). Consiste en un hecho cuya verdad es considerada evidente en el marco de la estructura en que Euclides organizó las ideas geométricas. Aunque a través de cierta experimentación puede llegarse al mismo planteamiento (no el que ello represente un postulado, sino el que por ese punto pase una única recta paralela a L). Pero el álgebra lineal aporta herramientas para demostrar lo que en los *Elementos* es un postulado; actividad que está contemplada en los estudios universitarios (por ejemplo, en los del profesorado en matemáticas de nuestro país). En otras geometrías tal proposición debe replantearse. Esto es, los objetos matemáticos (punto, recta, triángulo, función, grupo, espacio vectorial, límite, etc.), así como muchas propiedades pueden, en efecto, conocerse. La misma matemática aporta las reglas y medios para ello. Esta postura goza de crédito en gran parte de los matemáticos de profesión. No obstante, si miramos "fuera" de la ciencia matemática, por ejemplo, a la actividad matemática en la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional, desde un enfoque multi y transdisciplinar, entonces, ¿es posible conocer?, esta pregunta Lo cual lleva a la pregunta ¿es posible conocer algo fuera de la ciencia? El idealismo no es una postura filosófica que sea común entre los profesores de matemática, en cambio, se asume a priori que podamos conocer objetos y hechos; pero sí es común el "cientifismo": no se ve a la ciencia matemática como una forma de conocimiento posible, sino que se identifica el conocimiento con la ciencia (Habermas, 1982:13). Ésta es, quizás, la razón de fondo que sustenta la común actividad escolar intra matemática. ¿Qué lugar ocupan entonces otras formas de conocimiento en el aula de matemáticas? ¿Qué papel juega la experiencia, la relación con la realidad y el contexto social? ¿Es el conocimiento matemático un producto de la razón, y sólo de ésta? Dentro de la ciencia matemática podemos pensar en el papel de la representación y la experiencia en la Geometría Euclídea, en los numerosos cálculos de Gauss que le permitieron conjeturar cuál es la densidad de primos en un entorno de n o en la modelación de la realidad (a través de la definición de recta[24], fractales, caos, correlaciones, etc.), por sólo poner algunos ejemplos; de hecho, en toda área de la matemática está presente la experiencia. En contraste con el cientifismo en la educación matemática, existen otras formas de conocimiento posibles vinculadas con la experiencia, los sentidos y la actividad. Aquí podría alegarse que, como en el caso de la asunción a priori del común de los profesores, es un supuesto el que de hecho podamos conocer. No obstante, en muchos casos puede recurrirse al sentido común como medio para convencernos de la existencia de las cosas. Skovsmose (1999) en *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*, se vale de la *Prueba de la existencia del mundo exterior* de Moore para garantizar que las crisis son tales y caracterizan a la sociedad. La prueba de Moore (1983) es un recurso filosófico importante al plantearnos lo que la educación matemática puede hacer en nuestra sociedad. Por otra parte, la educación matemática tiene un importante papel en la comprensión de las cosas y los hechos del mundo, del hombre en relación con el mundo real ¿Cómo comprender, o incluso, pensar en una

24 Recordemos la idea de recta como "mitad de una hipérbola", contrario a como se entiende en los *Elementos* "longitud sin anchura". Einstein usó esta nueva geometría (la hiperbólica) en sus cálculos astronómicos: en un espacio vacío los rayos de luz describen una trayectoria recta (como en Euclides); sin embargo, en nuestro espacio, los rayos de luz, en su trayectoria, describen mitades de hipérbolas ante la presencia de una gran masa.

educación con tal sentido político si se observan los hechos sociales y sus relaciones con una lente idealista? Esta lente o la indiferencia ante el rol político de la educación es una manera de consolidar el *status quo*, y con ello, sus desigualdades e injusticias. El saber sabio y el saber a enseñar, en tanto construcciones sin vínculos con la historia de la sociedad y su naturaleza, con el hombre y su humanización, con sus valores y antivalores, adquieren una dimensión política o bien limitada o engranada con una educación a-crítica, alienante. Es una educación para la especialidad, no para la humanización del hombre; y, como hemos señalado, puede asociarse, en los niveles preuniversitarios, con la concepción bancaria que describió Freire.

El saber sabio como única referencia para la educación matemática en la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional, e incluso, en la Educación Universitaria, tal como hemos sostenido, no permite abordar desde el contexto del aula el conocimiento y el conocer que es propio a los diversos grupos culturales que conforman la sociedad venezolana; ello tiene que ver con el grado de especialización, atomización y compartimentación del currículo –tesis que puede explicar situaciones similares en otras sociedades más allá de la Latinoamericana. El conocimiento y el conocer matemático que han desarrollado históricamente los pueblos en el marco de la agricultura, la pesca, la caza, en otras áreas de la producción de alimentos, en la atención a las enfermedades y afecciones, así como en el uso y conservación del agua, de las tierras productivas, de la fauna y la flora, y de los minerales, las tecnologías empleadas en ello, y su interpretación del hombre, el tiempo y del espacio, constituyen aquello que algunos autores denominan "saber no-científico", "pre-científico", "vulgar" o "ingenuo"; siguiendo precisamente el cientifismo a que aludió Habermas (1982). Así, de acuerdo con esta *visión cientifista*, la matemática (o la ciencia en general) no es una de las formas de construir conocimiento, sino la única forma de construir conocimiento. Ello, de acuerdo con nuestra posición, ha permitido que desde algunas corrientes de la educación matemática, y de la educación formal en general, se haya pretendido distanciar el ámbito de la construcción de conocimientos y el proceso de conocer en sí de la realidad histórica, social y cultural de los pueblos –del *saber popular*. Pensamos que una educación matemática no debe separarse del saber popular. Esta idea resume nuestras críticas al concepto de saber sabio en la *Didáctica Fundamental*, y al saber en la *Socioepistemología*, en el *Pensamiento Matemático Avanzado*, así como en otras corrientes de la Educación Matemática; además, permite delinear la concepción de esta noción en una *Educación Matemática Crítica* para la sociedad venezolana.

Algunas Funciones del Conocimiento desde la Educación y los Libros de Texto

Ahora bien, partiendo de las ideas que hemos discutido sobre el saber sabio y el saber popular, podemos preguntarnos por la o las funciones del conocimiento considerando el potencial rol sociopolítico de la educación matemática (y de la educación) en la sociedad. ¿Cuál o cuáles son algunas de las funciones del conocimiento desde la educación matemática? Ésta, tal como la referida al saber, es una discusión compleja. Incluso, podemos preguntarnos ¿tiene sentido discutir sobre la o las funciones del conocimiento en educación matemática?. ¿Acaso no es el aprendizaje y manejo de los conceptos y técnicas de la matemática escolar? El saber sabio como noción relevante para algunas corrientes ha permitido observar que tal educación posee una orientación hacia la actividad intramatemática, donde el contexto que envuelve a las situaciones didácticas se limita al aula[25] y no al que hemos delineado párrafos atrás. En este sentido, preguntarnos por las funciones del conocimiento en educación matemática puede aportar elementos importantes para la comprensión de la naturaleza en sí de tal educación –estudio que resulta medular en esta investigación. Explicitar la dimensión sociopolítica de la educación, y de la educación matemática en particular, pasa por valorar algunas de las concepciones que sobre el saber o el conocimiento se han fijado en parte de la comunidad de investigadores, pedagogos y estudiantes.

Es difícil caracterizar estas funciones, tanto como estudiar la naturaleza del conocimiento. De hecho, la realidad histórica de nuestras sociedades y culturas, así como las diversas actividades que ha llevado a cabo el hombre, ha configurado una diversidad de ellas. Nos interesa en particular considerar el conocimiento y su papel (o posible papel) en la sociedad y en el desarrollo del hombre. Otros intereses llevarían a otras categorizaciones distintas a la que expondremos aquí, aún cuando ésta no es completa ni disjunta.

(1) ***Función Mercantilista o Bancaria***. Esta función es el núcleo de los modelos pedagógicos basados en la entrega de información (fundamentalmente) por parte del profesor y en la recepción de ella por parte de los estudiantes. Es la *educación bancaria* que describió Freire (1970) y la base de la *fantasía teórica* a la que alude Eisenberg (1991). La metáfora de Freire identifica a la educación con una lógica mercantilista en la que el conocimiento (o el saber), es la mercancía o el objeto que tiene el profesor y la entrega a los estudiantes. Este modelo aún se encuentra presente en todos los niveles y modalidades de la educación en los ámbitos nacional e internacional. En la educación matemática esta lógica encuentra ejemplo en las experiencias caracterizadas por la exposición por parte del profesor de definiciones, conceptos, aplicación de algoritmos, demostración de teoremas y resolución de problemas o ejercicios; y en la interpretación de los estudiantes de esta información, así como en el trabajo en ciertos ejercicios o problemas[26]. Las

25 Ver, por ejemplo, la idea de "noosfera" en la *Didáctica Fundamental*, o la noción de "situación" en el *Pensamiento Matemático Avanzado* (aún cuando no la definen explícitamente).

26 Skovsmose (2000) las relaciona con lo que denomina "paradigma del ejercicio".

experiencias centradas en los algoritmos son también un ejemplo de la función mercantilista del conocimiento, al interior de la educación matemática. Además, muchos de los libros de texto para la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional, así como para la educación universitaria se han escrito siguiendo implícitamente la función mercantilista del conocimiento.

La función mercantilista del conocimiento conlleva una concepción *minimalista* de la educación; un vaciamiento de su naturaleza –es la *educación del dar/recibir*.

Asumir esta función del conocimiento ha afectado no solamente la práctica educativa en el contexto del aula sino que ha servido de base para el diseño curricular en la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional venezolana, así como en la Universidad –situación que también se ha dado en el ámbito internacional.

El *currículo sumativo*, con la consecuente compartimentación que genera, es un ejemplo de ello. Además, podemos citar un supuesto que subyace a muchos de estos diseños curriculares: el de *dotar de herramientas y de técnicas a los estudiantes desde las distintas especialidades con la intención de que ellos las apliquen (posteriormente) en sus campos laborales, en la cotidianidad o en el medio académico*. Tesis que es contraria a la necesaria vinculación de la educación matemática con la realidad –que aquí sostenemos.

En Venezuela, esta vinculación educación-realidad ha adquirido nuevos espacios (teóricos y prácticos) con la *Escuela Bolivariana* y con el *Liceo Bolivariano*. Sin embargo, buena parte de las Universidades han dado tímidos y escasos pasos en esa dirección, en especial en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador[27].

27 Precisamente la principal Universidad de formación de docentes en el país. En ella no ha sido central la discusión sobre los fundamentos filosóficos y pedagógicos de la *Educación Bolivariana* ni sobre la *metodología de trabajo por proyectos* en la que ésta se apoya para sus fines prácticos. Sus programas de estudio no han sido estudiados estructuralmente en función de estos fundamentos. Por otra parte, muchos de los cambios que se han dado en la UPEL tienen que ver solamente con los aspectos técnicos de implementación de la metodología de trabajo por proyectos y no con un estudio amplio al respecto. Quizás ello puede explicarse por medio de la descripción que hizo Feyerabend (1989) de una de las formas de hacer ciencia en la modernidad: (a) separando su objeto de estudio del contexto, de la filosofía y de la historia, (b) ciñéndose a unas reglas del tipo axiomáticas [tal como en las matemáticas desde el *formalismo* y desde el *logicismo*] y (c) considerando al error un hecho lejano a la ciencia o al que hay que alejar de ella. O bien, recordando las preguntas que planteó Bhaskar (1975): ¿cómo debe ser la ciencia para estudiar el mundo? y ¿cómo debe ser el mundo para que sea estudiado por la ciencia?

(2) ***Función Hegemónica-Tecnocrática***. Los modelos pedagógicos que se orientan a la reproducción de las estructuras sociales existentes se relacionan con la función hegemónica y tecnocrática del conocimiento en tanto que no se proponen transformarlas. Así, el *status quo* es la referencia y el fin último al cual debe atender la educación formal (en las instituciones educativas) y no-formal (la que se da a través de los medios de comunicación e información, de las producciones cinematográficas, juegos de video, etc.).

La función hegemónica y tecnocrática del conocimiento tiene que ver con la posesión de éste por parte de ciertos grupos como medio para apropiarse y consolidar el poder socioeconómico sobre las mayorías de la población. Aunque también la relación se da a la inversa: el poder socioeconómico también es usado como herramienta para apropiarse de conocimientos que sirvan a sus intereses hegemónicos.

Aquí son muchos los ejemplos; sólo citaremos algunos: (a) las patentes nacionales e internacionales sobre medicinas como medio para monopolizar su distribución y mercado, (b) la apropiación de tecnologías computacionales para detentar el poder (tal es el caso del manejo del cerebro tecnológico de PDVSA luego del golpe de Estado de 2002 en Venezuela como medio de desestabilización y consolidación de sus intereses partidistas), (c) el desarrollo de la *tecnología nuclear* como fuente para el posicionamiento y ocupación militar, económica y geopolítica desde la Segunda Guerra Mundial –un comentario similar puede hacerse con respecto a la *tecnología satelital*, (d) la manipulación genética de productos agrícolas para satisfacer patrones de consumo de la sociedad moderna y la consecuente afectación de los pequeños productores y campesinos de los países del sur, (e) el uso de la psicología y de la lógica del mercado como medio para promover el consumo de cigarrillos (alcohol, etc.)[28] en los jóvenes, entre otros. En el otro "sentido" puede citarse la dificultad que históricamente se dio para que las mayorías de la población accedieran y prosiguieran en los programas de formación en las universidades públicas y privadas del país, y en los demás niveles y modalidades de la educación, así como a otras áreas vinculadas al desarrollo cultural (como el arte: la música, la danza, el ballet, la pintura, el teatro, etc.[29]).

En ello se apoya el concepto de tecnocracia que describe Skovsmose (1999), e incluso, el sistema capitalista en su conjunto.

28 Apoyados en los llamados "estudios de mercado".
29 Ahora incorporadas a la formación del estudiante en la *Escuela Bolivariana* y en el Liceo Bolivariano.

Las relaciones de poder y opresión en el contexto del aula (Foucault, 2007; Bernstein, 1997; entre otros) constituyen ejemplos de la reproducción de uno de los aspectos del *status quo*, de la realidad; en ese sentido se orientan a la hegemonía de ciertos grupos sobre la sociedad en su totalidad. La educación matemática no escapa de estas prácticas. En Beyer (2002), por ejemplo, se discute la naturaleza de la *equidad*[30] en el aula de matemáticas; concepto que puede ayudar a comprender las relaciones de poder y opresión que se consolidan desde el aula. La inequidad en el aula es, entonces, una manera de favorecer la hegemonía y la tecnocracia en la sociedad.

He allí la importancia que vemos en la caracterización de algunas de las funciones del conocimiento.

Poseer el saber matemático es la manera que tiene la educación de ubicar a sus poseedores en ciertas estructuras de la sociedad –y entre ellas las estructuras tecnocráticas.

Esta función del conocimiento caracteriza una *educación por el status quo*.

La *educación del dar/recibir* sirve a una *educación por el estatus quo*.

En *La pedagogía tecnocrática a la luz del pensamiento pedagógico universal*, Medina (2005), se discuten los modelos de educación (tecnocráticos) impuestos a nuestro país, así como sus implicaciones en la "formación" del hombre[31].

(3) ***Función Humanística***. Las funciones mercantilista y hegemónica-tecnocrática del conocimiento desde la educación, y desde la educación matemática en particular, guardan relación con la sociedad que ha construido el hombre, fundamentalmente

30 Concepto que se interrelaciona con la *cosmovisión* [Weltanschauung] (visiones de la matemática, de la educación matemática y de la sociedad) del profesor y de los estudiantes. "La equidad se refiere a tratar a los estudiantes de manera justa y equitativa" (Beyer, 2002, p. 17); tiene que ver con: (a) Maneras diferentes de demostrar competencias, (b) Instrucción diferenciada a los estudiantes acorde con los diferentes estilos de aprendizaje, (c) Tiempo variable dedicado por el docente a cada estudiante y ayuda por parte de éste de acuerdo con las necesidades del educando, (d) Provisión de materiales curriculares bilingües a aquellos estudiantes cuyo idioma materno no sea el castellano (por ejemplo a las comunidades indígenas), etc. Este autor deja claro que la equidad y la igualdad no son sinónimos; esta última consiste en tratar a todos los estudiantes de la misma manera.
31 Este es un excelente trabajo publicado en Venezuela por el Fondo Editorial IPASME –aunque con muchos errores de montaje y presentación.

en la modernidad [en especial con las estructuras que soportan sus modelos económicos y de desarrollo][32] y con el concepto del hombre sobre sí mismo. La *educación del dar/recibir* y la *educación por el status quo* ofrecen una visión limitada del concepto de hombre, así como de su papel en la realidad social y cultural en tanto que amputan la posibilidad de construir colectivamente ideas teóricas y de emprender acciones prácticas transformadoras en y de su entorno. En ellas, la formación del hombre tiene que ver con la adaptación de éste al contexto, al mundo; no con su transformación. Estas ideas no pueden separarse de una educación matemática crítica.

> "El conocimiento no modifica por sí mismo el mundo; es como si abriese el camino para la modificación sensorial de los objetos. Como esto va dirigido a la subordinación de la realidad al hombre, a la sociedad, a su humanización, el conocimiento que estimula tal cambio cumple la *función humanística de asimilación ideal a la realidad*" (Bichko, 1973, p. 39). Este autor describe solamente la función humanística del conocimiento, no habla de las dos primeras que se han expuesto párrafos atrás; además, sostiene que el conocimiento puede y debe servir a la humanización del hombre –premisa que siguieron el *Marxismo*, la *Teoría Crítica*, la *filosofía de la ciencia* y el *Realismo Crítico* de Bhaskar (1975, 2005); la *Pedagogía Crítica*, el *pensamiento* de Freire (1969, 1970, 1974, 1975, 1978, 1990) y la *Educación Matemática Crítica*.
>
> La humanización del hombre tiene que ver con las transformaciones cognitivas de las formas como se percibe el mundo, la sociedad, el papel del hombre en ella, así como la transformación de la sociedad en sí misma, de sus crisis y estructuras opresoras. Las matemáticas escolares y la educación matemática, esto es, el conocimiento matemático, tienen un potencial rol en ambos aspectos de la humanización; en ese sentido hablamos de una función humanística del conocimiento. Desde la *Pedagogía Crítica* y la *Educación Matemática Crítica* se han hecho importantes aportes teóricos y prácticos para la humanización del hombre.
>
> Las ideas matemáticas, sus representaciones, los modelos y los algoritmos, tanto de las matemáticas que se han organizado lógicamente a través de los siglos (la ciencia matemática) como de las matemáticas propias de los grupos culturales (las matemáticas culturales), así como los paquetes de cálculo, las bases de datos y otras tecnologías, constituyen elementos que tienen un potencial papel (desde la educación matemática) en las transformaciones cognitivas que implica la humanización del hombre; y consecuentemente en su actividad individual y colectiva ante su sociedad y la realidad.
>
> La función humanística del conocimiento caracteriza una *educación que denominamos crítica*. Educación caracterizada, además, por la búsqueda de equidad en el contexto del aula de matemáticas[33].

32 Aunque esta función del conocimiento también apoyó modelos pedagógicos en otros momentos históricos.

La tabla que sigue resume algunos aspectos (con base en los criterios para una definición, el papel del saber, y la concepción de la educación asociada) de las tres funciones del conocimiento que hemos caracterizado.

Cuadro 2. *Tabla comparativa entre algunas de las funciones del conocimiento en la educación matemática.*

	Función Mercantilista	**Función Hegemónica-Tecnocrática**	**Función Humanística**
Criterios para una definición	Es el núcleo de los modelos pedagógicos basados en la entrega de información (fundamentalmente) por parte del profesor y en la recepción de ella por parte de los estudiantes. Es la *educación bancaria* que describió Freire (1970) y la base de la *fantasía teórica* a la que alude Eisenberg (1991).	Es la base de los modelos pedagógicos que se orientan a la reproducción de las estructuras sociales existentes se relacionan con la función hegemónica y tecnocrática del conocimiento en tanto que no se proponen transformarlas. Esta función tiene que ver con la posesión del éste conocimiento por parte de ciertos grupos como medio para apropiarse y consolidar el poder socioeconómico sobre las mayorías de la población.	Núcleo de los modelos pedagógicos en los que la formación del hombre escapa de la adaptación de éste al mundo, al *status quo*; y que se orientan a la humanización del hombre en sí y a la transformación del mundo. Es el modelo que se describe en la *Pedagogía Crítica* y en la *Educación Matemática Crítica*.

33 Ver Beyer (2002).

Papel del saber	Es la mercancía dentro del modelo pedagógico.	Es una posesión y un medio para consolidar, desde la educación, la hegemonía y las estructuras tecnocráticas.	Es un medio que puede y debe servir a la humanización del hombre.
Concepción de la educación	*Es la educación del dar/recibir.*	*Es la educación por el status quo.*	*Es la educación crítica.*
Elementos en una educación matemática	• *Experiencias centradas en la exposición del profesor y en la ejercitación de los estudiantes (paradigma del ejercicio).* • *Énfasis en los algoritmos como contenido.*	• *Experiencias que reproducen en el aula de las relaciones de poder y opresión que están presentes en la sociedad.* • *Inequidad.* • *Poseer el saber matemático es la manera que tiene la educación de ubicar a sus poseedores en ciertas estructuras de la sociedad –y entre ellas a las estructuras tecnocráticas.* • *No necesariamente hay énfasis en los algoritmos.*	• *Experiencias orientadas a las transformaciones cognitivas de la forma como se percibe el mundo, la sociedad, el papel del hombre en ella; así como orientadas a la transformación de la sociedad en sí misma, de sus crisis y de sus estructuras opresoras.* • *Búsqueda de la equidad en el aula de matemáticas.* • *No hay énfasis en los algoritmos como contenido.*
	↑	↑	Tanto el saber popular como el científico son importantes para una educación matemática crítica
	Tesis del SABER SABIO		

La tesis del saber sabio en educación se relaciona con las funciones: *mercantilista* y *hegemónica/tecnocrática* del saber.

Estas ideas, junto con la discusión de algunos elementos sobre los conceptos de

hombre, realidad, y comunicación, permiten aproximarnos a la descripción de una educación matemática crítica, en y para el contexto de la sociedad venezolana.

Por otra parte, **¿cómo se relacionan estas funciones del conocimiento con los libros de texto de la matemática escolar?** Esta es, de hecho, una pregunta difícil; sin embargo, hay algunas características de los textos que pueden asociarse a las funciones del conocimiento que hemos descrito anteriormente. Aún cuando se pudiera pensar que las matemáticas, la educación matemática, y en particular los libros de texto, suponen una neutralidad política, ello no es así: la educación es en sí un hecho político; el hombre es en sí un ser político (tal como lo argumentaron, por ejemplo, Aristóteles en el campo de la filosofía[34], y Freire (1969, 1970, 1974, 1975, 1978, 1990) en la filosofía de la educación[35]).

En el Cuadro 3 se exponen estas ideas, las cuales hemos organizado considerando cuatro aspectos base: la estructura del texto, la naturaleza de los ejemplos/problemas/actividades expuestos y propuestos a los estudiantes, el lenguaje matemático utilizado, y el papel de la educación.

34 [...] Es evidente que la ciudad-estado es una cosa natural y que **el hombre es por naturaleza un animal político o social**; y un hombre que por naturaleza y no meramente por el azar, apolítico o insociable, o bien es inferior en la escala de la humanidad, o bien está por encima de ella [...] y la razón por la cual el hombre es un animal político en mayor grado que cualquier abeja o cualquier animal gregario es algo evidente [negrillas añadidas] (Aristóteles: Política, I, 1, 1253).

35 Paulo Freire estudió teóricamente la naturaleza de la educación, así como su relación con la libertad, la acción y la transformación tanto del hombre como de su sociedad.

Cuadro 3. *Algunas relaciones de los libros de texto con las funciones mercantilista/bancaria, tecnocrática y humanista del conocimiento.*

		Algunas funciones del conocimiento		
		Función Mercantilista o Bancaria	Función Hegemónica-Tecnocrática	Función Humanística
Algunas características de los libros de texto	*Estructura del texto*	Centrada en la exposición (del autor) - ejercicios/problemas (de los alumnos o de los estudiantes)	Centrada en la exposición (del autor) - ejercicios/problemas (de los alumnos o de los estudiantes)	Caracterizado por plantear y abordar problemas del entorno, preguntas, y abrir espacios para las ideas de los estudiantes.
	Ejemplos expuestos – Problemas abordados – Actividades propuestas	Centrados en los algoritmos No relacionados con el entorno local, regional y/o mundial.	Centrados en los algoritmos. La relación que se establece con otras disciplinas y con el entorno no se orienta a la crítica ni a describir/abordar problemas del entorno.	Orientados a los problemas del entorno local, regional y/o mundial. Se establecen vínculos con otras disciplinas.
	Lenguaje matemático utilizado	Poco espacio para los comentarios, así como para las traducciones y desplazamientos	Pueden darse comentarios, traducciones, desplazamientos, y emplearse tablas, gráficos y diagramas.	Empleo de tablas, gráfico y diagramas Traducciones y desplazamientos.
	Papel de la educación	• *dar/recibir*	• *consolidar el status quo* • *sostiene la idea de la "neutralidad política"*	• *desarrollar la crítica y la actividad en función de la transformación del hombre y del entorno*

Notas: No se listan todas las relaciones existentes entre las funciones del conocimiento que consideramos en este trabajo y las características de los libros de texto. Por otra parte, algunas de las relaciones expuestas pueden generar un interesante debate sobre los planteamientos pedagógicos, didácticos y filosóficos de los modelos teóricos que

sustentan el libro de texto. Estas ideas serán centrales en el estudio que haremos de una selección de los libros de texto de matemáticas utilizados en Venezuela correspondientes al 7º grado de la Educación Básica.

(a) La **estructura del texto.**

[Forma distinguida de organización del texto]

Entre los descriptores que pueden citarse en este punto se encuentran:

- *exposición-introducción: ideas que expone el autor como introducción al tema de estudio.*
- *ejemplos: casos presentados al estudiante que ilustran conceptos, métodos o relaciones.*
- *actividades: consisten en ejercicios, problemas y/o proyectos de investigación. Entendemos por ejercicios aquellas actividades que se relacionan con los cálculos y con la aplicación de algoritmos que se suponen sencillos o con un nivel medio de complejidad. En cambio, los problemas suponen una actividad de pensamiento más compleja que tiene que ver con la estructuración y ejecución de un plan.*
- *comentarios: pueden referirse a aplicaciones de los conceptos y métodos estudiados, a otras formas de resolver un problema o sugerencias para los estudiantes, etc.*
- *preguntas: generalmente se dan como parte de los ejercicios y problemas. Aquí nos interesan en particular aquellas que se dan dentro de la discusión que hace el autor al presentar el tema o un ejemplo.*
- *reseñas históricas: sección del texto dedicada a comentar hechos históricos relacionados con la evolución de algún concepto, con el pensamiento y obra matemática propia de ciertas culturas o bien de algún matemático en particular. No siempre se dan desplegadas en forma de cuadros, sino como parte de algún ejemplo, etc.*
- *espacios para expresar por escrito concepciones previas, entre otras): región del texto dispuesta para que los estudiantes escriban sus conceptos e ideas sobre algún objeto matemático, etc. Cuando se presentan, generalmente se dejan algunas líneas semejando las del cuaderno de apuntes.*

(b) Naturaleza de los **ejemplos/problemas/actividades expuestos o propuestos a los estudiantes.**

- *relacionados o no con el contexto (local, regional y/o mundial) y sus problemas (estructuras de exclusión, opresión e injusticias).*
- *relacionados o no con otras disciplinas (como las ciencias naturales, la historia, la geografía, el arte, por ejemplo).*
- *centrados o no en los algoritmos.*
- *centrados o no en la comprensión de las ideas matemáticas.*
- *vinculados con actividades matemáticas o protomatemáticas como contar, localizar, medir, jugar, diseñar y explicar (Bishop, 1999).*

(c) **Lenguaje matemático utilizado.**

[El lenguaje matemático se caracteriza por manifestarse en dimensiones verbal, simbólica y gráfica][36]

- *empleo de tablas, gráficos y diagramas.*
- *traducciones entre el lenguaje natural y el matemático.*
- *desplazamientos entre las dimensiones del lenguaje matemático.*
- *comentarios, etcétera*[37].

(d) **Papel de la educación.**

[Intención general de la educación]

- *dar/recibir.*
- *consolidar el status quo.*
- *desarrollar la crítica y la actividad de los estudiantes en función de la transformación del hombre y del entorno.*

Naturalmente existen otras características y descriptores de los libros de texto. De hecho, la lista que pueda hacerse no será exhaustiva, pues la estructura de un texto obedece a las ideas pedagógicas, didácticas, filosóficas y psicológicas del autor, a los objetivos e intereses que se han definido, y los elementos de diseño, montaje y presentación del libro de texto en su versión acabada. Estas ideas dejan su sello, explícito

36 Ver, por ejemplo, Beyer (1994) y Serrano (2004).
37 Ver: Mora *et al.* (2001), Ruiz (2003), Serrano (2004, 2005c), Mora y Serrano (2006).

o no, en el libro de texto. Todos estos elementos son relevantes para el estudio de algunos de los aspectos que envuelve el currículo que se da en la práctica, el expuesto en los planes y programas, así como en el que "permanece oculto".

La Sociedad Moderna y la Educación Matemática

¿Cuál es el papel de la educación matemática en la sociedad moderna? En las secciones anteriores hemos discutido algunas de las distintas aproximaciones teórico-prácticas que se han desarrollado en nuestra comunidad. Como vimos, sus planteamientos pedagógicos, didácticos, filosóficos, psicológicos, e incluso, sociológicos, permiten caracterizar aproximaciones también distintas a este papel. Comentamos además que ya Adorno (1998) sostuvo la importancia de reflexionar y actuar sobre el rol de la educación ante los *nuevos Auschwitz*. Al respecto, la Educación Matemática ha permanecido algo alejada de estas reflexiones –el aporte teórico, metodológico y práctico de corrientes como la Didáctica Fundamental, del Acercamiento Socioepistemológico, del Enfoque Ontosemiótico y del Pensamiento Matemático Avanzado, se encuentra en otras direcciones[38]. Es solamente desde la Educación Matemática Crítica que se han hecho explícitos estos planteamientos; los cuales suponen complejas discusiones sobre la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas desde una visión multi e interdisciplinar.

La pregunta inicial de esta sección puede responderse considerando las funciones que se asumen para el conocimiento matemático y las relaciones que se establecen entre éstas y el mundo.

La sociedad moderna no ha superado las inequidades que fueron propias a otros momentos históricos; las estructuras de opresión y de poder, las injusticias y desigualdades se encuentran acentuadas en nuestras sociedades. La educación, tal como hemos señalado antes, tiene un potencial rol ante estos problemas. Aunque desde algunas posiciones se observa a la sociedad moderna como la más democrática e igualitaria de las que se han dado[39], argumentando que en la actual las tecnologías de la información y de la comunicación (la telefonía, la televisión, el Internet, entre otras herramientas tecnológicas) permiten acceder al conocimiento –siendo el conocimiento una herramienta poderosa para la actividad humana en su conjunto.

Sin embargo, puede observarse que los problemas de acceso a la información y a las tecnologías no es algo que se haya superado; así, las tesis basadas en la idea de Naisbitt

38 Una fuente base para estudiar estos aportes se encuentra en la bibliografía referida en las secciones anteriores.
39 Ver, por ejemplo: Naisbitt (1994). Este autor compara la sociedad actual (la del conocimiento) con la Industrial.

(1999) suponen contradicciones importantes[40]. Ciertamente el conocimiento, y en particular el conocimiento matemático, representa una especie de poder. La "posesión" de ciertos conocimientos y su administración ha sido uno de los objetivos de los planes hegemónicos en la modernidad, junto con la "posesión" de las fuentes y procesamiento de la energía (proveniente del petróleo, del agua, de la electricidad, o la nuclear, entre otras). La *tecnocracia* es un ejemplo de cómo la posesión y manejo del conocimiento ha servido al status quo y a la conformación y consolidación de estructuras hegemónicas. Sin embargo, el conocimiento es también un poder asociado a la liberación de los pueblos, a la transformación del hombre, de su sociedad, y a la resistencia a la hegemonía[41].

Entonces, existen al menos dos representaciones, y así se han dado en la complejidad de la interacción humana: una ligada a la tecnocracia y a la hegemonía, y otra ligada a la liberación y a la resistencia de los pueblos.

Hemos sostenido además que la educación no es neutra políticamente. La suposición contraria supone evidentes contradicciones si consideramos la naturaleza de la actividad humana. Así, la educación, y la educación matemática en particular, puede servir o bien a la tecnocracia y a la hegemonía o a la liberación y a la resistencia. El saber, o el conocimiento, es entendido de formas distintas en cada una de estas posiciones.

El currículo expresado en los planes, programas y demás documentos oficiales, entre los que destaca el libro de texto como uno de los de mayor impacto en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, así como los currículos que se dan en la práctica escolar y el oculto [Ver Torres (1998) para una discusión profunda sobre este tema], reflejan elementos de alguna de las posiciones antes comentadas. Los libros de texto son expresión de la cosmovisión del autor –en el sentido en que la define Beyer (2002). También reflejan su posición ante los conflictos que afectan a la sociedad moderna, ante el desarrollo tecnológico y su incidencia en las diversas actividades económicas y culturales, sobre el saber en sí y sobre la actividad individual y colectiva. He allí la importancia de estudiar los libros de texto de la matemática escolar venezolana.

Ejemplo 1: *Los libros de texto y la discriminación de la mujer.*

Por ejemplo, la figura 1 muestra el porcentaje de participación de la mujer en las ilustraciones de una selección de libros de texto españoles –estudio desarrollado por el Instituto Nacional (Español) de la Mujer en 1996.

40 Naisbitt (1999) sostiene que la Sociedad Moderna es más "igualitaria" que las anteriores, considerando que las tecnologías de la información y comunicación permiten acceder al saber o al conocimiento. Naisbitt se apoya en la idea de que "todos podemos tener acceso a la información y al saber".

41 Aquí podemos referir a los trabajos de Freire (1969, 1970, 1990), Mellin-Olsen (1987), Skovsmose (1999) y a Serrano (2005d).

En el contexto venezolano, exponemos el siguiente caso: el libro de texto de Rodríguez (s.f.), de séptimo grado, se caracteriza por presentar imágenes de personas (en forma de dibujo) para indicar comentarios, sugerencias y otras observaciones. Sin embargo, de todas las imágenes de este tipo presentadas (un total de 20), sólo una (1) corresponde a la de una mujer [ver las figuras adjuntas][42]. Este hecho puede asociarse, tal como en los libros de texto reportados en el estudio del Instituto Nacional (Español) de la Mujer, a la discriminación. Es parte de lo que se denomina currículo oculto.

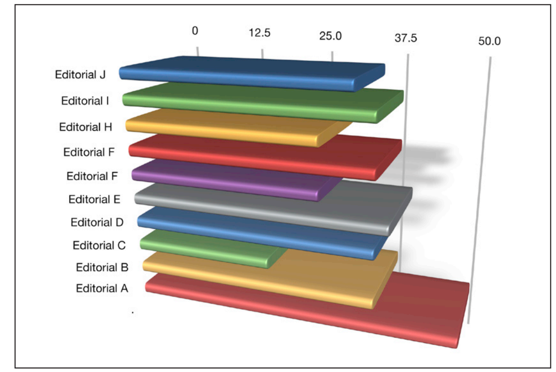


Figura 1. *Porcentaje de participación de la mujer en las ilustraciones de una selección de libros de texto de la educación secundaria española. Tomado de: Mujeres, 23, págs. 6-8.*

Figura 2. *Íconos empleados en: Matemática 7º. Cuaderno de trabajo. (de: Rodríguez, Dir., s.f.). De las 20 imágenes referidas a hombres o mujeres en el texto: 19 corresponden a hombres y sólo 1 a mujer. Además, también pueden hacerse observaciones a la representación del hombre, considerando que el libro es escrito y se dedica a estudiantes venezolanos.*

42 Considerando las imágenes usadas para indicar comentarios, etc. y las que son utilizadas para representar las situaciones matemáticas del texto, hay un total de 23 que corresponden a hombres o niños (22 de cabello rubio y 1 de cabello castaño), 2 de mujer y 1 de un bebé.

Ejemplo 2: *Los libros de texto y el discurso antiecológico.*

En el estudio de la organización *Ecologistas en Acción* (2006) se cita el siguiente comentario:

> El debate no es sobre comercio internacional (que puede ser muy positivo para todos) o sobre nuevas tecnologías (que son fuente posible de creatividad y de calidad de vida) sino cómo se hace la transición a la era de la información y a la economía global (Texto de Historia Contemporánea de 1er año de bachillerato, editorial Akal, p. 479. Tomado de: Ecologistas en Acción, 2006, p. 8).

Estas ideas, sostiene la organización, son muestra de "lo ajenos que permanecen los [libros de] textos del sistema educativo formal a la grave crisis ecológica en la que se encuentra el planeta y a la inviabilidad del modelo de desarrollo actual" (Ibíd.).

La discriminación de la mujer y las ideas antiecológicas en los libros de texto escolares, son, tal como hemos sostenido desde el principio, dos de los tantos problemas que enfrenta la educación en la actualidad.

Ejemplo 3: *Los textos y la discriminación de los pobladores originarios de nuestro continente.*

Muchos de los libros de texto escolares de historia exponen ideas e imágenes en las que se discrimina a los pobladores originarios de nuestro continente y a su cultura. Quizás es una de las herencias que dejó el pensamiento conquistador propio del Imperio Español, de la Corona y del poder reinante para la época en el seno de la religión católica, en la cultura moderna.

En nuestro país podemos citar el estudio de Ramírez, Gaspar, Figueredo y Perales (2005): La cultura indígena en las ilustraciones de los libros de texto escolares de Ciencias Sociales de la segunda etapa de la Educación Básica en Venezuela. Para ello seleccionaron una muestra de seis libros de 4º, 5º y 6º grado que tuvieran ilustraciones sobre la cultura indígena. Entre las conclusiones del estudio se encuentran las siguientes: (a) los libros de texto invisibilizan lo indígena, (b) el indígena y su cultura quedan supeditadas al hombre blanco, (c) las imágenes del indígena se utilizan para explicar el período prehispánico, (d) a partir de la Conquista, estás imágenes se hacen poco frecuentes y se omiten muchos aspectos de la realidad actual de los pobladores indígenas.

La figura que sigue (ver figura 3) muestra una situación en la que el indígena "es sometido por los misioneros a la religión católica de la cultura dominante, la cual implícitamente refleja el menosprecio e irrespeto por las creencias y costumbre religiosas indígenas" (ob. cit.).

Figura 3. *El indígena sometido por los misioneros españoles a la religión católica. Tomado de: Ramírez, Gaspar, Figueredo y Perales (2005, p. 50).*

Finalizamos esta sección con un comentario: tal como hemos mostrado, los libros de texto de matemáticas en cualquiera de los niveles educativos (Escuela, Liceo o Universidad) no son lejanos a las ideas o prácticas de discriminación, a la opresión y a las desigualdades. Los mecanismos de control social también se encuentran presentes en los libros de texto. De hecho, tienen más impacto en nuestro pensamiento y prácticas de lo que en primera instancia podemos considerar. Es por esta razón que aún cuando nuestro estudio no se centra en las discriminaciones a que refieren los ejemplos expuestos, las exponemos acá con la intención de motivar investigaciones en este campo en el ámbito venezolano y latinoamericano.

Ejemplo 4: Los textos y el status quo.

En el *Informe Delors* (1996) se postula que "**creer en la dignidad de todos los seres humanos, sin excepción** [negrillas añadidas]" es una base para un exitoso desarrollo sostenible. La educación en tanto "agente determinante de la transición hacia el desarrollo sostenible" debe fundarse, según Delors (1996), en la creencia que hemos citado. Sin embargo, si pensamos en una educación matemática crítica o en una pedagogía crítica, en el contexto de nuestra sociedad, debemos reflexionar a profundidad sobre ello. **¿Puede emprenderse la transformación no sólo del hombre sino de las estructuras sociales y económicas considerando dignos a todos los hombres?** El supuesto de Delors esconde precisamente el hecho de que la opresión y las desigualdades guardan relación con lo indigno. Creer en la dignidad de todos los hombres es una manera de afianzar el status quo; las estructuras tecnócratas o las que limitan la participación de las mayorías son ejemplos de esto. Si la dignidad de todos los hombres es un supuesto *a priori*, qué sentido tiene hablar de una educación para la liberación de los pueblos o de la humanización del hombre, qué sentido tiene comprender quiénes son los opresores y cómo lo hacen, o conocer las características e impacto del sistema capitalista en la sociedad moderna. Este informe se apoya en principios que "promueven una supuesta paz de clases" y el pensamiento irreflexivo. La educación, entonces, en Delors, estaría alejada de estas reflexiones y en consecuencia de la acción y la transformación.

Muchos de los libros de texto de la Educación Básica y Media Diversificada en Venezuela y en casi toda Latinoamérica se soportan en la tesis del **"aprender a vivir juntos"** como uno de los pilares de la educación a lo largo de toda la vida.

Para los pensadores de la UNESCO, la idea de la formación integral del hombre no implica que desde la educación se discuta sobre la transformación de las estructuras socioeconómicas existentes. Esto es, el capitalismo se asume implícitamente como el marco adecuado en el que esta formación debe darse.

Algunas de las formas en que los libros de texto afianzan el *status quo*, y junto con éste, las injusticias y desigualdades existentes, son las siguientes:

- Proponiendo actividades a los estudiantes que nada tienen que ver con el entorno socioeconómico, cultural, político e histórico.
- Desarrollando unas matemáticas escolares alejadas de sus vínculos con la cultura y la crítica.
- Enfatizando los ejercicios como único punto de entrada a la comprensión de las ideas matemáticas.
- Sugiriendo actividades que incitan al lector a consumir productos y servicios que privilegian las clases dominantes.

Naturalmente, los restantes "pilares" de la educación que postula el *Informe* ameritan un estudio crítico y reflexivo.

Ejemplo 5: Los textos y el currículo oculto

Morales (2008) expone una imagen tomada de un libro de texto español (Editorial Cruïlla, 3º, pág. 213) en la que se comparan dos ambientes urbanos. Uno de ellos corresponde a una ciudad de Ecuador afectada para entonces pos una inundación, y la otra, a la Torre Eiffel y el Champ de Mars de Francia. Estas imágenes fueron usadas por el autor para ilustrar las diferencias en el desarrollo urbanístico. El estudiante (el lector) es llevado por el autor a la idea de generalizar estas características a través de preguntas como:

1. Quines característiques econòmiques creus que reflecteixen cada una? (¿Qué características económicas crees que refleja cada una?) y
2. A quin tipus de país pertany cada fotografia? Quin serà mes influent al món? (¿A qué tipo de país pertenece cada fotografía? ¿Cuál será más influyente en el mundo?).


Figura 4. *Las imágenes como fuente de discriminación y xenofobia. Expuestas en un libro de texto de ciencias sociales español (Editorial Cruïlla, 3º, pág. 213) Fuente: Morales (2008).*

La generalización errónea de los lectores bajo el manto de una supuesta reflexión a través de las preguntas que propone el autor forma parte del currículo oculto presente en este libro de texto. En el fondo subyace una posición euro-céntrica bien clara, invisibilizando el pensamiento, conocimientos, cultura, historia y desarrollo de otros pueblos. Es la visión de la dominación desde las estructuras de poder socio-económico-capitalistas hacia los pueblos de Centro y Sudamérica, por sólo poner ejemplos.

Una buena parte de los libros de texto para la escuela y el liceo en Latinoamérica son los productos de grandes empresas editoriales con raíces europeas. También sucede que libros de texto nacionales poseen un enfoque e intenciones similares. Este currículo oculto no es algo fortuito. Las estructuras de dominación capitalistas arropan las esferas de la educación, sus políticas y elementos curriculares importantes como los libros de texto. Paradójicamente sostienen la tesis de la neutralidad política de la educación como una forma de combate ideológico y desde los hechos concretos (como las potenciales transformaciones curriculares en la Escuela y en el Liceo). Basta ver, por ejemplo, el Informe Delors (1996) que citamos párrafos antes, o bien, la dura oposición al impulso de las transformaciones estructurales en el campo curricular en países como Venezuela y Bolivia en el marco de los movimientos revolucionarios *Estado-Comunitarios* desde años recientes. Esta oposición es lejana a la necesaria educación crítica y política de nuestros pueblos en el sentido en que la describió Freire (1969, 1970, 1974).

III

LAS ACTIVIDADES MATEMÁTICAS O PROTOMATEMÁTICAS

Introducción

La discusión anterior sobre el saber matemático y algunas de las funciones que se le han asociado en la práctica educativa, puede relacionarse con el tipo de actividades matemáticas o protomatemáticas que proponen los profesores y los libros de texto. Naturalmente, no esperamos que haya consenso en este punto. Por ejemplo, el énfasis en los ejercicios de los estudiantes es entendido por muchos profesores como la fuente primaria de la comprensión y el desarrollo del pensamiento matemático, e incluso, el medio para avanzar en el ámbito académico. Ciertamente, algunas áreas de las matemáticas se prestan a una aproximación de esta naturaleza. También, por medio de importantes volúmenes de cálculos se ha llegado a pensar en ciertas estructuras matemáticas; en la historia de las matemáticas podemos encontrar muchos ejemplos de ello. Sin embargo, uno de los problemas radica en que un proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas centrado en los ejercicios generalmente no se corresponde con un estudio más o menos organizado en función de establecer conjeturas o de buscar contraejemplos. Aunque un hecho que ha signado buena parte de la educación matemática en las escuelas y liceos en nuestro país y en el ámbito internacional es precisamente el hacer énfasis en los ejercicios y los algoritmos[43].

Desde programas de investigación como el *Pensamiento Matemático Avanzado*, entre otros, se han dado importantes aportes sobre las actividades matemáticas que promueven ciertos procesos cognitivos en los estudiantes, teniendo como base de comparación la actividad y los procesos cognitivos de los matemáticos de profesión. No obstante, en el marco de este trabajo referiremos algunas actividades que se han descrito siguiendo un enfoque sociocultural de las matemáticas. Esto es, considerando las matemáticas que se han desarrollado en el seno de los grupos culturales a lo largo de la historia. De hecho, asumiremos, como hace Bishop (1999), a las matemáticas como un producto cultural. Tratando de no enfatizar en la visión eurocéntrica de las matemáticas[44].

Nuestra intención general es considerar algunos elementos dentro del enfoque sociocultural de las matemáticas que nos puedan servir para el análisis de los libros de texto de matemáticas escolares.

43 Ya en secciones anteriores hemos referido al *Paradigma de Ejercicio* (ver: Skovsmose, 2000).
44 Visión que caracteriza, por ejemplo, a la *Didáctica Fundamental*.

La Categorización de A. Bishop (1999):

Contar, Localizar, Medir, Diseñar, Jugar y Explicar

¿Por qué hablar de actividades como contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar? Bishop (1999) sostiene, con fundamento en estudios etnográficos, históricos y crosculturales, que son precisamente éstas las que se han dado en las diversas culturas a lo largo de la historia de la humanidad. Ellas han caracterizado la actividad humana, en tanto interacción con su comunidad y con el entorno. Son de carácter "universal" y "transcultural"[45]. Además, señala Bishop, que han servido al desarrollo de la simbología y conceptuación matemática. Pero, ¿cómo define Bishop estas actividades? Veamos:

(1) Contar: consiste en asociar objetos con números. Se asocia a un hecho discreto.

(2) Localizar: codificar y simbolizar su entorno espacial. Se refiere a la ubicación de uno mismo y de otros objetos en el entorno espacial.

(3) Medir: comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. Se asocia a un hecho contínuo.

(4) Diseñar: se refieren a la tecnología, los artefactos y los objetos "manufacturados" que todas las culturas crean para su vida doméstica, para el comercio, como adorno, para la guerra, para jugar y con fines religiosos.

(5) Jugar: es un tipo de actividad social de carácter diferente a cualquier otro tipo de interacción social mencionado hasta ahora. El límite entre lo real y lo irreal está bien establecido. Los jugadores sólo pueden jugar si y sólo si todos acuerdan no comportarse "normalmente". Y,

(6) Explicar: actividad que eleva la cognición humana por encima del nivel asociado con la mera experiencia del entorno. Explicar se ocupa de responder a la pregunta "¿por qué?".

Las diversas culturas del mundo han desarrollado sus particulares sistemas de enumeración y de referencia (espacial, temporal y cosmológico), patrones de medida, sus instrumentos, objetos para jugar, así como sus respuestas y argumentos para sus creencias, costumbres y problemas. Ver Rodríguez Leonardo (2000) e Ifrah (1988). Estos sistemas, costumbres, respuestas y argumentos se corresponden a la categorización que presenta Bishop. Esta es, de hecho, una categorización bastante general. Quizás allí radica su importancia en el marco de la educación matemática.

45 Esto es, comunes a muchas culturas.

Ahora bien, qué ejemplos pueden darse de estas actividades. En la lista que sigue se expone algunos de estos; como puede advertirse, su riqueza es tal que resulta natural que ésta sea bastante parcial.

Contar

- *Número de regiones al cuadricular la representación de un terreno.*
- *Número de aristas, vértices y caras de un poliedro.*
- *Número de vías de acceso (por medio de transporte público) de un punto de la ciudad a otro.*

Localizar

- *Ubicar nuestra posición en el mapa del municipio o en un croquis de la parroquia.*
- *Representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.*
- *Ubicar puntos en un mapa con base en la latitud y la longitud.*
- *Distinguir estrellas y planetas con base en un sistema de referencia.*

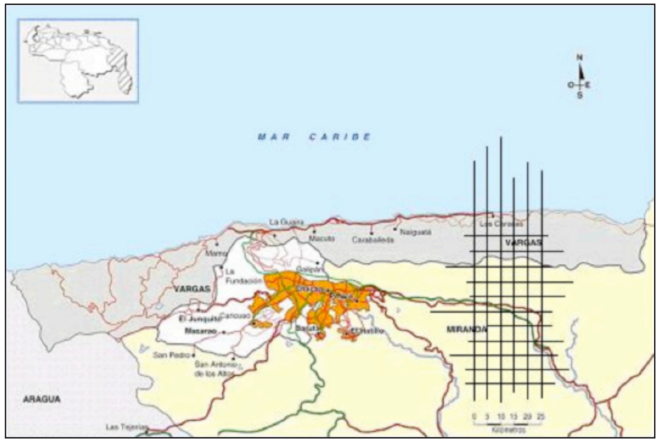


Figura 5. *Mapa vial del Distrito Capital. Los mapas constituyen un recurso muy importante para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas; en particular, para las actividades que describe Bishop (1999).*

Medir

- *Estimar algunas proporciones del cuerpo.*
- *Calcular la altura de un edificio.*
- *Determinar el perímetro de la institución escolar o de un edificio patrimonial de la localidad.*
- *Calcular el área de la parroquia.*

Diseñar

- *Realizar tejidos y composiciones.*
- *Construir instrumentos de medida o de cálculo.*
- *Elaborar papagayos.*
- *"Teselar" el plano.*

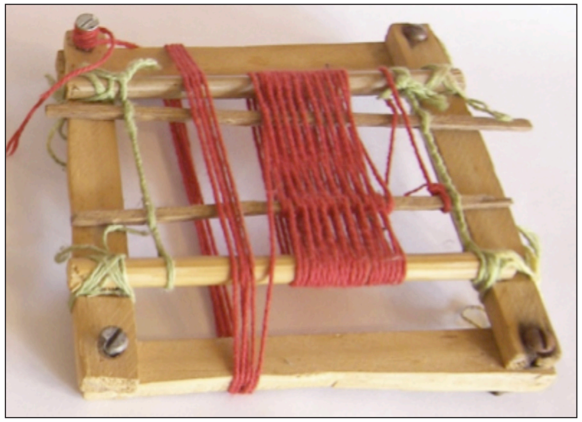


Figura 6. Diseño de un instrumento para tejer (Elaborado por Inés María Medrano –artista).

Jugar

- *Solitario.*
- *Nim.*
- *Dominó.*

- *Tangram*
- *Trompo.*
- *Metras.*
- *Combate de barcos.*
- *Ajedrez.*
- *Cartas*[46].

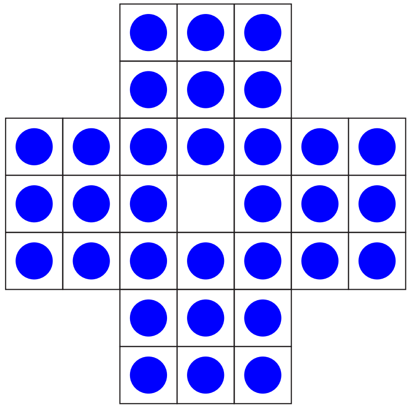


Figura 7. Juego "Solitario".

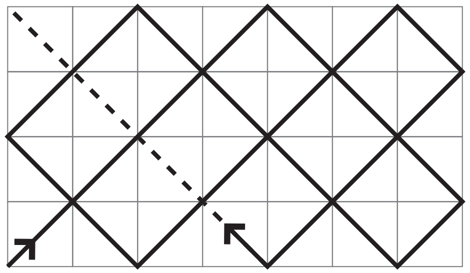


Figura 8. *Rectángulo entero. Supongamos que este rectángulo representa una mesa de billar de lados enteros en la que despreciamos la fuerza de roce. Si golpeamos una bola desde una esquina con un ángulo de 45º con respecto a los lados de la mesa, ésta rebotará en los lados de la mesa un número finito de veces y terminará en una de las tres esquinas restantes. En este hecho se basó el artefacto mecánico-óptico que creó Zavrotsky para determinar el máximo común divisor de dos números. Ver Beyer (2004).*

46 Hay poblaciones africanas que jugaban con cartas muchos siglos antes de la invasión y colonialismo europeo en este continente.

Explicar

- *¿Cómo medir la altura de un edificio?*
- *Describir la forma como se realizaron los cálculos y las representaciones gráficas.*
- *Interpretar los gráficos.*
- *¿Cuál es el concepto de diagonal y cómo lo uso?*

Figura 9. *Lados y diagonales. Tomado de Pimm (1999). Este autor preguntó a una niña de 13 años ¿cuántas diagonales tiene cada una de estas figuras geométricas? El concepto de diagonal de la niña era de "lado inclinado".*

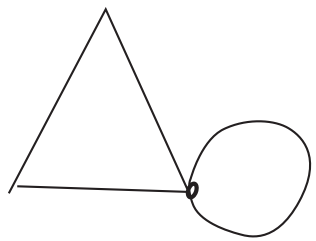


Figura 10. *Representación de la idea de punto por un niño de 7º grado: "es cuando toca una figura geométrica a otra". Tomado de Serrano (2005e).*

Figura 11. *Electrocardiograma. Interpretar gráficos como un electrocardiograma es una actividad que también se corresponde con explicar.*

Podemos ahora preguntarnos: **¿qué actividades guardan relación con los libros de texto de matemáticas?**

El mismo Bishop sostiene que la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas no debe depender de los libros de texto en el grado que lo hace actualmente.

> Lo que de verdad necesita un enseñante no es un [libro de] texto, sino actividades y recursos que contribuyan al desarrollo de los alumnos. […] [Además necesita] un entorno de aprendizaje apasionante, cálido, comprensivo e intelectualmente estimulante. Ninguna de las partes del proceso pedagógico necesita [libros de texto] textos. Entonces, ¿por qué los [libros de texto] textos tienen que ser tan dominantes? (ob. cit., p. 29).

Bishop dice que el proceso pedagógico no necesita de libros de texto **como guías**. Así entendemos sus palabras. El autor de esta investigación no considera que los textos deban excluirse del proceso educativo. Ciertamente, poseen una especie de poder que determina en buena parte la actividad que realizan los estudiantes y los profesores (incidiendo en el esquema de la sesión, en los ejemplos que se exponen, en la conceptuación y representación de los objetos matemáticos y en la naturaleza de las actividades que se proponen a los estudiantes); pero, son los profesores y la institución escolar en su conjunto quienes otorgan ese poder al libro de texto. Somos de la idea de que el libro de texto debe complementar el proceso de enseñanza/aprendizaje. Por otra parte, coincidimos con Bishop en que las actividades y los recursos deben tener un papel central en el contexto del aula.

Más aún, los estudiantes junto con su profesor y otros miembros de la comunidad podrían proponerse elaborar un libro de texto a lo largo del año escolar. Ya hay algunas experiencias al respecto (en el campo de la literatura) en la *escuela primaria*: en estos se compilan las producciones escritas de los niños y niñas en áreas como la poesía y la narrativa, incluyendo sus ilustraciones. Proyectos como éste perfectamente pueden darse en el área de ciencias naturales y matemática tanto en la *escuela primaria* como en el *liceo*. Así los niños, niñas y jóvenes reportarían, por ejemplo, sus preguntas, sus intereses, el método, los resultados, sus reflexiones y recomendaciones ante algún problema abordado (del entorno local, regional o mundial). En este punto, es natural que haya mucha resistencia entre los profesores, lo cual guarda relación con su cosmovisión (ver comentarios al respecto en el capítulo I).

Quizás la estructura y enfoque de los libros de texto de matemáticas escolares deba servir como estímulo y muestra de algunas de las actividades que pueden desarrollarse en el contexto del aula, y no como una guía de todo el proceso. En ese sentido cobra fuerza la propuesta anterior.

Volvamos a la pregunta inicial: ¿qué actividades guardan relación con los libros de texto de matemáticas?

Las seis actividades matemáticas (o protomatemáticas) universales deberían encontrar importantes espacios en los libros de texto en tanto que son propias de la cultura que envuelve a la enseñanza y al aprendizaje en un contexto dado. No obstante, la suposición natural es que el común de nuestros libros de texto, y ello es así en el ámbito internacional, no se basan en las ideas de contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Su enfoque es más bien "el del algoritmo" o el "paradigma del ejercicio".

La Técnica y los Textos

¿Por qué los libros de texto se concentran en la *técnica*? Los algoritmos, más que la conceptuación, la investigación o el trabajo por proyectos, han desempeñado un rol central en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas; se han convertido en una importante costumbre en nuestras Escuelas y Liceos. En las matemáticas profesionales los algoritmos también juegan un papel relevante, pero comparten su posición con nociones como los patrones, las estructuras, las conjeturas y las demostraciones, entre otras. El trabajo centrado en los algoritmos se vincula con un esquema *exposición-ejercicios*, mas no con la discusión en grupo.

Bishop (1999) señala que el currículo dirigido al trabajo con las técnicas o algoritmos se basa en suposiciones falsas: (a) es un método óptimo para enseñar matemáticas, y (b) las matemáticas se presentan como si estuvieran libres de valores. Se les considera deshumanizadas, despersonalizadas y descontextualizadas (pp. 29-31). Esta observación vale también para el currículo de las matemáticas en la Universidad (con la excepción de los estudios profesionales en matemáticas).

Sin embargo, muchos de nuestros libros de texto escolares son reflejo de estas suposiciones y creencias. Es por esta razón que hemos insistido en la idea de *cosmovisión* de Beyer (2002).

Así, un estudiante puede ser muy bueno calculando límites aplicando sus propiedades, derivando funciones trigonométricas guiándose o no por una tabla, "despejando" variables en una ecuación, resolviendo sistemas de ecuaciones lineales, aplicando la denominada *resolvente cuadrática*, calculando el mínimo común múltiplo o en máximo común divisor, etc., y no comprender los conceptos de límite, derivada, solución de un sistema de ecuaciones, raíz de una ecuación cuadrática, etc. El dominio de la técnica no necesariamente implica la comprensión de los conceptos que entran en juego cuando es aplicada.

En el marco del estudio que se reporta en el capítulo que sigue, la técnica que se destaca es la relacionada con el cálculo del área de una región poligonal. Más adelante observaremos que tal interés olvida abordar problemas en los que se deba determinar el área de una región irregular, y por tanto, proponer actividades basadas en el contexto y en la realidad. Así, la realidad, el entorno y sus problemas son lejanos a tal educación.

Otra Categorización

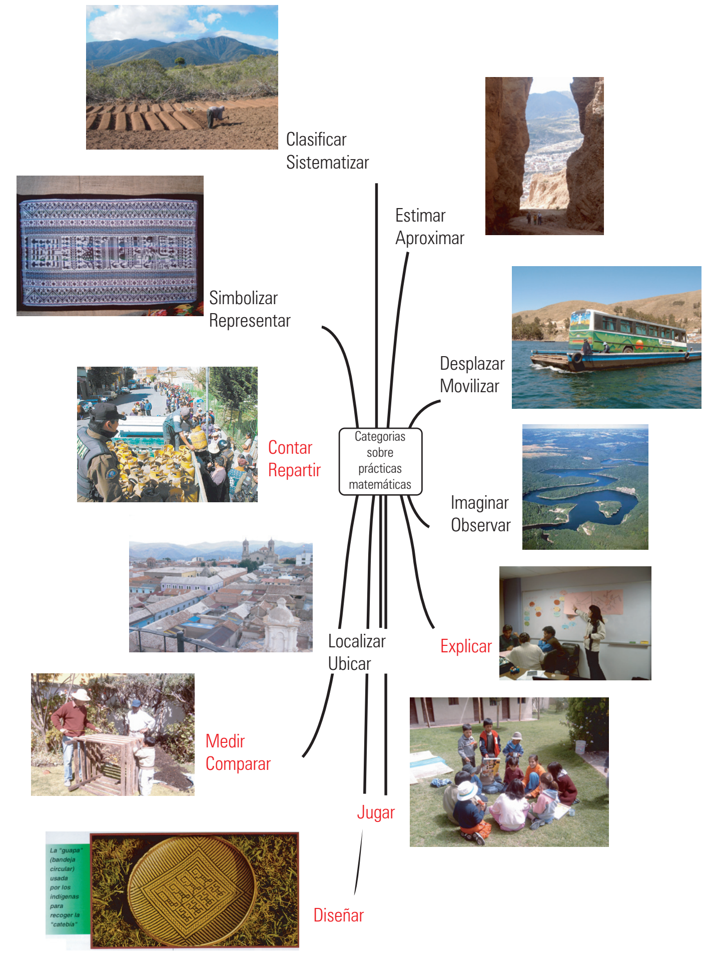


Figura 12. *Las prácticas matemáticas (Adaptado de Mora, 2005, p. 138).*

Mora (2005) sostiene que las categorías de Bishop deben ampliarse por lo menos a once. Además de las prácticas *contar*, *localizar*, *medir*, *diseñar*, *jugar* y *explicar*, agrega:

desplazar-movilizar, *imaginar-observar*, *estimar-aproximar*, *clasificar-sistematizar* y *simbolizar-representar* (ver figura 12).

Aunque Mora no desarrolla estas ideas, es fácil advertir conexiones entre estas nuevas categorías y las restantes seis. Por ejemplo entre contar e imaginar-observar, entre localizar y desplazar-movilizar, y entre medir y estimar-aproximar. Éstas, tal como las seis de Bishop, no son disjuntas. Esto es, realizar una misma actividad se apoya en una o varias de las prácticas citadas. Por ejemplo, una actividad que involucra el cálculo del área de la superficie del liceo o de la escuela involucra varias de estas prácticas matemáticas. También, podemos advertir que la atomización y compartimentación del currículo escolar conlleva a trabajar con actividades que, por una parte, poco o nada se corresponden con estas prácticas, y por otra, (cuando se corresponden) lo hacen con muy pocas de ellas.

En el marco del estudio que pasamos a reportar seguiremos la categorización de Bishop. La que establece Mora (2005) puede motivar otros estudios etnográficos, teóricos y exploratorios tanto en grupos sociales en Venezuela así como en el contexto Latinoamericano, y unidades de análisis como los libros de texto de matemáticas.

IV

LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DEL 7º GRADO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA VENEZOLANA: UN ESTUDIO

Introducción

Las ideas que hemos discutido sobre el saber y las actividades matemáticas o protomatemáticas en los capítulos anteriores pueden; desde nuestra concepción de la educación, de la educación matemática y del papel que tiene o puede desempeñar en la sociedad moderna; acercarnos a los libros de texto de matemáticas con una mirada que consideramos crítica o estructural, caracteriza por dos aspectos:

(1) Entender las matemáticas desde una visión sociocultural –y no exclusivamente desde una visión *eurocéntrica*.

(2) Distinguir las funciones del saber que pueden darse o promoverse desde la educación.

En estas "lentes" radica la importancia de estudiar los libros de texto que utilizan nuestros estudiantes, que tal como comentamos antes, reflejan, intencionalmente o no, explícitamente o no, los mecanismos de poder y el pensamiento político.

En este capítulo reportamos un *estudio descriptivo* siguiendo técnicas de *análisis de contenido* (Ander-Egg, 1980), considerando estos aspectos en una selección de libros de texto de matemáticas del 7º grado de la Educación Básica, atendiendo a las interrogantes y objetivos descritos en el Capítulo I; en particular en el marco del abordaje que hacen de uno de los tópicos que contempla el plan de estudios para este curso: el **concepto de área**. En lo que sigue, exponemos los criterios que empleamos en la selección de las unidades de análisis (de los libros de texto), la delimitación, categorías y análisis de la documentación, así como los resultados obtenidos y su discusión.

Criterios para la Selección de los Libros de Texto

Consideramos los criterios que siguen.

- Que representen libros de texto dedicados al 7º grado.
- Que estuvieran disponibles en las bibliotecas de los liceos de Caracas recientemente dotadas de material bibliográfico.

- Que la selección incluyera los libros de texto de las principales editoriales del país (considerando su volumen de ventas): CO-BO, SANTILLANA y ROMOR.

En este sentido, visitamos varios de estos liceos, así como librerías de la ciudad capital.

Descartamos aquellos libros de texto que, aunque ya formaban parte de los recursos de la biblioteca del liceo y se ofrecen en algunas librerías, no son los que comúnmente recomiendan los profesores de matemática en la actualidad[47].

Libros de Texto Seleccionados

Seleccionamos los (7) siete libros de texto siguientes:

- González, R., López, M., Milá, O., y Milá E. (s.f.). *Matemática 7º* (1ª ed.). Caracas: CO-BO.
- Reyna, R. y Flores, E. (1999). *Matemática 7* (2ª ed.). Caracas: Oxford University Press Venezuela.
- Barragán, F. y Sarabia, J. (s.f.). *Matemática 7*. Caracas: CO-BO.
- Brett, E. y Suárez, W. (2002). *Matemática 7mo* (3ª ed.). Caracas: Marca.
- Ortiz, L. (2003). *Inteligencia lógico matemática 7* (1ª ed.). Bogotá: Voluntad.
- Suárez, E. y Durán, D. (2002). *Matemática 7*. Caracas: Santillana.
- Rodríguez, E. (dir.) (s.f.). *Matemática 7º. Cuaderno de trabajo.* Caracas: Romor.

Observamos, por ejemplo, que algunos de los libros de texto no exponen las fechas de: publicación, edición e impresión; cuando en realidad tienen varios años publicándose sin cambios sustanciales en su contenido –incluso por más de una década. Creemos, que esto se debe a un interés esencialmente económico: parte del conjunto de padres y de profesores sostienen la idea de que un libro de texto con muchos años de publicación es "viejo", "desactualizado" y "no adaptado a los nuevos cambios curriculares".[48]

47 Hoy en día, es ya una costumbre en los liceos venezolanos que algunas de las editoriales que tienen un gran tiraje de textos escolares, obsequien sus textos a los profesores para que éstos los recomienden a los estudiantes y, además, les ofrezcan algunos beneficios si el grupo escolar lo adquiere. Así, muchos textos mantienen su presencia gracias a la lógica del mercado. En cambio, muy buenos textos de décadas atrás dejaron de usarse tempranamente.

48 La metodología que siguió Schubring (1987) puede guiar estudios en esta línea en el contexto venezolano.

Por otra parte, sólo uno de los libros de texto seleccionados no es publicado en el país. Se trata del libro de Ortiz (2003).

Casi todos los libros de texto pertenecen al *Plan de Dotación de Bibliotecas de Aulas* del Ministerio de Educación –reactivado en los últimos años[49] en correspondencia con el *Plan Liceo Bolivariano* en el país. Y todos han sido aprobados por esta institución para su distribución y uso en el país.

Por otra parte, hay libros de texto como el de Alson (2001) que no fueron incluidos en la selección de este estudio, pues se dedica exclusivamente a los números naturales. Éste, entre otros más, resulta interesante por basarse en la *Didáctica Fundamental* como marco teórico.

Delimitación y Análisis de la Documentación

Delimitación. Hemos delimitado el estudio al análisis de las actividades matemáticas o protomatemáticas expuestas y propuestas en los libros de texto, y de las relaciones que existen entre éstas y el tipo de saber a las que se asocian, a uno de los tópicos que abarca el plan de estudios del 7º grado: el concepto de área; considerando que: (a) es una idea geométrica importante, (b) la geometría es una de las áreas tradicionalmente "olvidada" en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, (c) constituye una idea que se presta con facilidad al desarrollo de actividades matemáticas o protomatemáticas como las que describe Bishop (1999), y (d) puede asociarse a problemas o situaciones que no se correspondan con las funciones mercantilista y tecnocrática del saber o del conocimiento.

Análisis. Luego de delimitar el estudio, llevamos a cabo un *análisis de contenido* en cada uno de los libros de texto. Este análisis (Ruiz J., 1999) permitió acercarnos al libro de texto como un escenario de observación con base en un conjunto de criterios y de categorías que habíamos definido.

1. Realizamos, en primer lugar, una descripción general del libro, en la que se incluye: autor, referencia al autor, título de la obra, año de la primera edición, año de la edición consultada, editorial, lugar de edición y ubicación en la obra del tópico *área*.
2. Describimos las actividades matemáticas expuestas y propuestas en el libro. Ello nos permitió contrastar el enfoque que sigue el autor con las actividades de la *protomatemática* que estudia Bishop (1999) y con el *Paradigma del Ejercicio*. Los criterios que seguimos para contar las actividades es el siguiente: en general no nos guiamos por la enumeración del libro de texto, considerando que (a) en algunos de los libros de texto "una actividad" reúne en realidad a varias, (b) hay actividades que

49 Por parte del Ministerio del Poder Popular para la Educación.

se proponen en la introducción al tema o en alguna sección dedicada a exponer ejemplos o a discutirlos, y (c) también pueden darse desplegadas en el libro de texto, y no en la(s) lista(s) de ejercicios o problemas que son comunes en estos materiales.

3. Luego, buscamos elementos tanto en el discurso del documento como en las actividades que se exponen y proponen, que permitieran relacionarlo, si es el caso, con alguna de las funciones del conocimiento que hemos discutido, a saber, la mercantilista/bancaria, la tecnocrática y la humanista –ver Cuadro 3. Estos elementos se organizaron en las categorías: (a) estructura del libro de texto, (b) naturaleza de los ejemplos/problemas/actividades expuestos y propuestos a los estudiantes, (c) lenguaje matemático utilizado, y (d) papel de la educación.

Los procedimientos (2) y (3) dependen de las categorías: *actividades matemáticas o protomatemáticas* y *funciones del conocimiento*.

Presentamos en tablas la información recabada en cada nivel de análisis para facilitar las comparaciones y la discusión de los resultados.

Es desde este enfoque que dimos respuestas a las interrogantes inicialmente planteadas, así como a los objetivos señalados.

Una Discusión

A - Descripción General

Seis de los libros son venezolanos y uno es colombiano. Sólo uno de los siete libros de texto es un cuaderno de trabajo; el resto sí presenta ideas teóricas, ejemplos y, en algunos casos, una introducción al tópico *área*.

Por otra parte, los libros de texto no dedican un espacio para presentar al autor, describir su pensamiento sobre las matemáticas, la educación y la pedagogía, así como sus otros trabajos de investigación. Hecho que consideramos relevante para los libros de texto en general. Ello permitiría contextualizar el enfoque que sigue el autor en el libro de texto y acercar tanto a los estudiantes como a los profesores al estudio de la obra. En casi todos los casos se refiere a los títulos obtenidos por el autor y la Universidad correspondiente. Solamente en Suárez y Durán (2002) se citan algunas de sus tareas (formación en geometría de los participantes para las olimpiadas nacionales e internacionales de matemática); y en González, López, Milá O. y Milá E. (s.f.) (sus labores como evaluadores de libros de texto escolares en el Ministerio de Educación).

Sin embargo, este enfoque no resulta importante para algunas editoriales venezolanas o radicadas en el país, las cuales han seguido más bien la lógica del mercado en la

publicación de obras escolares. El interés central en el marco de esta lógica ha sido el monetario, dejando de lado la discusión de ideas pedagógicas que consideramos básicas. En este punto podemos recordar nuevamente el concepto *cosmovisión* de Beyer (2002).

Muchos de los libros de texto de la Escuela Primaria y del Liceo se han escrito bajo contratos de esta naturaleza[50].

Cuadro 4. *Descripción general de los libros.*

Autor(es)	Referencia al autor	Título de la obra	1ª ed.	e.c.	l.e	E	Ub. de A
González, R., López, M., Milá, O., y Milá E.	GR: Profesor de Matemática y Física. LM: Licenciado en Matemática. MO: Maestra egresada de la Escuela Normal de Mujeres. Evaluadora de textos escolares. ME: Maestra egresada de la Escuela Normal de Mujeres. Evaluadora de textos escolares.	Matemática 7º	s.f.	1ª	Caracas	CO-BO	242-253
Reyna, R. y Flores, E.	RR: Licenciada en Educación mención Física y Matemática (UCAB). FE: Licenciado en Ciencias Actuariales, especialista en Finanzas (UCV).	Matemática 7	¿?	2ª	Caracas	Oxford University Press	166-178
Barragán, F. y Sarabia, J.	BF: Profesor de Matemática, Master en Ciencias. Profesor Titular UPEL. SJ: Profesor de Física y Matemática, Doctor en Ciencias. Profesor titular de la UNEXPO.	Matemática 7	s.f.	s.f.	Caracas	CO-BO	205-217
Brett, E. y Suárez, W.	BE: Profesor egresado del IPC. SW: Profesor egresado del IUPEB.	Matemática 7mo	1999	3ª	Caracas	Marca	139-146

50 Tanto los de autoría individual como colectiva.

Ortiz, L.	Licenciado en Matemáticas	*Inteligencia lógico matemática 7*	2003	1ª	Bogotá	Voluntad[1]	160-167
Suárez, E. y Durán, D.	SE: Licenciada en Educación mención Matemática, Magíster en Matemática aplicada. Coord. del Programa de Olimpiadas Recreativas de Matemática en el Zulia y del Programa de Entrenamiento Matemático para las olimpiadas nacionales e internacionales. Profesora Titular LUZ. DD: Licenciado en Educación mención Matemática, Magíster en Matemática. Entrenador de geometría para las olimpiadas nacionales e internacionales. Profesor de geometría en el postgrado de Matemática (UC). Profesor Titular LUZ.	Matemática 7	2002	1ª	Caracas	Santillana	181-189
Rodríguez, E.	Profesor	Matemática 7º. Cuaderno de trabajo	s.f.	s.f.	Caracas	Romor	61-70

Notas: e.c.: edición consultada; l.e.: lugar de edición; E: editorial; Ub. de A: Ubicación del tópico Área en la obra (intervalo de páginas).

Destacamos el hecho de que algunos de los autores están formados en carreras distintas a la *Pedagogía de las Matemáticas*; tal es el caso de la *Licenciatura en Matemáticas* o la *Licenciatura en Ciencias Actuariales*. Por otra parte, ninguno de los autores referidos cursó estudios en alguno de los programas de postgrado en educación matemática que ofrecen varias de las Universidades venezolanas. La autoría de libros de texto para la matemática escolar puede motivar proyectos de trabajo colectivo en el seno de nuestras universidades, de los liceos, de las escuelas, de los grupos de investigación en educación matemática, de organismos como la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática) y de institutos como el CENAMEC (Centro Nacional para el Mejoramiento

de la Enseñanza de la Ciencia) –una de las vías para impulsar esta propuesta se encuentra en los convenios interinstitucionales[51].

B - Las Actividades Matemáticas o Protomatemáticas en los Libros de Texto

En la tabla que sigue exponemos el número de actividades matemáticas o protomatemáticas en cada uno de los libros de texto, de acuerdo con la categorización que seguimos en el marco de esta investigación; así como el total de actividades propuestas (a los estudiantes o lectores).

Cuadro 5. *Las actividades matemáticas en los libros de texto.*

Autor(es)	Título de la obra	contar	localizar	medir	jugar	diseñar	explicar	NA
González R., López M., Milá O., y Milá E.	Matemática 7º	0	0	17	2	1	2	22
Reyna R. y Flores E.	Matemática 7	1	2	0	0	0	1	27
Barragán F. y Sarabia J.	Matemática 7	1	2	0	0	0	1	72
Brett E. y Suárez W.	Matemática 7mo	1	1	1	0	0	2	62
Ortiz L.	Inteligencia lógico matemática	10	7	4	0	0	17	77
Suárez E. y Durán D.	Matemática 7	9	2	1	1	0	1	43
Rodríguez E.	Matemática 7º. Cuaderno de trabajo	4	8	15	1	0	4	63

Notas: NA: número de actividades propuestas en la obra. La categorización de actividades, tal como hemos señalado, se debe a Bishop (1999).

51 Naturalmente, el Ministerio del Poder Popular para la Educación debería fungir de motor para impulsar proyectos de publicación de libros de texto para todos los niveles y modalidades del Sistema Educativo Bolivariano –casi la totalidad de estas publicaciones ha sido organizada por las editoriales privadas desde hacen ya varias décadas. Los profesores de la Educación Inicial, Básica, Media Diversificada y Profesional constituyen el principal recurso para generar proyectos de publicación de textos escolares.

Libros de texto como Reyna y Flores (1999), Barragán y Sarabia (s.f.) y, Brett y Suárez (2002) se caracterizan por proponer muy pocas actividades matemáticas[52]. En cambio, los demás libros de texto sí ofrecen un mayor número de actividades de esta naturaleza, aunque en relación con el total de actividades propuestas (NA –ver cuadro 5) este número es bajo en general. La excepción es: González, López, Milá O. y Milá E. (s.f.), en el que todas las actividades propuestas se corresponden con actividades de la protomatemática. Las proporciones en cada caso son –el primer número corresponde a las actividades matemáticas o de la protomatemática y, el segundo, a NA:

- 22 de 22 (González R., López M., Milá O., y Milá E.)
- 4 de 27 (Reyna R. y Flores E.)
- 4 de 72 (Barragán F. y Sarabia J.)
- 5 de 62 (Brett E. y Suárez W.)
- 38 de 77 (Ortiz L.)
- 14 de 43 (Suárez E. y Durán D.)
- 32 de 63 (Rodríguez E.)

También observamos que jugar y diseñar son las actividades matemáticas que menos se presentan en estos libros de texto. Ésta última se da en una sola de las obras, y en una sola actividad.

La única actividad que se encuentra en todos los libros de texto es explicar, aún cuando generalmente no tiene un peso importante en el libro. Es en Ortiz (2003) donde se da un número relevante de ellas.

Ahora bien, más allá de las observaciones basadas en las frecuencias, en lo que sigue estudiaremos con más detenimiento la manera en que se dan en los libros de texto.

B1: Sobre CONTAR. Varios de estas obras incluyen actividades que consisten en contar regiones cuadradas o triangulares en una figura geométrica dada con la intención de ilustrar el concepto de área. Ver, por ejemplo, las Figuras 12 y 13. Contar puede constituir una actividad que involucre la práctica o darse como una actividad mental que no implique la primera. Este hecho complicó el conteo de frecuencias que hicimos para este tipo de actividad en los libros de texto. Nos decidimos por incluir en esta categoría aquellas que involucraran la práctica de los estudiantes y que sean de naturaleza discreta. Es por esta razón que no consideramos en esta categoría actividades como:

52 Con este término hacemos referencia a las "actividades de la protomatemática".

(a) Calcule la superficie de un paralelogramo cuya base mide 25 m y su altura mide 11,2 dam.

(b) El perímetro de un cuadrado es 98 cm. ¿Cuánto mide cada lado? ¿Cuál es el valor de su área?

(c) Si el lado de un pentágono regular es 1 cm y su área 1,75 cm^2 ¿Cuánto mide la apotema?

Contar es una actividad que puede juzgarse *a priori* como sencilla o elemental. Esta visión por parte de estudiantes y profesores obedece a la forma como está estructurado el currículo de la matemática escolar en la Escuela y en el Liceo en el que se disocia la matemática de la historia, la geografía, la filosofía, las ciencias en general, entre otras disciplinas –aunque actualmente en nuestro país se están impulsando transformaciones en las que se da valor a la interdisciplinariedad y al papel que la educación puede desempeñar en la transformación del hombre. También se suele separar su estudio de la realidad y del contexto, siguiendo uno de los modelos de trabajo profesional en matemáticas. No obstante, contar es algo que puede resultar sumamente complejo en el seno de la propia matemática. Así, contar subestructuras en grupos, anillos, espacios vectoriales o módulos, por ejemplo, representa parte de esos problemas complejos. Las probabilidades, la topología y la teoría de números son otros campos de importantes problemas relacionados con contar.

En todos las obras en las que se propone contar [en González, López, Milá O. y Milá E. (s.f.) esto no se hace], esta actividad se dio de tres formas: (1) disponiendo figuras geométricas en las que debían contarse unidades de medida de superficie señaladas con otros colores o sombreadas, (2) a través de problemas en los que se encomendaba contar, como por ejemplo: ¿cuántas baldosas de 1 dm^2 se necesitan para embaldosar un piso de 30 m^2 de superficie?; sin exponer un gráfico sobre ello, y (3) proponiendo problemas de conteo basados en la observación de una obra de arte.

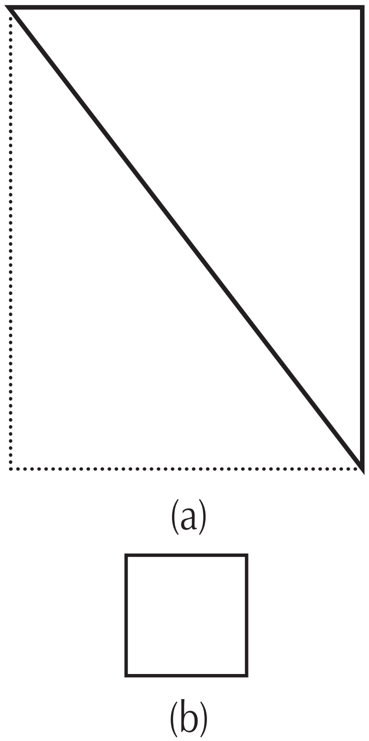


Figura 13. *Calcular el área de la región (a) tomando como unidad la región (b). Adaptado de Barragán y Sarabia (s.f., p. 207).*

Esta última actividad se presentó en Suárez y Durán (2002, p. 181), en este libro se inició el capítulo "área y volumen" con una reproducción a escala de un detalle del *Telón de Boca* del Teatro Bellas Artes de Maracaibo. Un tapiz obra del artista Luis Montiel. Luego de comentar algunas ideas sobre la presencia de la geometría en los diseños propios a muchas civilizaciones, como la *Wayúu* o la *Guajira*, plantean al lector algunas preguntas y problemas. La forma (3) no se da en las demás obras. La forma (1) tampoco se da en todos los libros de texto; aún cuando resulta natural para la comprensión del concepto de área; éste es el caso de Brett y Suárez (2002) y, Barragán y Sarabia (s.f.). Los cuales presentan problemas de la forma (2)[53].

53 Ver pág. 78.

PIENSA

¿Cuál es el área del siguiente laberinto, tomando como unidad ?

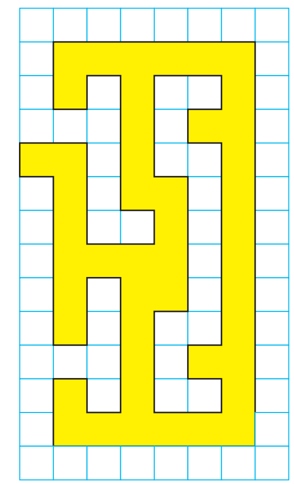


Figura 14. *Área de un laberinto. Suárez y Durán (2002, p. 186).*

B2: Sobre LOCALIZAR. En las obras estudiadas, localizar se da de varias formas: (1) exponiendo una figura para que el estudiante distinga o ubique en ella figuras geométricas (ver las figuras 15, 16, 17 y 18). Observe que para estimar el área de las figuras sombreadas o coloreadas (en 15, 16 y 17) se les debe "localizar" en el sistema de referencias en el que se encuentran, es decir, en la cuadrícula (no obstante, sabemos que el área es invariante por rotaciones o traslaciones en el plano). En el caso de Reyna y Flores (1999) la cuadrícula se expone superpuesta a las figuras, en cambio, en Ortiz (2003) y en Suárez y Durán (2002), la cuadrícula se presenta en forma parcial, siendo implícita la tarea de completarla. Observamos además, que actividades como ésta no se clasifican únicamente como localizar, sino que también se corresponden con contar. Tal como se había señalado antes, muchas actividades corresponden a dos o más de las categorías estudiadas por Bishop (1999).

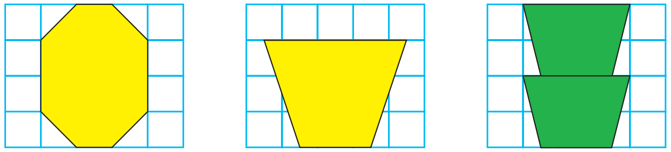


Figura 15. *"Si el área de cada uno de los cuadrados pequeños es 1cm², estima el área de cada dibujo". (Ortiz, 2003, p. 161).*

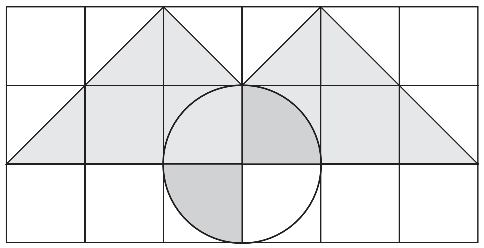


Figura 16. *"Si cada cuadrito de la figura mide 1cm. (sic) ¿Cuánto mide el área de la región rayada que observas en la figura?" (Reyna y Flores, 1999, p. 175).*

(2) En otros casos, la actividad del libro de texto no incluye una imagen, gráfico o diagrama, e implica imaginar, observar y representar figuras geométricas. Por ejemplo: (a) "Ordena de mayor a menor el área de los diferentes estados de Venezuela. Consulta un atlas" (Reyna y Flores, 1999, p. 169), (b) "Dibuja una figura cuya área sea 40 cm^2 y que tenga un lado inclinado" (Ortiz, 2003, p. 163), (c) "¿Cuántos círculos de 5 cm de radio se pueden sacar de una cartulina que tiene 60 cm de largo por 40 cm de ancho?" (Barragán y Sarabia, s.f., p. 215). Nuevamente, el tapiz (del Telón de Boca) en Suárez y Durán (2002) –aunque sí expone la imagen, junto con la actividad en Reyna y Flores antes citada, son los únicos casos en los que localizar se da en "figuras" o tomadas del contexto regional (como las obras de arte) o que se corresponden con representaciones de éste (como los mapas). Tareas en las que el estudiante debe construir croquis de un sector de su municipio también se corresponden con localizar.

Llama la atención que siendo los mapas una representación que posee un gran potencial para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en el 7º grado de la Educación Básica, con los que pueden abordarse las ideas de escala, sistema de coordenadas, relaciones mayor y menor que, proporción, y área, entre otras, no ocupen un lugar especial en las obras estudiadas. La única referencia al empleo de mapas en los siete libros de texto de la selección, es la de Reyna y Flores, citada en el párrafo anterior; aunque esto quizás se relacione con un hecho que comentaremos en la sección que sigue (en *B3: Sobre Medir*): sobre el cálculo del área para figuras no regulares.

También, la naturaleza y el espacio nos brindan fenómenos que se pueden estudiar con algunas ideas geométricas. La congruencia, la semejanza, la simetría, la proporción y el crecimiento, son conceptos que se aplican a la interpretación de la estructura de los *copos de nieve*, la *curva de Koch*, el *árbol áureo*, de las *cabezas de los girasoles*, las *galaxias*, el *cuerpo humano*, las *escalas musicales*, las *teselaciones* del plano, los *modelos de crecimiento poblacional*, el vuelo de los *halcones peregrinos* al cazar sus presas, la *composición fotográfica*, la *filotaxis*, las conchas de ciertos moluscos (como las del *nautilo* –o *nautilus pompilius*), las *hojas de las plantas y árboles*, etc. Éstas son, al igual que los mapas, ideas que pudieran enriquecer las actividades matemáticas en el contexto del aula, en particular "localizar".

Localizar es una tarea que, o bien se relaciona estrechamente con estos fenómenos o puede incorporarse mediante el diseño de experiencias didácticas por parte de los profesores de ciencias naturales y matemáticas, así como de otras disciplinas, como la geografía y el arte.

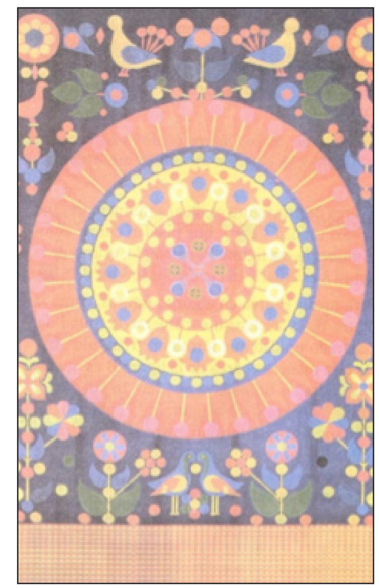


Figura 17. *Telón de Boca del Teatro Bellas Artes de Maracaibo (Estado Zulia, Venezuela). Tapiz obra del artista Luis Montiel. Medidas: 15 m por 7 m. Tomado de: Suárez y Durán (2002, p. 181).*

Tanto contar como localizar, de acuerdo con nuestro criterio, son actividades que pudieron adquirir una riqueza mucho mayor en los libros de texto. Incluso, si la concepción que el profesor tiene de la matemática es la de una ciencia o disciplina que debe conservar su "pureza", y por tanto, estudiar conceptos y relaciones desvinculados o con independencia de la realidad, de los objetos y de los fenómenos, esta riqueza también puede darse. En el seno de las matemáticas, y de las matemáticas escolares se encuentran problemas importantes que se orientan al desarrollo de procesos del pensamiento matemático. En la lista que hemos hecho antes, encontramos algunos ejemplos. La sección o capítulo "área" en los libros de 7º grado tiene una conexión natural con estas dos actividades.

Por otra parte, los libros de texto en las secciones que se dedican a los números naturales, enteros y racionales, a los números primos, a los múltiplos, y a la divisibilidad, ofrecen muy pocos espacios para este tipo de actividades; fundamentalmente los ejercicios y problemas se centran en la aplicación de algoritmos o requieren de un razonamiento de mayor complejidad.

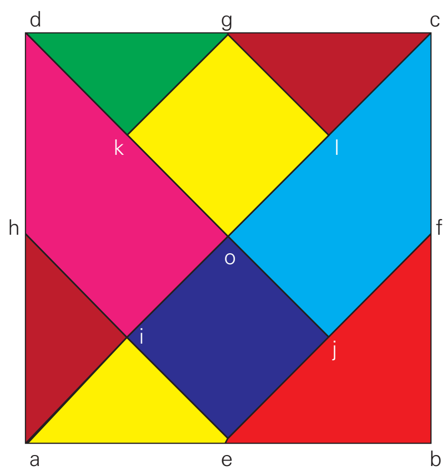


Figura 18. *Figura presentada para identificar cuadrados, trapecios y triángulos iguales, pentágonos y paralelogramos. Tomada de: Rodríguez (s.f., p. 62).*

Hoy día, la tecnología brinda muchas posibilidades para el trabajo de los estudiantes. Las imágenes satelitales y las GPS, junto con el Internet, constituyen recursos importantes para, por ejemplo, "localizar".

B3: Sobre MEDIR. González, López, Milá O. y Milá E. (s.f.) y Rodríguez (s.f.) se diferencian notablemente del resto por el número de tareas para medir que incluyen; en el primero, 17 de las 22 actividades tienen que ver con medir, y en el segundo, 15 de 63 (ver el cuadro 5). Destaca además, que en ambos se proponen actividades como la de la figura 19, donde el estudiante debe medir con reglas graduadas la o las figuras geométricas que se le proponen, sin que se den algunas medidas como

información adicional. Otros, contrariamente, no dan espacios para que los lectores utilicen instrumentos de medida (como la regla y el compás) o son la excepción entre todas las que contemplan.

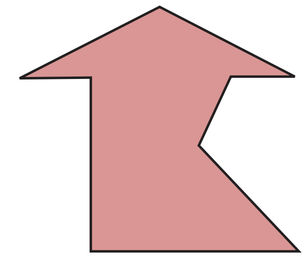


Figura 19. *Calculando el área. Imagen tomada de: Rodríguez (s.f., p. 66).*

En Rodríguez (s.f., p. 70) se encomienda calcular el área de monedas de Bs. 50, Bs. 100 y Bs. 500. Tarea que consideramos excelente desde la óptica que configuran las categorías de Bishop (1999). Ello se relaciona con interesantes problemas de construcción con regla y compás (como el de determinar el centro de un círculo, trazar diámetros perpendiculares entre sí, inscribir o circunscribir polígonos regulares a la circunferencia, entre otros). En otros, se expone la misma actividad que Rodríguez (s.f.), pero informan cuál es la medida del diámetro de las monedas. Ello es así en Suárez y Durán (2002, p. 188) [donde presentan una tabla con algunos datos para las monedas de Bolívares 10, 20, 50, 100 y 500] y sólo dejan pendiente la medida del diámetro de una de ellas; en Brett y Suárez (2002, pp. 143-145) se encuentran: (a) Una moneda de Bs. 500,00 tiene un diámetro de 28,50 mm. Calcular su superficie, (b) Una moneda de Bs. 100,00 tiene una superficie de 490,625 mm^2. ¿Cuál es su diámetro?, (c) ¿Cuál es el diámetro de un círculo que tiene una superficie de 254,34 cm^2?, etc. Esto nos permite comentar que recursos como las monedas son, de cierta manera, desaprovechados por los autores; convirtiéndolos en situaciones algorítmicas, y alejándolas de la práctica y del empleo de instrumentos geométricos. En el contexto del aula, así como en los libros, abordar problemas del tipo "calcule el área de un círculo (representado por una moneda) si el diámetro (o radio) mide [...]" vacía el potencial que tienen estas prácticas.

Es curioso que ninguno de los libros de texto se proponga estimar el área de **regiones no regulares**. En todos los casos las regiones estudiadas eran poligonales o la unión o intersección de éstas con sectores circulares.

Somos de la idea de que esta "omisión", voluntaria o no, es un "error didáctico".

El cálculo de áreas no se asocia únicamente a las regiones regulares. Son muchos los ejemplos que podemos dar desde lo cotidiano. Los libros de texto, por ejemplo, pudieran incluir la medición del área de las entidades federales o de países en un mapa con cierta escala, de las hojas, de la cubierta o "piel" que cubre ciertas frutas, de las bombillas, de una esfera, etc. Así, adicionalmente, se agrega el problema de cómo realizar la mejor estimación para un objeto dado y la selección de métodos que no lo deterioren.

En todo caso, estos métodos llevarán a cuadricular la región no regular asociada a la figura plana o no. Todas las fases de un problema como éste contribuyen a construir y comprender el concepto de área. E implícitamente, a manejar ideas que han servido de base para conceptos centrales del cálculo, como la *integral*.

Este tipo de actividades romperían con una de las tradiciones propias del currículo de la matemática escolar: el hecho de dividir en compartimentos estancos separando los contenidos. Siguiendo esta costumbre, por una parte se estudian las propiedades del área y del volumen, y por otra, por ejemplo, las construcciones con regla y compás. Ello también se presenta con otras ideas medulares de la matemática: *función*, *forma*, *crecimiento*, *cambio* y *leyes de composición*, entre otras.

B4: Sobre JUGAR. Rodríguez (s.f.) y González, López, Milá O. y Milá E. (s.f.), hacen mención del Geoplano, Tangram y Crucigrama. Con respecto al Tangram, se incluye un modelo para que los estudiantes lo reproduzcan y puedan realizar las siguientes actividades. En cambio, no se recomienda la construcción de un Geoplano ni la elaboración de sus propios crucigramas. Lo que se relacionaría con otras de las categorías de Bishop (1999).

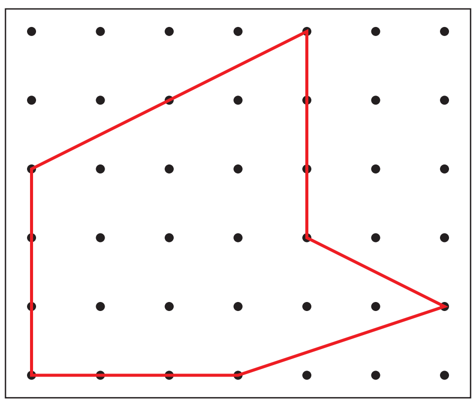


Figura 20. *Representación de una figura en un Geoplano. (Rodríguez, s.f., p. 67).*

En general es muy pobre el número de actividades relacionadas con jugar. Aquí, como en el contar, suele restársele valor por parte de profesores y estudiantes. Hay estudiantes que piensan que un curso de matemáticas en el que se abran espacios para jugar (con *granos de cereales*

para estudiar el cambio de base en sistemas de enumeración, con las distintas variedades del *dominó*, con el *combate de barcos* para manejar la representación de coordenadas en el Plano Cartesiano, con *cartas* para estudiar algunos conceptos en probabilidades, con el *nim* para comprender algunas ideas en lógica, etc.) tiene, de entrada, menos rigor matemático que otro en el que no se juegue –aún cuando en ambos casos se formalicen las ideas y relaciones matemáticas. Muchas veces prefieren un curso que siga el esquema de exposición por el profesor – ejercicios de los estudiantes (así ha pasado en algunos cursos de matemática ofrecidos a quienes se forman como profesores en la especialidad Educación Integral del *Instituto Pedagógico de Miranda*, e incluso en la especialidad Matemática). Se sienten más cómodos al conocer los algoritmos y al ver al profesor ejemplificar su uso en las situaciones y problemas que esperan resolver más adelante (en las evaluaciones del curso o en su práctica profesional). Esta opinión también está presente entre los profesores de Escuelas y Liceos. Sostenemos que los juegos como medio para estudiar conceptos matemáticos deben formar parte del proceso enseñanza/aprendizaje.

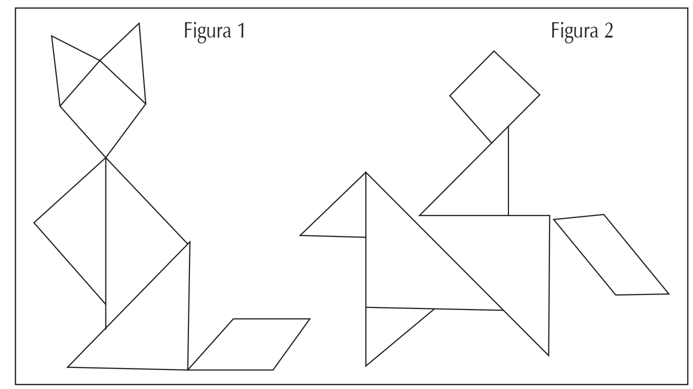
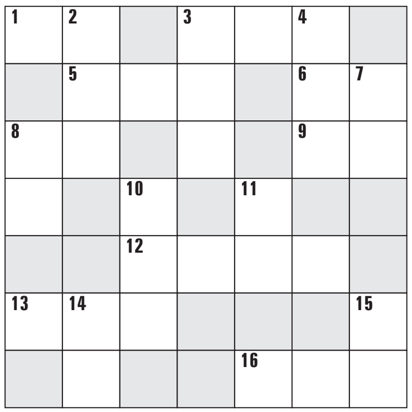


Figura 21. *Calcula y compara el perímetro de las figuras 1 y 2 formadas con el Tangram. (González, López, Milá O. y Milá E., s.f., pp. 249-250).*

Juegos como el *cubrimiento del círculo* (muy común en los parques de diversiones) –que consiste en cubrir con cinco círculos de igual diámetro a otro círculo de mayor diámetro con un único movimiento para cada círculo (tarea que, en general, resulta imposible), pueden motivar la discusión y estudio de importantes propiedades geométricas, la construcción con regla y compás, y su relación con el *número de oro*. Y, pueden darse en los distintos niveles de la educación. Con el rectángulo en el que se basó el artefacto de Zavrotsky (ver la figura 8) pueden diseñarse juegos para los estudiantes y vincularlo con los conceptos de ángulo, perpendicularidad y máximo común divisor. En realidad, la lista de sugerencias en este punto puede extenderse considerablemente, al igual que para las otras categorías.



1. $(-8)+29$
3. $3605 \div 5$
5. $1731_8 = n_{10}$
6. Múltiplo de once y dos
8. Un tercio de la medida de un ángulo recto
9. Séptimo número primo.
12. $128 = n_5$
13. Medida de un ángulo llano
15. Longitud del lado de un cuadrado de área 49 cm^2
16. 3^5

2. $\frac{5}{3}$ de 114
3. $11004_5 = n_{10}$
4. 11^2
7. Décimo numero primo
8. Área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 17 cm.
10. $52 = n_4$
11. $\frac{1}{2} = \frac{n}{100}$
14. 9^2
15. $879{,}65 \div 12{,}05$

Figura 22. *Crucigrama matemático. (Rodríguez, s.f., p. 65).*

Otros de los juegos que envuelven una riqueza matemática son los siguientes:

(a) *Cuadrados mágicos*.

(b) Intentar trazar *sin separar el lápiz del papel* ciertas figuras dadas.

(c) *Con los ojos cerrados* (dado un montón de 40 piezas, los jugadores A y B deben retirar por turnos 1, 2, 3, 4 ó 5 piezas según su elección. Gana quien retire la última pieza) –este juego está relacionado con el *nim*.

(d) Hacer una *partición de un cuadrado en cuadrados desiguales más pequeños* (Gardner).

(e) *La cinta o banda de Möbius*.

(f) *Las torres de Hanoi*.

(g) Averiguar un número mediante tarjetas basadas en el sistema binario.

(h) Colorear un mapa con sólo *cuatro colores*.

(i) Mancala.

(j) *Rompecabezas "del" teorema "de" Pitágoras o de su generalización*.

(k) *Sim*: consiste en disponer varios puntos en un papel, colocados de manera que se correspondan con los vértices de un polígono (de 5 o más vértices). Es para

dos jugadores con lápices de distinto color. Se sortea el orden de salida. Cada jugador traza un segmento que una dos puntos cualesquiera. No se puede trazar un segmento "sobre" otro ya trazado. Pierde quien en su turno trace un segmento que permita formar un triángulo con sus tres lados del mismo color.

(l) Hex: juego diseñado independientemente por los matemáticos Piet Hein y John Nash a mediados del siglo XX[54].

B5: Sobre DISEÑAR. En la selección de obras que hemos hecho sólo se encuentra una actividad asociada a "diseñar" [en González, López, Milá O. y Milá E., s.f.]. Ella consiste en construir un Tangram en cartulina, siguiendo un modelo expuesto. Estos autores aprovechan este recurso para jugar, calcular y comparar el perímetro de algunas figuras, así como para calcular su área.

Ya comentamos que otros recursos (Geoplano, Crucigrama, etc.) no se proponen para su diseño.

Teselar el plano es un buen ejemplo de esta categoría. Al igual que la *triangulación* –proceso característico en la topografía. Ambos procesos pueden adaptarse al nivel de desarrollo del pensamiento matemático de los niños y niñas del 7º grado. Así, pudieran establecerse conexiones del trabajo en el contexto del aula de matemáticas con el arte y la geografía. Recordemos en este punto los grabados de M. G. Escher (basados en la explotación de ilusiones geométricas, violando así las nociones de perpendicularidad, de paralelismo, entre otras –en la Geometría Euclídea).

Preguntas como: ¿es posible decomponer un cuadrado en una cantidad finita de cuadrados, todos de diferente tamaño?, ¿cuántos colores se requieren para colorear un mapa plano cualquiera tal que dos países fronterizos no tengan el mismo color?, ¿cómo es el perímetro de un *copo de nieve*?, ¿cuánto mide? y ¿podrías diseñar una curva que "llene" un cuadrado (*curva de Peano*)?, representan una pequeña muestra de investigaciones que muy bien pueden llevar los estudiantes del 7º grado. En estos casos, el libro de texto y el profesor deben preparar un ambiente de investigación para el grupo y organizar los subgrupos de trabajo en ese sentido; por cuanto son actividades que no se corresponden con un enfoque algorítmico ni con el énfasis en la exposición del profesor en la sesión del aula.

54 Ver una lista de referencias sobre los juegos y la educación matemática en Mosquera (1999).

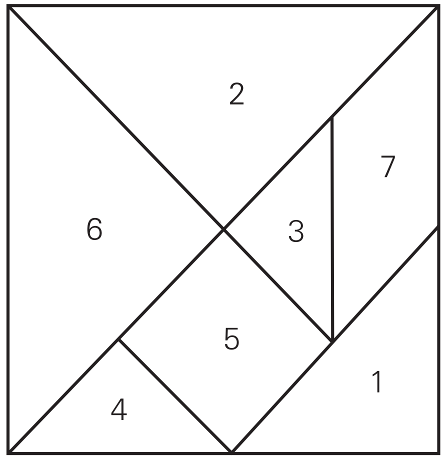


Figura 23. *Para construir un Tangram. (González, López, Milá O. y Milá E., s.f., pp. 247).*

Otras tareas de esta naturaleza pueden ser: diseñar instrumentos de medida para ciertas situaciones problema o métodos para medir objetos que son observados desde una perspectiva en especial.

B6: Sobre EXPLICAR. En la lista que sigue mostramos la proporción de actividades en las que el estudiante debe explicar sus ideas o el proceso que han aplicado o deben aplicar para resolver un problema (el último número es NA).

- 2 de 22 [González R., López M., Milá O., y Milá E.]
- 1 de 27 [Reyna R. y Flores E.]
- 1 de 72 [Barragán F. y Sarabia J.]
- 2 de 62 [Brett E. y Suárez W.]
- 17 de 77 [Ortiz L.]
- 1 de 43 [Suárez E. y Durán D.]
- 4 de 63 [Rodríguez E.]

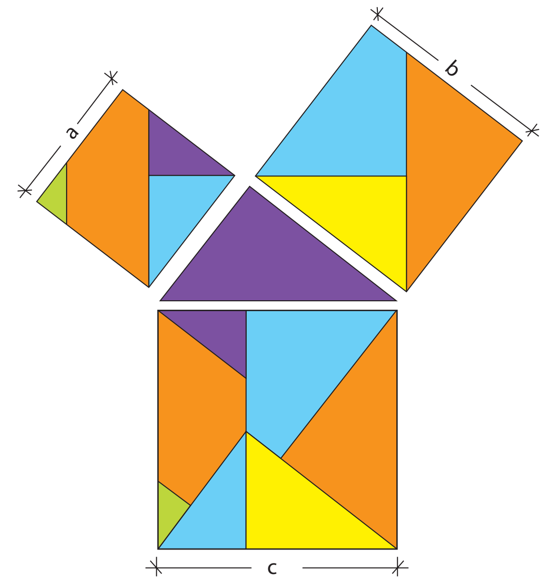


Figura 24. *Estableciendo relaciones entre el área de los cuadrados de lados a, b y c. Tomada de: Rodríguez (s.f., p. 63).*

PIENSA

Si se conoce la medida de la diagonal de un cuadrado, ¿se puede calcular su área? ¿Por qué?

Figura 25. *Ejemplo de una actividad asociada a explicar. Tomado de Suárez y Durán (2002, p. 185).*

Como hemos señalado, explicar tiene que ver con responder a ¿por qué? o ¿cómo? Implica la reflexión y obliga a ir más allá de la aplicación mecánica de una ecuación (o "fórmula"). Por esta razón, este tipo de tareas debería signar el trabajo de los estudiantes, así como el conjunto de ejercicios y problemas de los libros de texto. Explicar se asocia tanto a las concepciones previas de los estudiantes como a argumentar. En ambos sentidos explicar puede ubicarse en la columna vertebral del quehacer matemático. No obstante, la proporción explicar/NA es baja en toda la selección. En Ortiz (2003) que toma su valor más alto: el autor busca que los estudiantes expliquen el proceso seguido o que deben seguir para calcular el área de figuras poligonales intersecadas o unidas con sectores circulares (ver la figura 26).

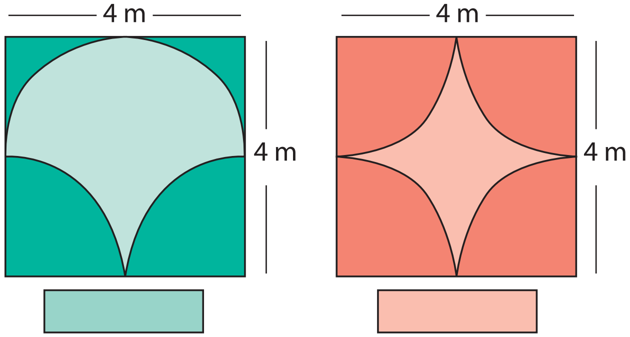


Figura 26. *Calculando las "áreas oscuras". Tomado de Ortiz (2003, p. 166).*

Otros, como el de Suárez y Durán (2002), despliegan preguntas de este tipo a los márgenes –ver la figura 25.

Nos llama la atención que en Rodríguez (s.f.) se ilustran los cuadrados construidos sobre los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo, y se solicita a los estudiantes que piensen en la relación que se puede establecer entre las áreas de estos tres cuadrados (figura 24). Nos parece muy apropiado este tipo de preguntas en el 7º grado de matemáticas. Ciertamente el currículo del Liceo contempla el estudio del Teorema de Pitágoras en el 9º grado de la Educación Básica, pero ¿por qué no estudiarlo en el marco del tema área en el 7º grado?, ¿O como parte de un proyecto de grupo? En párrafos anteriores hicimos algunos comentamos sobre la división en compartimentos estancos disjuntos de los contenidos o ideas de la matemática escolar.

Más aún, es recomendable vincular a la actividad de explicar casi todas las actividades que se pueden encomendar a los estudiantes: describiendo el proceso seguido, exponiendo argumentos para algunos de los pasos de cálculo, manifestando el significado que le atribuyen a los resultados obtenidos, respondiendo por qué razón siguieron cierto método y no otro o si podrían usar uno distinto, etc. Quizás estas ideas se "ilustran" mejor con un ejemplo: es común que en el 9º grado los estudiantes apliquen lo que denominan *resolvente* para obtener, si es posible, los valores reales que satisfacen una ecuación de segundo grado. Sin embargo, algunos estudiantes ven esto como un "resultado" y no comprenden el significado que de hecho tienen (el de ser las raíces de la ecuación).

Desde una óptica distinta al enfoque sociocultural de las matemáticas que seguimos en el marco de esta investigación, explicar no deja de ser una actividad medular en la matemática escolar. Esto es así en todos los programas de investigación en Educación Matemática, entre los que podemos citar a la *Didáctica Fundamental*, *el Pensamiento Matemático Avanzado*, *la Socioepistemología*, *el Enfoque Ontosemiótico de lo Didáctico*, *la Etnomatemática* y, la *Educación Matemática Crítica*).

C - El Saber y los Libros de Texto

Las categorías matemáticas de Bishop (1999), en tanto cercanas o propias al entorno sociocultural e histórico de una población, pueden asociarse a una educación matemática en la que los *algoritmos* no constituyan el centro único del trabajo de los estudiantes, ni el *paradigma del ejercicio* sea la orientación del proceso enseñanza/aprendizaje. En las secciones anteriores hemos visto la presencia de *contar*, *localizar*, *medir*, *jugar*, *diseñar* y *explicar* en una selección de libros de texto del 7º grado de la Educación Básica venezolana, así como la forma en que éstas se proponen. En general, estas actividades se presentan muy pobremente, con la excepción de alguna(s) de ellas, en alguno(s) de los libros de texto. También, algunos de estos libros incluyen actividades que además de corresponderse con las categorías de Bishop, son muy ricas matemáticamente. Por otra parte, la descripción que hicimos del resto de las actividades en estos libros de texto fue que, fundamentalmente, se dan como ejercicios y problemas que se centran en la aplicación de algoritmos o que requieren de un razonamiento de mayor complejidad.

Ahora bien, **¿qué tipo de saber se corresponde con las actividades expuestas y propuestas en los libros de texto de matemáticas?**

Entre las relaciones de los libros de texto con las funciones del conocimiento que hemos estudiado en el ámbito de la educación matemática, hablamos de la estructura del texto, la naturaleza de los ejemplos/problemas/actividades expuestos y propuestos, del lenguaje matemático utilizado y, del papel de la educación que es implícito al libro. Cada uno de estos cuatro aspectos nos permite responder a la pregunta inicial. A partir de los dos primeros aspectos haremos algunas inferencias sobre el papel de la educación en que se sustentan los libros de texto de la selección.

Destacamos el hecho de que **ninguno de los libros de texto se orienta a abordar problemas del entorno regional, nacional o mundial.** Es en las secciones sobre *estadística* que los autores incluyen algunos problemas que se basan en tablas de datos sobre el crecimiento de la población en el mundo, el número de afectados de cierta enfermedad en algún grupo, etc. Pero, son actividades puntuales; no forman parte de un conjunto de experiencias o de proyectos de investigación que permitan abordar el problema al menos con profundidad (o desde un enfoque interdisciplinario). Así, problemas como el consumo de alcohol en la población venezolana, el de drogas, los accidentes de tránsito, la evolución de ciertas enfermedades (dengue, hepatitis, tuberculosis, sida, diabetes, afecciones cardiovasculares, etc.) que forman parte de la realidad venezolana, son omitidos en su totalidad. Somos de la siguiente idea: el estudio con rigor y profundidad de las ideas matemáticas en el Liceo y en la Escuela (observación que extendemos también a la Universidad) bien puede emprenderse abordando problemas del entorno. En el seno de las matemáticas profesionales son muchos los ejemplos al respecto.

El arte es también una fuente invalorable de ideas y proyectos para la educación matemática. Recordemos que sólo en Suárez y Durán (2002) se expone una obra de arte como inicio para la discusión y para plantear problemas. Podemos hacer una observación similar para cada una de las disciplinas del conocimiento contempladas en el currículo del Liceo. Esto es, un enfoque interdisciplinar contribuiría a estudiar con profundidad algún problema del entorno que posea *riqueza matemática*.

Ninguno de los libros de texto abre espacios para que los estudiantes expresen sus ideas o concepciones sobre conceptos, métodos o aplicaciones de éstos en la vida cotidiana.

En este sentido, **no podemos hablar de que los libros de texto se orienten a desarrollar la crítica**, en el sentido en que la definimos en Serrano (2005a). La crítica y el contexto histórico, social, económico y cultural tienen estrechas relaciones. Los libros de texto de la selección se centran en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, en la comprensión de los conceptos de región poligonal, área y perímetro, en el cálculo del área de figuras regulares, y en la solución de problemas en los que los estudiantes deben buscar un método adecuado para obtener el área de una región dada (con base en las fórmulas conocidas para el área de regiones triangulares, rectangulares, circulares, etc.), así como en el desarrollo de algunos de los procesos del pensamiento matemático (representación, análisis, deducción, entre otros).

Los problemas del entorno llevarían con facilidad a crear ambientes de discusión en el aula en los que se debatan ideas matemáticas o no.

Todos los libros de texto exponen ejercicios y problemas, **pero Barragán y Sarabia (s.f.) junto con Brett y Suárez (2002) se caracterizan por hacer cierto énfasis en los ejercicios.**

En Brett y Suárez (2002) cada ejemplo se organiza en DATOS, ECUACIÓN y SOLUCIÓN. Esquema que signa a muchos de los libros de texto de matemáticas en la

Escuela. Consideramos que dicho esquema se asocia a la visión algorítmica, es decir al hecho de:

(1) Enunciar todos los datos del problema.
(2) Aportar la ecuación (o fórmula) que resuelve el problema.
(3) Aplicar la fórmula (sustituir en ella algunos datos y obtener su solución "despejando" la variable[55]).

Los estudiantes pueden generalizar este esquema a todos los problemas. Así, cualquier tipo de problema:

(a) Tiene solución,
(b) Se relaciona con una única incógnita,
(c) Expone en su enunciado todos los datos,
(d) Tiene una ecuación o fórmula que lo resuelve.
(e) Su solución se obtiene "despejando" la variable.

La visión que describen los puntos (a), (b), (c), (d) y (e), deja por fuera una gran variedad de problemas de la matemática escolar si seguimos el enfoque sociocultural de la educación matemática [tal como Bishop (1999)], el crítico [ver, por ejemplo Mellin-Olsen (1987), Skovsmose (1999) y Mora (2005)], o incluso, desde otras concepciones de las matemáticas que la asocian al ámbito de los matemáticos de profesión.

Por otra parte, se dan distintas estructuras en los libros seleccionados:

- Actividad inicial (para presentar ideas sobre tamaño, línea poligonal cerrada, superficie y área de figuras rectangulares y triangulares), definiciones, ejemplos, actividades (González R., López M., Milá O., y Milá E.)
- Comentarios (sobre la agrimensura y la triangulación), definiciones, ejemplos, ejercicios y reseñas sobre la naturaleza y el número, y sobre la topología (Reyna R. y Flores E.)
- Comentarios (sobre expresiones comunes en geografía[56]), definiciones, ejemplos, ejercicios y un par de referencias desplegadas en cuadros para el

55 Cuando hacemos referencia al término "despejar" no nos referimos simplemente a evaluar o a calcular, aún cuando en el esquema descrito aplicar una fórmula implique solamente sustituir datos y calcular.
56 "Venezuela ocupa una superficie cuya área es 916 445 kilómetros cuadrados" y "la superficie del terreno es irregular y su área es de 350 metros cuadrados" (ob. cit., p. 205).

Papiro de Aahmus y las aplicaciones de los polígonos regulares a las artes y construcción (Barragán F. y Sarabia J.)

- Definiciones, comentarios, definiciones, ejemplos, actividades (Brett E. y Suárez W.)
- Definiciones, ejemplos, actividades (Ortiz L.)
- Lista de contenido, comentarios (sobre el arte del tapiz), preguntas, comentarios, definiciones, actividades y, recordatorios y preguntas desplegadas en cuadros (Suárez E. y Durán D.)
- Definiciones, problemas, recordatorios (que constan de comentarios, definiciones e ideas; ver la figura 2) (Rodríguez E.)

En general, los libros de texto buscan romper con la estructura exposición-ejemplos-ejercicios haciendo preguntas durante la exposición de ideas, comentando sobre la agrimensura, el arte o presentando ejemplos antes de exponer definiciones, desplegando cuadros con ideas o preguntas, y proponiendo construcciones, incluso, Rodríguez (s.f.); siendo un cuaderno de trabajo. Solamente una obra (el de Brett y Suárez, 2002) puede identificarse con la estructura exposición-ejemplos-ejercicios. En González y otros (s.f.) es notorio que casi todas las actividades propuestas a los estudiantes tienen que ver con el trabajo con el Tangram.

La estructura de un texto puede guardar relación con el papel de la educación que concibe el autor, por ejemplo, ciertas actividades junto con las concepciones de los estudiantes sirven a la conceptuación. Hay definiciones, como la de *área*, que se prestan a la discusión del grupo y a la construcción de ideas. En estos casos, una estructura lineal como la *centrada en la exposición del autor – ejercicios de los alumnos* limita el desarrollo de algunos procesos del pensamiento[57], así como la actividad práctica. Este punto se vincula con la influencia del movimiento de la *matemática moderna* en el currículo de Escuelas, Liceos y Universidades en un gran número de países, entre los que se encuentra Venezuela. Además del concepto de área, son muchas las ideas de la matemática escolar que fácilmente se abordarían desde estructuras "no lineales"; esto, de alguna manera, debería encontrar reflejo en los libros de texto.

En cuanto al lenguaje matemático utilizado, las siguientes observaciones se concentran en la idea de representación[58].

57 Tal es el caso de la imaginación, visualización, generalización, abstracción, entre otros.

58 Para un análisis profundo del lenguaje matemático en el contexto del aula, ver Beyer (1994).

Los textos Suárez y Durán (2002), Reyna y Flores (1999), Brett y Suárez (2002), Barragán y Sarabia (s.f.) y González y otros (s.f.) exponen fundamentalmente representaciones prototípicas (Beyer, 2006b). Esto es, por ejemplo: siempre disponen los triángulos con uno de sus lados paralelo a una horizontal imaginaria (la dada por la base del libro de texto). Ello es así para los triángulos, rectángulos, trapecios, rombos, pentágonos, hexágonos, etc.

Es en Ortiz (2003) y en Rodríguez (s.f.) que se dan algunas representaciones de triángulos, rectángulos y trapecios que no son prototípicas.

Pensar que las representaciones prototípicas no afectan la comprensión de los conceptos de cada una de estas figuras geométricas es en realidad un error. El estudiante, de esta forma, asocia el hecho de representar la figura con uno de sus lados paralelo a la horizontal que define la base del libro (o de la pizarra), como parte del concepto (ver Serrano, 2005e). Entonces, las representaciones de los objetos matemáticos no son neutrales para ciertos niveles de la educación y dependiendo del desarrollo del pensamiento matemático.

Esta observación puede hacerse también para el punto, la recta, el segmento, el rayo, el ángulo, etc.

Es recomendable que el profesor y los libros de texto expongan diversas y distintas representaciones de los objetos matemáticos; en nuestro caso, de los polígonos.

En cuanto al papel de la educación: hemos discutido algunas ideas relacionadas con las preguntas ¿se centra el libro de texto en los ejercicios?, ¿se orienta a la crítica o a abordar los problemas del entorno? y ¿buscan el desarrollo de la actividad práctica? Sin embargo, surgen otras nuevas: ¿cuándo puede decirse que un texto se asocia al dar/recibir información o a consolidar el status quo? ¿Cuándo podemos decir que un libro de texto se orienta a desarrollar la actividad y la crítica en función de la transformación del hombre y de la sociedad? En efecto no habrá respuestas únicas a ellas. De hecho, desde las diversas corrientes pedagógicas y filosóficas de la educación y de la educación matemática se dan respuestas distintas y contrapuestas. Somos del criterio de que la educación no es neutra políticamente. Suponer lo contrario violenta la naturaleza de la educación y la del mismo hombre[59]. Suponer lo contrario conlleva a trabajar exclusivamente con problemas que no se vinculan con el entorno y la realidad histórica y sociocultural, con la naturaleza crítica de la sociedad moderna, sus desigualdades e injusticias; a limitar la actividad de los estudiantes a una imagen de la actividad profesional en matemáticas; y a no reconocer el potencial papel de las matemáticas en la comprensión y transformación de la sociedad y del hombre en sí.

59 Ver los trabajos de Aristóteles.

La idea de las matemáticas escolares como ejemplo de la neutralidad política de la educación se corresponde con la tesis del dar/recibir[60] o con la consolidación del status quo[61]; así caracterizamos a los libros de texto estudiados –nos referimos a la sección "área". Claro, es justo observar que en todos los casos el interés se encuentra en el desarrollo de los procesos del pensamiento matemático, en la comprensión de conceptos y en la resolución de problemas. Pero, somos de la idea de que este interés debe ligarse al compromiso político de la educación.

Además, obras como las de Rodríguez (s.f.), González (s.f.) y Ortiz (2003) tienen una proporción "importante" de actividades matemáticas o protomatemáticas (en comparación con las proporciones del resto de los textos) y, sin embargo, se asocian con algunas de las características propias de las funciones mercantilista y hegemónica/tecnocrática del saber matemático. Somos partícipes de la idea de que las actividades matemáticas o protomatemáticas deben complementarse con una visión sociopolítica de la educación matemática.

A Manera de Conclusiones

En este apartado reunimos las conclusiones de esta primera parte del trabajo (las que organizamos en las secciones *Sobre el estudio teórico-reflexivo* y *Sobre el análisis de contenido*), así como las recomendaciones que hace el autor para emprender investigaciones similares y para la elaboración de libros de texto de matemáticas en la Escuela y Liceo.

También se hacen algunas observaciones sobre la forma en que se llevó a cabo esta parte de la investigación.

Sobre el Estudio Teórico-Reflexivo

(1) Casi todos los trabajos sobre libros de texto en el ámbito nacional son de naturaleza *histórica*. En el ámbito internacional podemos referir trabajos de naturaleza *histórica*, *epistemológica* y *didáctica*. No así de tipo *comparativo* o *estructural*.

(2) Además, los intereses de estudio de los libros de texto pueden ser: (a) Evolución histórica de un concepto o idea matemática, (b) Ideas y temas matemáticos tratados en los LT en un período, así como su relación con el contexto científico y sociocultural, (c) El texto, el lenguaje y el discurso, actividades propuestas, (d) Bases pedagógicas, didácticas y matemáticas que sustentan el LT, (e) Los LT y su relación con la cultura, con otras disciplinas y con el entorno, y (f) Los LT y su relación con las estructuras de control social y con el poder (económico…).

60 Ver los trabajos de Paulo Freire: 1969, 1970, 1974, 1975, 1978 y 1990.

61 Adorno (1998).

(3) El saber sabio como única referencia para la educación matemática en la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional, e incluso, en la Educación Universitaria, no permite abordar desde el contexto del aula el conocimiento que es propio a los diversos grupos culturales que conforman la sociedad venezolana, y a la sociedad en general. En este sentido, resulta importante hacer explícita nuestra concepción acerca de las matemáticas. De esta manera puede contrastarse con la idea de una visión sociocultural de las matemáticas y con una visión crítica de la educación matemática.

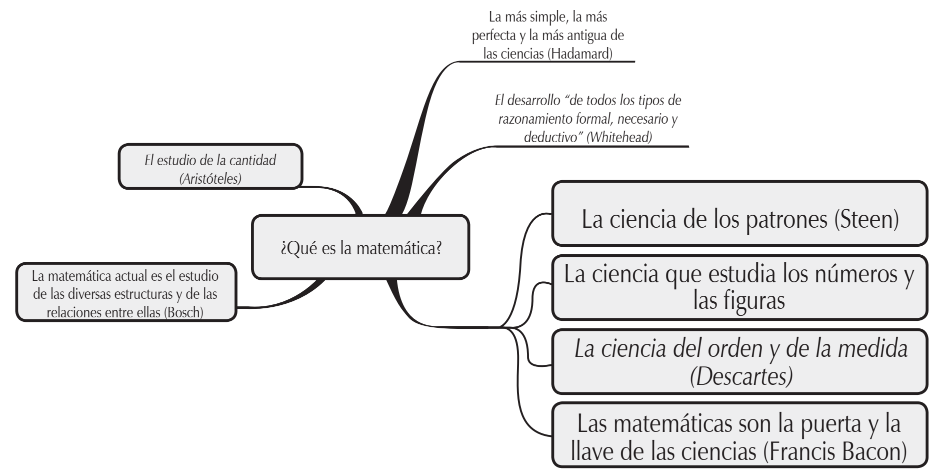


Figura 27. *Algunas concepciones sobre las matemáticas. Fuente: elaboración propia.*

(4) A la educación matemática pueden asociarse ciertas funciones del conocimiento o del saber: **mercantilista o bancaria**, **hegemónica-tecnocrática** y, **humanista**.

Además, podemos establecer algunas relaciones de los libros de texto de matemáticas con estas funciones considerando aspectos como (a) la estructura del texto, (b) la naturaleza de los ejemplos/problemas expuestos y abordados, así como de las actividades propuestas, (c) el lenguaje matemático utilizado y (d) el papel de la educación que sustenta el libro de texto.

Estas relaciones tienen sentido si consideramos, como creemos, que la educación no es políticamente neutra.

(5) El enfoque sociocultural de las matemáticas y la educación matemática crítica, pueden acercar nuestra práctica a la función humanista del

conocimiento. Aquí destacan las actividades contar, localizar, medir, jugar, diseñar y explicar como ejes curriculares.

Sobre el Análisis de Contenido

En cuanto a las ACTIVIDADES MATEMÁTICAS:

(6) En general las obras estudiadas tienen una presencia pobre de las categorías matemáticas. Se centran más en actividades que tienen que ver con la aplicación de ecuaciones (o fórmulas) para calcular el área de figuras poligonales –a partir de la resolución de problemas y ejercicios, con el desarrollo de procesos del pensamiento matemático, y con la comprensión de conceptos; sin embargo, algunas de éstas son muy ricas matemáticamente. *Jugar* y *diseñar* son las actividades matemáticas que menos se presentan en estas obras. Ésta última se da sólo en un libro de texto y en una sola actividad. La única actividad que se encuentra en toda la selección es *explicar*, aún cuando generalmente no tiene un peso importante en el libro.

(7) En todas las obras en las que se propone **contar,** esta actividad se dio de tres maneras: (1) disponiendo figuras geométricas en las que debían contarse unidades de medida de superficie señaladas con otros colores o sombreadas, (2) a través de problemas en los que se encomendaba contar, como por ejemplo: ¿cuántas baldosas de 1 dm^2 se necesitan para embaldosar un piso de 30 m^2 de superficie?; sin exponer un gráfico sobre ello, y (3) proponiendo problemas de conteo basados en la observación de una obra de arte.

(8) **Localizar** se da también, de varias formas: (1) exponiendo una figura para que el estudiante distinga o ubique en ella figuras geométricas, y (2) en otros casos, la actividad no incluye una imagen, gráfico o diagrama, e implica imaginar, observar y representar figuras geométricas. Sólo una actividad conlleva el empleo del mapa de Venezuela. En el resto de los casos, no se relacionan con usar e interpretar sistemas de referencia como el cartesiano, imágenes satelitales, GPS, etc.

(9) En cuanto a **medir,** observamos que no se propone estimar el área de **regiones no regulares** (ver la Figura 28). En todos los casos las regiones estudiadas son poligonales o la unión o intersección de éstas con sectores circulares. Consideramos que estos problemas son los que comúnmente se presentan en la cotidianidad.

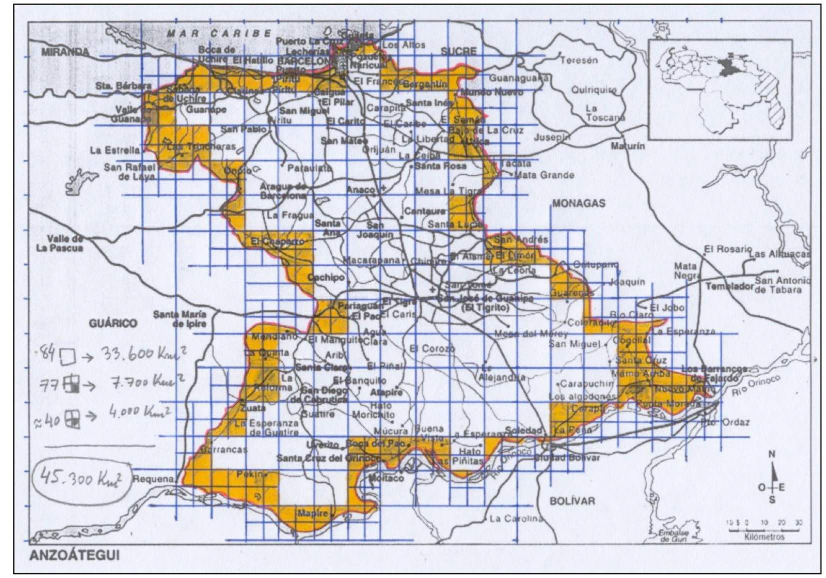


Figura 28. *Estimación del área de la superficie del Estado Anzoátegui. Este tipo de problemas no se presentó en la selección.*

(10) Sobre **jugar**: en varios libros de texto se hace mención del Geoplano, Tangram y Crucigrama. Con respecto al Tangram, se incluye un modelo para que los estudiantes lo reproduzcan y puedan realizar las siguientes actividades. En cambio, no se recomienda la construcción de un Geoplano ni la elaboración de sus propios crucigramas. Pero en general es escaso el número de actividades relacionadas con *jugar*.

(11) En la selección sólo se encuentra una actividad asociada a **diseñar**. Ella consiste en construir un Tangram en cartulina, siguiendo un modelo expuesto. Los autores aprovechan este recurso para jugar, calcular y comparar el perímetro de algunas figuras, así como para calcular su área.

(12) La proporción de actividades en las que el estudiante debe **explicar** (con respecto al número total de actividades propuestas) es baja en toda la selección, aún cuando es una actividad que debe signar las matemáticas escolares.

En cuanto a su RELACIÓN con algunas de las FUNCIONES DEL SABER:

(13) Observamos que: (a) ninguna de las obras se orienta a abordar problemas del entorno regional, nacional o mundial [ver la conclusión (6)], (b) ni abren espacios para que los estudiantes expresen sus ideas o concepciones sobre conceptos, métodos o aplicaciones de éstos en la vida cotidiana, (c) no

se orientan a desarrollar la crítica, (d) todos los libros de texto proponen ejercicios; aunque sólo uno se caracterizan por hacer cierto énfasis en éstos. También, una de las obras organiza cada ejemplo en: DATOS, ECUACIÓN y SOLUCIÓN. (e) Se dan distintas estructuras en los libros de texto, sin embargo, en general, buscan romper con la estructura exposición-ejemplos-ejercicios, y (f) las representaciones que hacen de los objetos matemáticos son fundamentalmente prototípicas (ver: Beyer, 2006b).

(14) Las matemáticas escolares pueden ser ejemplo de la supuesta neutralidad política de la educación, con ello se asocian a un papel de la educación que las identifica con el dar/recibir o con la consolidación del status quo. Así podemos caracterizar a la sección "área" en los libros de texto de la selección. Esto es, estas obras guardan relación con algunas de las características de las funciones *mercantilista* y *tecnocrática* del saber; no con las correspondientes a la función *humanista*. En este punto, consideramos importante que la educación matemática asuma un concepto de *alfabetización matemática* que haga explícito su potencial rol sociopolítico en la formación del hombre, y que se corresponda con el desarrollo de competencias no solamente matemáticas, sino también sociales, metamatemáticas y axiológicas (Serrano, 2005a).

(15) Hay obras que tienen una proporción "importante" de actividades matemáticas o protomatemáticas (en comparación con las proporciones del resto de los libros de texto), y sin embargo, éstos se asocian con algunas de las características propias de las funciones mercantilista y hegemónica/tecnocrática del saber matemático. Somos participes de la idea que en la matemática escolar, las actividades matemáticas o protomatemáticas deben complementarse con una visión sociopolítica de la educación matemática.

Construyendo Recomendaciones

(a) Esta investigación bien pudiera extender sus unidades de análisis a una selección de libros de texto y cuadernos de trabajo de matemáticas en varios de los años del Liceo venezolano, así como de la Escuela. Y por otra parte, ampliar las secciones a estudiar, más allá de la de *área*. También pudiera complementarse con el estudio del uso de los libros de texto en el aula.

(b) Recomendamos, además, promover estudios *comparativos* y *estructurales* en algunos libros de texto de la Universidad. En algunos países se pueden

referir ejemplos de algunos libros de texto que se vinculan estrechamente con el rol social y político de la educación, fundándose en abordar problemas de su contexto social, cultural, histórico y económico. Los estudios comparativos pueden hacerse entre regiones de un mismo país, entre países o, incluso, entre algunos de los que representan a las diversas corrientes de la Educación Matemática: Didáctica Fundamental, Etnomatemática, Educación Matemática Crítica, etc.

(c) Más allá del análisis de las prácticas o actividades matemáticas en un texto, sería interesante considerar el papel que juega la *tecnología* en los libros de texto: ¿cómo se la concibe?, ¿qué relaciones se establecen con la enseñanza/aprendizaje?, ¿y con las ideas matemáticas?, etc.

(d) Los estudios sobre libros de texto desde un enfoque sociocultural de las matemáticas quizás deban formar parte de estudios más amplios en un grupo en particular, de tipo etnográfico, para así indagar sobre la presencia de las categorías de Bishop (1999) y la manera en que éstas se dan. Por ejemplo, en nuestras etnias, poblaciones rurales, en ciudades como Caracas, entre otras.

(e) Por último, consideramos importante que en la elaboración de libros de texto deben desempeñar un rol primario los programas de postgrado en educación matemática: conformando y fortaleciendo líneas de investigación al respecto y contribuyendo al trabajo colectivo en esta área. En particular, la *Universidad Pedagógica Experimental Libertador* puede apoyar estas líneas y la publicación de sus resultados y proyectos –ya existen algunas experiencias al respecto. Creemos que el enfoque sociocultural y crítico de las matemáticas tiene importantes aportes teóricos en este sentido. En esto deben participar activamente los profesores y profesoras de las Escuelas y Liceos.

V

EDUCACIÓN MATEMÁTICA, DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO, Y LIBROS DE TEXTO

El Pensamiento

Una de las cuestiones básicas para abordar el estudio de las relaciones entre los libros de texto de matemáticas en la Escuela y en Liceo, como los elementos del currículo que mayor influencia tienen en el proceso enseñanza/aprendizaje en sí, es la *transición* del *pensamiento matemático elemental* al *avanzado*, y en especial la pregunta **¿qué es el pensamiento?** Su naturaleza, aunque distinta a la del pensamiento matemático, puede aportar algunos elementos importantes a la interpretación de este último en alumnos (y profesores) en el contexto escolar; en particular, por las relaciones que existen entre el pensamiento (matemático), el lenguaje y el contexto sociocultural. Por ejemplo, para Aristóteles el pensamiento es una parte superior del alma, que aprende lo inteligible de lo que es sensible. Es una actividad propia del entendimiento. Esto es, existe algo más allá de las sensaciones, lo inteligible; y el pensamiento adquiere conciencia sobre éstas. Aristóteles extrae de la realidad lo que es sensible; pero no sostiene la dualidad entre el mundo sensible y el mundo inteligible, sino que se esfuerza por introducir en el mundo sensible la inteligibilidad, por acercar estos mundos. Lo sensible al estudiar matemáticas (tanto en la Educación Básica, Media, Diversificada y Profesional como en la Universidad), envuelve la simbología, representaciones gráficas, y puede envolver también la sintaxis, las formas de verificación, argumentación y demostración, así como las actividades matemáticas que desarrolla el grupo, incluyendo la propia actividad. En cambio, lo inteligible envuelve lo que es entendido, lo que se comprende. Por ejemplo, un alumno puede resolver ecuaciones de primer grado como sigue:

$$
\begin{aligned}
&2x - 1 = 17\\
&2x = 17 + 1\\
&2x = 18\\
&x = \frac{18}{2}\\
&x = 9
\end{aligned}
$$

Y manejar la idea de que " -1 pasa sumando (porque está restando)" y "2 pasa dividiendo (porque está multiplicando)", como comúnmente pasa en la escuela secundaria; pero, puede no comprender los argumentos para sus ideas: "sumar 1 a cada miembro de la igualdad" y "dividir por 2 cada miembro de la igualdad", respectivamente. En este caso, el alumno maneja la simbología, sintaxis y posiblemente la idea de "resolver una ecuación"; sin embargo, los argumentos descritos antes no son inteligibles para él. En este punto debe hacerse una observación. Los argumentos matemáticos "sumar 1 a cada miembro de la igualdad" y "dividir por 2 cada miembro de la igualdad" estan ausentes en el alumno, no le son inteligibles; pero, su resolución ha sido aprendida por la actividad realizada en el grupo (por ejemplo, en el aula), en especial por su profesor. Si el profesor o el autor de libros de texto no utiliza estos argumentos, sino que emplea las reglas "como el 1 tiene signo negativo, entonces pasa con signo positivo al otro lado de la igualdad", etc., el alumno al que se hizo referencia ha aprendido a usar ese sistema de reglas (matemáticas y no matemáticas). Con esto queremos mostrar que **en un grupo (como el del aula de matemáticas) se da una complejidad de datos sensibles matemáticos y no matemáticos, así como de procesos de entendimiento (lo inteligible) en el seno de la matemática y también fuera de la matemática**. Ambos, lo sensible y lo inteligible, matemático y no matemático, influyen en cada miembro del grupo, en su pensamiento y conducta. Esta complejidad es importante para la Educación Matemática.

En cambio, Descartes identificó al hombre con el pensamiento; pensar es algo que *nos* define, es propio de nuestra naturaleza: "¿Qué soy entonces? Una cosa que piensa. Y **¿qué es una cosa que piensa? Es una cosa que duda, que entiende, que afirma, que niega, que quiere, que no quiere, que imagina también, y que siente** (negrillas añadidas)" (1977, p. 26). Pero, ¿qué involucra el pensamiento? Para Benejam (1998, p. 209) el pensamiento "en un sentido laxo, **podría incluir todo tipo de estados mentales** (negrillas añadidas)". No obstante, la idea de estados mentales aún resulta amplia y poco precisa. Wittgenstein (1998) también se refiere a estos estados:

> A primera vista parece que lo que da al pensamiento su carácter peculiar es el de ser una sucesión de estados mentales, y parece que lo que es extraño y difícil de comprender sobre el pensamiento son los procesos que suceden en el medio de la mente, procesos posibles únicamente en este medio (p. 32).

Wittgenstein pone su atención en los procesos; entre los que pueden citarse, por ejemplo, la comprensión y la significación, los cuales son centrales en sus *Cuadernos azul y marrón* y en *Investigaciones filosóficas*. Más adelante, se verá que Tall (1991) y los teóricos del programa de investigación denominado *pensamiento matemático avanzado* describen el pensamiento matemático a través de ciertos procesos. Surgen, entonces, preguntas muy interesantes y difíciles de estudiar al considerar la manera en que toma lugar o se desarrolla el pensamiento, entre ellas: ¿Es el pensamiento la base del lenguaje?, ¿es el lenguaje la base del pensamiento, lo determina?, ¿puede darse un pensamiento sin palabras?, ¿cómo es la relación pensamiento-lenguaje-realidad?

Acero (1998, p. 11) expone un diagrama que llama "generalización" del conocido triángulo semiótico o básico de Ogden y Richards (1946), en el que se distinguen tres componentes del significado: referente, símbolo y pensamiento, con la intención de presentar las principales concepciones filosóficas sobre el lenguaje. En este diagrama sustituye símbolo por lenguaje y referente por realidad. En el triángulo básico de Ogden y Richards (1946) el pensamiento es un componente del significado, tesis que ilustra, al igual que en las concepciones pragmáticas u operacionales del significado que se desarrollaron posteriormente, las complejas relaciones del pensamiento y sus procesos y de éstos, con la realidad.

Por otra parte, ¿qué papel juega el lenguaje en el pensamiento? Al respecto se han desarrollado muchas posiciones teóricas y filosóficas. Por ejemplo, para Humboldt (1990, p. 54) "el lenguaje es el órgano formador del pensamiento". En esta concepción, no puede darse un pensamiento sin el lenguaje. El lenguaje constituye el código con el que se forman y expresan los pensamientos acerca de la realidad. En cambio, el Wittgenstein del *Tractatus logico-philosophicus* entiende al lenguaje y al pensamiento como entidades distintas; Wittgenstein (2003) asegura que el lenguaje es un disfraz para el pensamiento (p. 124). Aquí, el lenguaje no actúa como órgano formador, sólo permite, de cierta manera, su manifestación a otras personas; consiste en un vehículo para expresar el pensamiento. Además, la idea del pensamiento como proposiciones con sentido (verdaderas o falsas) (Wittgenstein, 2003) difiere de la posición de este mismo filósofo en los *Cuadernos azul y marrón* (Wittgenstein, 1998), en la que el pensamiento es una sucesión de estados mentales, caracterizado por procesos.

Aristóteles concibe al lenguaje idéntico al pensamiento; Piaget plantea la dependencia del lenguaje con respecto al pensamiento; Sapir y Whorf, la dependencia contraria (del pensamiento con respecto al lenguaje), Whorf (1971); y Vigotsky (1998) la interdependencia parcial. Mayor (1985), al estudiar las relaciones entre el pensamiento y el lenguaje, representa cinco alternativas teóricas a través de diagramas de Venn-Euler (ver tabla siguiente). Estas alternativas contemplan entender al lenguaje y al pensamiento como:

(a) idénticos,

(b) distintos y excluyentes,

(c) con base en la incidencia del pensamiento sobre el lenguaje,

(d) la incidencia del lenguaje en el pensamiento y

(e) la interdependencia parcial. Además, indica algunos autores que han defendido estas posiciones.

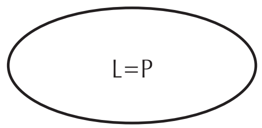
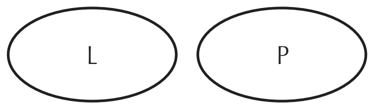
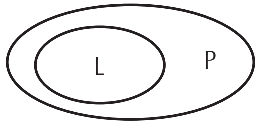
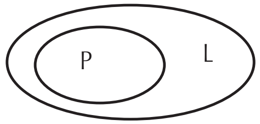
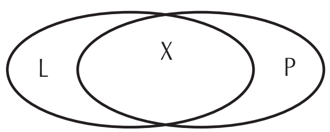
Representación de la posición teórica	Relación entre L y P [Autores, de acuerdo a Mayor, 1985]
	**Son idénticos o paralelos**. [Aristóteles]
	**Son distintos y excluyentes**. [Wittgenstein]
	**L depende de P**. [Piaget]
	**P depende de L**. [Sapir, Whorf]
	Algunos elementos de L son específicos y otro tanto ocurre con algunos elementos del pensamiento, pero muchos son comunes y dependen entre sí. [Vigotsky]

Figura 29. *Posibles Relaciones entre L y P (Mayor, 1985, p. 534). [L=Lenguaje y P=Pensamiento].*

Nota: Wittgenstein no se circunscribe solamente a la posición teórica que señala Mayor (1985); algunos de sus trabajos se circunscriben a otras posiciones. En su *Cuaderno azul*, Wittgenstein (1998, p. 29) dice que "parece que hay *ciertos* procesos mentales *definidos*, vinculados con la actuación del lenguaje, procesos únicamente a través de los cuales puede funcionar el lenguaje. Quiero decir los procesos de comprensión y significación", idea que se relaciona con la dependencia entre el pensamiento y el lenguaje. De modo tal que parece importante la distinción entre el *primer* y el *segundo* Wittgenstein.

(1) La postura teórica que *seguiremos* en este trabajo es la referida a la interdependencia parcial entre el lenguaje y el pensamiento. Esta postura se apoya en que el lenguaje posee algunos elementos que le son específicos (fonológicos, sintácticos y pragmáticos), al igual que el pensamiento, en el cual pueden darse sensaciones no basadas en el lenguaje o expresadas a través de éste, estados mentales relacionados con la creatividad, o incluso, en algunas actividades o tareas (como podría ser al manejar una máquina). El lenguaje en estas posturas teóricas es el materno o natural, ¿qué con respecto al lenguaje matemático? La siguiente hipótesis, denominada *hipótesis sobre la interdependencia entre el lenguaje matemático y el pensamiento*, se refiere a la relación entre el lenguaje matemático y el pensamiento (matemático). Ésta se ubica en la quinta posición teórica a que refiere Mayor (1985).

La lengua y el habla matemática (de un hablante) tienen cierta influencia en la forma en que se conceptúa e interpreta la realidad, y recíprocamente (Serrano, 2004, p. 74).

(2) Como se ve, el triángulo (o la generalización del triángulo de Ogden y Richards) es bastante general. El lenguaje, el pensamiento y la realidad, junto con sus relaciones, poseen una naturaleza distinta en los diversos posicionamientos teóricos que resume Mayor (1985). El mismo Acero (ob. cit., p. 22) dice que "la generalización del", el triángulo "resulta ahora excesivamente esquemático para reflejar con fidelidad las relaciones del lenguaje con el pensamiento y el mundo extramental".

(3) Otra de las ideas que se seguirá en este trabajo es que la realidad, o el contexto, afecta a la relación lenguaje(matemático)-pensamiento(matemático). En particular, seguimos la visión pragmática del significado desarrollada por Wittgenstein (1963, 1998). En el contexto del aula de matemáticas la realidad, o más precisamente: el papel que se otorgue a la realidad en el proceso enseñanza/aprendizaje de la matemática, tiene importantes implicaciones en la construcción, comprensión, uso y aplicaciones de las ideas matemáticas. El tipo de realidad a la que se haga referencia puede conllevar formas distintas de pensamiento matemático, caracterizadas por corresponder a la actividad "intramatemática" o bien a la realidad sociocultural y política del contexto. Esta tesis es de relevancia para el enfoque y naturaleza de los libros de texto de matemáticas para la Escuela y el Liceo.

El Pensamiento Matemático

Una definición que parece natural para el *pensamiento matemático* es la de ser una **sucesión de estados mentales y procesos referidos a la matemática**. Sin embargo, en Educación Matemática existen también diversas posturas sobre lo que es el pensamiento matemático, incluso, dentro del programa de investigación denominado pensamiento matemático avanzado. Cantoral (2000) asocia este tipo de pensamiento a los matemáticos *de profesión*: el pensamiento matemático "[se refiere] a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas" (p. 18). No obstante, al describir el proceso de desarrollo del pensamiento matemático considera tres formas en que éste puede verse: (a) como una reflexión espontánea que realizan los matemáticos, (b) como parte de un ambiente científico (de los matemáticos) y (c) que su desarrollo se da en **todos los seres humanos** en el enfrentamiento cotidiano con múltiples tareas (p. 19). El punto (c) es central en el Enfoque Sociocultural (Bishop, 1999) y crítico de la Educación Matemática (Skovsmose, 1999; Mellin-Olsen, 1987; Mora, 2001, 2004, 2005; Serres y Serrano, 2004; Serrano; 2005b, 2005a).

Cantoral (2000) concuerda, en parte, con la definición "natural" de pensamiento matemático. Pero, nuestro interés aquí no es el de caracterizar el tipo de pensamiento que les es propio a los matemáticos profesionales, sino el pensamiento matemático de alumnos que no necesariamente estudian o estudiarán matemáticas como carrera en la universidad. Aún cuando las características del pensamiento matemático de los profesionales en esta ciencia puedan iluminar la descripción del pensamiento matemático de quienes no lo son. Cantoral también se acerca a la descripción del pensamiento matemático en función de la temática y de ciertos procesos, tal como se hizo en la definición natural: "[éste] incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otros procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis" (ob. cit., p. 20).

Tall (1991) y Dreyfus (1991) caracterizan el pensamiento matemático a través de una complejidad de procesos, entre los que destacan la clasificación, deducción, intuición, reflexión, síntesis, representación, abstracción, visualización, traducción, verificación, generalización y demostración. Un problema aquí es el siguiente: si se considera que el pensamiento matemático se desarrolla en cualquier estudiante al interactuar con su grupo, usando el lenguaje y enfrentando diversas tareas matemáticas, idea con la que concuerda el autor, **¿qué aspectos podrían caracterizar una forma de pensamiento matemático avanzado o elemental?** Cuestión que se estudia en la sección que sigue.

Pensamiento Matemático Elemental y Avanzado

Distinguir entre pensamiento matemático elemental (PME) y avanzado (PMA) no es una tarea sencilla. La distinción no se encuentra solamente en el hecho de que la matemática a estudiar sea "elemental" o "avanzada", ya que muchos tópicos matemáticos pueden ser estudiados con diversos niveles de complejidad y con la participación de determinados procesos de pensamiento. Por ejemplo, la idea de que "por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a ésta" puede ser estudiada desde un punto de vista empírico y asumida como postulado (tal como se hace en la Geometría Euclídea). En cambio, la tarea de probar esto, con apoyo en el álgebra lineal, involucra otros procesos en el alumno.

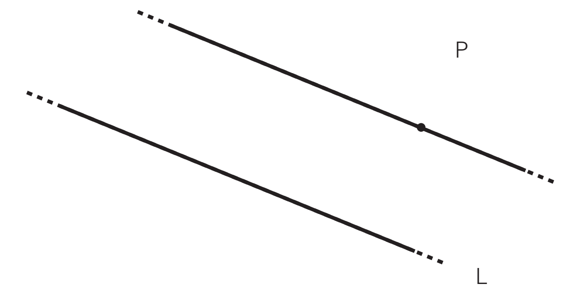


Figura 30. *Representación (en la Geometría Euclídea) de una recta (L´) que pasa por el punto P y es paralela a una recta dada (L).*

Sin embargo, Tall (1988) afirma que algunas nociones están envueltas en el hecho de alcanzar el pensamiento matemático avanzado, entre ellas, cita a la de "límite", "procesos infinitos" e "infinito". Para Tall (1991, p. 3) el **pensamiento matemático avanzado** incluye la posibilidad de definir formalmente objetos matemáticos y de hacer deducciones. Dreyfus (1991) explica que la reflexión sobre la propia actividad matemática, la abstracción y la representación son procesos claves para distinguir al pensamiento matemático avanzado. Por ejemplo, la abstracción se da tanto en el PME como en el PMA pero de formas distintas. En el PME la abstracción se hace con base en objetos concretos, en objetos del mundo físico, pero en el PMA se pueden hacer abstracciones a partir de definiciones, relaciones u objetos matemáticos. La representación incluye tanto la simbología asociada a objetos y relaciones matemáticas como los procesos, conceptos e imágenes mentales que alguien asocia a un cierto objeto o relación matemática. En el PME las representaciones son menos ricas (matemáticamente) que en el PMA, además, el PMA permite cambiar (conscientemente) de representaciones, por ejemplo, como una herramienta para la resolución de problemas. No obstante, aclara que "no hay ninguna distinción notable entre muchos de los procesos de pensamiento matemático elemental y avanzado" (Dreyfus, ob. cit., p. 26). Su diferencia parece estar en la complejidad de la estructura de procesos y en cómo se usa ante ciertas actividades matemáticas; es en este sentido que Dreyfus (ob. cit., p. 29) define al pensamiento matemático avanzado: "es un proceso extremadamente complejo en el cual un largo número de procesos componentes interactúan por caminos intrincados".

Su definición "[el PMA] consiste en una larga serie de procesos componentes en interacción" (Dreyfus, ob. cit., p. 30) parece muy amplia y podría, por tanto, abarcar al PME. Por ejemplo, un alumno de la tercera etapa de la Educación Básica (primeros años del Bachillerato) podría, al intentar resolver un problema relacionado con el *mínimo común múltiplo*, valerse de procesos de clasificación, representación, verificación, e incluso, argumentación, y no solamente aplicar el algoritmo correspondiente; o por otro lado, un alumno (o profesor) puede comprender muy bien el planteamiento del *Último Teorema de Fermat* y a la vez no comprender su demostración. Como se vio antes, la diferencia entre PME y PMA no se encuentra exclusivamente en el tipo de procesos que se usen, está más bien en la complejidad de la estructura de procesos y en su uso.

La propia actividad matemática, la abstracción y la generalización son importantes para caracterizar al PMA, así como también la complejidad del mismo pensamiento matemático y la forma en que se usa.

¿Qué resta entonces al pensamiento matemático elemental? Esta pregunta es importante, ya que de alguna manera amplía la descripción del PMA. En el PME se espera que muchos de los procesos, en especial los que son claves para distinguir el PMA, se encuentren en formación. El PME se debe orientar a reflexionar sobre los objetos y fenómenos del mundo físico y no solamente sobre objetos abstractos (tal como se hace en el PMA), lo que puede entenderse como una ampliación de la *realidad intramatemática* en la que común y tradicionalmente se ha inscrito la educación matemática en nuestros países. El uso del lenguaje matemático (en el PME) se encuentra en una etapa en la que se comienzan a manejar elementos sintácticos, semánticos, pragmáticos y de representación (simbólica, tabular o gráfica, entre otras); proceso que enriquece las relaciones pensamiento-realidad y lenguaje-pensamiento (considerando la *hipótesis sobre la interdependencia entre el lenguaje matemático y el pensamiento*). Por ejemplo: si un alumno y su grupo, al resolver una ecuación como 2x-1=17, utilizan un lenguaje caracterizado por expresiones como "el –1 pasa sumando; luego, el 2 pasa dividiendo" y argumenta, respondiendo al por qué: "porque el 1 está restando y el 2 está multiplicando", entonces este uso del lenguaje influye en el pensamiento matemático de los alumnos. En especial, en la forma en que conceptúa la resolución de una ecuación lineal y la misma idea de argumento matemático. Luego, ante un nuevo ejercicio, el alumno se apoya en sus conceptos para resolver la ecuación dada, para expresar sus argumentos, etc.; es decir, sus conceptos influyen en el lenguaje que utiliza. Es en este sentido que se entiende la interdependencia entre el lenguaje matemático y el pensamiento matemático. Algo similar sucede en el caso de la proposición: "por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a ésta". Es posible usarla en *nuestro* lenguaje como un postulado o como un teorema. Usos que afectan el pensamiento matemático y recíprocamente.

Transición del PME al PMA

¿Cuál es el salto del PME al PMA? ¿Existe una frontera bien definida entre estos tipos de pensamiento? Si esta frontera existe ¿hay algún patrón que permita definir este cambio del PME al PMA en las personas? Una primera idea que puede surgir es

que en este cambio influye el pasar del estudio de la matemática preuniversitaria a la matemática que es propia a la universidad, por ejemplo, en la licenciatura en matemáticas, en el profesorado en matemáticas o en otra carrera en la que se estudien temas avanzados. Pero ya se vio que la matemática *elemental* y la *avanzada* no permiten definir completamente al PME y al PMA, respectivamente. ¿Cuál es entonces ese salto? ¿Cómo caracterizar a la transición?

La visión de la transición del PME al PMA ha cambiado un poco en el seno de las teorías psicológicas sobre la educación matemática. Actualmente no se fijan etapas determinadas por edades para indicar la transición; visión que se debía a la influencia de la *Teoría de las etapas (o estadios)* de Piaget (1963) en el estudio del pensamiento matemático. Tampoco se enfatiza ahora en la incidencia de algunos temas o conceptos matemáticos específicos en la transición; por ejemplo, Tall (1988) consideró que los conceptos de *proceso infinito*, la noción de *límite* o la de *infinito*, están envueltos en la transición del PME al PMA. Aunque la idea anterior estuvo relacionada con una concepción del PMA que evolucionó desde ese entonces. Si bien estos conceptos (límite, proceso infinito, infinito, etc.) poseen un potencial enorme en el desarrollo del pensamiento matemático, e incluso, son característicos del PMA, ¿qué con respecto a otros conceptos *avanzados* de la matemática?, como la idea de espacio afín, grupo, anillo, espacio vectorial, ecuación diferencial, entre otras.

La transición parece definirse mejor considerando los procesos que caracterizan tanto al PME como al PMA, incluyendo a la actividad matemática del alumno. Robert y Schwarzenberger (1991, pp. 132-133) definen la transición así:

> **Los siguientes cambios cuantitativos**: más conceptos, menos tiempo, necesidad de mayor poder de reflexión, mayor abstracción, pocos problemas significativos, más énfasis en las demostraciones, mayor necesidad de aprendizaje versátil, mayor necesidad de control personal sobre el aprendizaje, y la necesidad de pensamiento abstracto y deductivo; **tomados juntos, derivan en un cambio cualitativo que caracteriza la transición al pensamiento matemático avanzado** [negrillas añadidas].

Esta definición es compartida por el autor. En ella no se indica una etapa (en términos de edades) en la que todos o la mayoría de los alumnos tengan un PME y desde la cual se pase a un PMA; tampoco se indica una frontera que represente un cambio inmediato al PMA. **La frontera entre el PME y el PMA es más bien un período que es propio a cada alumno**. Puede ser dilatado en algunos, breve en otros, o bien, ser el límite al que se llevó el desarrollo del pensamiento matemático. Los cambios cuantitativos son también propios a cada alumno, no existe un orden preestablecido para ellos; además, pueden darse otros cambios no listados por Robert y Schwarzenberger, entre los que pueden estar: la **necesidad de comunicarse matemáticamente**, la **reflexión sobre la certeza en la matemática**, el **interés por la investigación de otros conceptos matemáticos** y, el **uso de la matemática para comprender la realidad, y junto a ella sus desigualdades**. Este último punto se relaciona con una educación matemática que hace explícito su rol sociopolítico en la sociedad, rompiendo así la visión ingenua que la identifica con una especie de neutralidad política. Además, en esta relación con la realidad cobra relevancia la hipótesis sobre la interdependencia entre el lenguaje matemático y el pensamiento (Serrano, 2004) y la visión pragmática que seguimos del significado.

Tall (1997) define la transición en otro sentido. Señala que existen algunos puntos en el currículo que pueden llevar a formas más avanzadas de pensamiento matemático, entre las que se encuentran (p. 9) aquellos temas que envuelven (potencialmente) procesos infinitos (como la noción de límite) y el uso de definiciones como axiomas para construir teorías matemáticas. Tall afirma que “este cambio [hacia formas más avanzadas de pensamiento matemático] a menudo coincide con el paso de la escuela a la universidad” (ob. cit., p. 10). Con ello, Tall (1997) mantiene la postura sobre la transición que tuvo en su trabajo de 1988. Y difiere, en parte, de la que aportan Robert y Schwarzenberger (1991). Aún cuando la matemática que se estudia en la universidad (al menos en la licenciatura o profesorado en matemáticas y en otras carreras en las que la matemática es uno de los ejes centrales) ofrece la posibilidad de desarrollar el pensamiento matemático y en consecuencia alcanzar la transición y, posteriormente, el PMA, ello no consiste en un patrón para todos los estudiantes, ni representa el cambio del PME al PMA. Esto puede alcanzarse en momentos y formas muy distintas por los miembros de un mismo grupo. En encontramos entonces, la ventaja que vemos en la definición de transición de Robert y Schwarzenberger (1991), así como en la ampliación que aquí se hace de ella. Por otra parte, la idea de usar definiciones como axiomas para construir teorías parece restringirse a la actividad de (parte de) los matemáticos, y no a estudiantes de otras especialidades, como el ya citado profesorado en matemáticas, la biología, química, física, ingeniería, entre otras.

¿Qué Actividades Favorecen la Transición?

En esta sección se destacan algunas de las actividades en el contexto del aula de matemáticas que pueden favorecer alcanzar el período de transición.

El **debate** y la **discusión** en clase constituyen actividades que permiten el desarrollo de la lengua y el habla matemática de los alumnos, y paralelamente el pensamiento matemático (atendiendo a la hipótesis sobre la interdependencia entre el lenguaje y el pensamiento matemático). Con estas actividades se busca la exploración de concepciones espontáneas (o previas) que tienen los alumnos de los conceptos matemáticos, así como los errores o malentendidos que poseen y, en general, “acceder” a su pensamiento matemático. El debate y la discusión son una alternativa ante las clases basadas en el esquema exposición-ejercicios; esto es, modelos didácticos en los que el profesor provee y explica la teoría que será el marco para los problemas y ejercicios que enfrentarán los alumnos (expone definiciones, propiedades, reglas sintácticas y semánticas), aporta algunos ejemplos y, luego, delega problemas y ejercicios a los alumnos. Una de las críticas a este último método de enseñanza es que el contacto profesor-alumno es sólo ocasional y no permite espacios más amplios en los que los alumnos verbalicen sus pensamientos. Por otra parte, se asocia a una educación matemática desvinculada de la realidad y del contexto sociocultural. También, puede llevar al alumno a entender la matemática como un cuerpo de conocimientos acabado en el que la técnica y los algoritmos son su esencia. No obstante, el debate y la discusión no son fáciles de manejar en la clase; son muchos los factores que lo pueden afectar negativamente, Orton (1996, pp. 172-174) cita algunos de ellos: los profesores no siempre consiguen una retroalimentación valiosa de sus alumnos, algunos alumnos no se sentirán seguros para intervenir y colaborar y, la cantidad de alumnos en el grupo. Factores que no deben ser entendidos como barreras, sino como situaciones que deben enfrentarse.

En el debate y la discusión, e incluso en otros métodos de enseñanza, debe ser importante, tal como se señaló antes, la **exploración de las concepciones espontáneas o previas** que tienen los alumnos de los conceptos matemáticos a estudiar. Idea que sigue Cornu (1991) para el estudio y adquisición de la noción de límite. Aún cuando el alumno haya estudiado el tema (o concepto) anteriormente, es posible encontrar en los estudiantes concepciones muy distintas. Por ejemplo, a un grupo de estudiantes de un curso de 7º grado de la UEN Liceo “Agustín Aveledo” (Ubicado en la Parroquia La Pastora, Caracas) se le planteó la cuestión: “¿qué significa que un número divide a otro número?” como introducción al tema de divisibilidad en los números enteros. Las respuestas aportadas fueron las siguientes (se copian textualmente):

(a) *La palabra división*

(b) *Cuando se divide el dinero o los bienes*

(c) *Que un número se está dividiendo*

(d) *Se pueden dividir números primos*

(e) *Repartir*

(f) *División de fracciones*

(g) *Dividir un cuerpo de otro*

(h) *División de un número natural, entero o decimal*

(i) *Hay que multiplicar primero*

(j) *División de un continente*

(k) *División socio-política (para la fecha de recolección de datos, en el curso de geografía se estaba estudiando el tema de división sociopolítica del territorio venezolano)*

(l) *Cuando se divide la comida*

Ello muestra lo amplio que puede ser la estructura conceptual del alumno, y al mismo tiempo, la importancia de explorar las concepciones espontáneas y previas de los estudiantes. Es de hacer notar que en la discusión que intentó generar el profesor del curso, un alumno respondió que "la respuesta más precisa es que dividir tiene que ver con repartir". Pero las imprecisiones y contradicciones que pueden ser parte de la estructura conceptual de un alumno se presentan también en la universidad. En una experiencia (Serrano, 2002) desarrollada con un grupo de estudiantes de un curso de cálculo (denominado *Cálculo Diferencial y Matemática Aplicada II*), se planteó a éstos dos preguntas como diagnóstico. La primera de ellas era "La función $g: R^+ \rightarrow R$ definida por $g(x) = x^2$, ¿es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Justifique su respuesta". Las siguientes son las respuestas aportadas por los estudiantes en cuanto al concepto de *inyectividad* de g:

(a) *Es inyectiva porque todos los valores del dominio tienen llegada*

(b) *Ya que todo el conjunto de partida tiene una imagen en el conjunto de llegada*

(c) *Porque x tiene un solo elemento en y*

(d) *Cada elemento del conjunto de partida le corresponde una y sólo una imagen en el conjunto de llegada*

(e) *Para cada valor de x existe un único valor de y ó g(x)*

(f) *Cada valor que tome el dominio tendrá una y única imagen en el rango*

(g) *Cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen en el conjunto de llegada*

Con esto queremos mostrar la importancia de la exploración de las concepciones espontáneas o previas de los alumnos, hecho que puede motivar la discusión y el debate

en el contexto del aula de matemáticas. Proceso en el que profesor y estudiantes pueden observar el papel de los cálculos, el de la verificación, las técnicas empleadas para la representación gráfica de g (ver por ejemplo la Figura 31), interpretación de información tabular y gráfica, la idea que manejan de dominio e imagen de g, así como del concepto de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función, entre muchos otros aspectos e ideas.

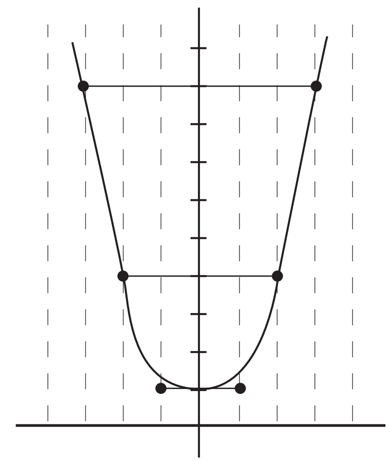


Figura 31. *Gráfico de g. Fuente: Serrano (2002).*

Para alcanzar la transición es también importante que en el estudio de un concepto o definición se aporten **ejemplos y no-ejemplos**, estos últimos constan de aquellos objetos que no verifican las propiedades dadas en el concepto o en la definición. Los no-ejemplos pueden ser tan importantes como los ejemplos para el desarrollo de la estructura conceptual y para el mismo pensamiento matemático. Los no-ejemplos son destacados por Eisenberg (1991) en su trabajo sobre las funciones y las dificultades de aprendizaje asociadas a este objeto. Eisenberg sostiene que dar ejemplos de objetos que no cumplan con una definición o "definir por negación" son prácticas en desuso en el aula.

En el caso de la experiencia descrita antes (Serrano, 2002) los estudiantes no representaron en cursos anteriores funciones cuyo dominio no fuese R, R^+, R^-, R^* o de la forma R-{a, b, ... , n}. Tampoco afrontaron la tarea de buscar ejemplos de relaciones que no fuesen funciones, o de funciones que fuesen inyectivas pero no sobreyectivas, sobreyectivas pero no inyectivas, o ni inyectivas ni sobreyectivas. Tareas que se asocian a los importantes procesos de representación y abstracción.

Un caso que parece común en la escuela venezolana consiste en que muchos alumnos de secundaria piensan que los triángulos siempre deben trazarse con uno de sus lados paralelo a una línea horizontal imaginaria. En un estudio con estudiantes de tres cursos de 7º grado (Serrano, 2005e) algunos de ellos manifestaron dudas sobre si el triángulo que se había encomendado construir (con regla y compás) "podía quedar" en una posición en la que uno de los lados del triángulo no coincidía con una *horizontal imaginaria*. Los alumnos preguntaron: "¿no importa que quede así?", "Quedó torcido profesor, ¿no importa?". Otros comenzaban trazando un lado del triángulo en *posición horizontal*. Esto puede guardar relación con la manera en que muchos profesores en los grados previos trazan los triángulos.

Otras de las actividades que favorecen alcanzar la transición son **la verificación, la argumentación y la explicación** como herramientas para convencerse a sí mismo, y a otros, de la validez de una proposición matemática o de que se ha logrado resolver un problema. Si la verificación, la argumentación y la explicación se trabajan con este enfoque dan paso con ello a entender la naturaleza de la demostración en matemáticas y no a concebirla como un problema o como un ejercicio difícil.

La certeza es también un concepto importante en el desarrollo del pensamiento matemático. La certeza de una proposición matemática (en un estudiante con PME) tiene que ver con (a) el sentido que tiene la misma proposición en la estructura lógica del área en estudio, así como con (b) la experiencia propia y de los demás miembros del grupo. Si la experiencia del alumno (o del grupo en general) se apoya en la verificación, argumentación y explicación, la certeza (para el alumno) tiene que ver con parte de la naturaleza de la actividad matemática. Si esta experiencia no se basa en ello, sino en asumir como ciertas las propiedades que se estudian y aplican o los resultados que exponen el profesor y el libro de texto, la certeza del alumno se apoya no más que en la confianza a su profesor, al libro de texto y a las técnicas que maneja. Un ejemplo muy común de esto último es el relacionado con la solución de ecuaciones lineales ya comentado en la sección "el pensamiento" de este trabajo, en particular criticamos el hecho de que se estudie con "argumentos" del tipo "pasa restando porque estaba sumando", "pasa multiplicando porque estaba dividiendo", entre otros. En cambio, la certeza en la etapa de transición y en el pensamiento matemático avanzado se asocia más bien a la verificación, a la argumentación y a la explicación.

La **actividad matemática orientada al estudio de la realidad**, del mundo, es también un factor importante para que se dé la transición. Si bien son necesarias las actividades intramatemáticas (como por ejemplo: conjeturar, demostrar, calcular, representar y modelar), sostenemos la necesidad de una educación en estrecha relación con el contexto social. Las crisis y conflictos que caracterizan a la sociedad moderna pueden estudiarse desde la educación matemática (Serrano, 2005a). La matemática escolar aporta herramientas poderosas para comprenderlas. Esto es, una educación matemática que

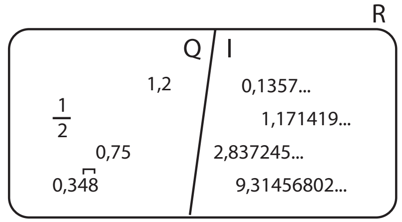
busque la formación del ser crítico, la acción y la transformación puede dar respuestas a la necesaria transformación del sistema educativo venezolano, e incluso, en el ámbito internacional. Una educación así puede responder al por qué de la educación y de la educación matemática en particular ante su sociedad. Una posición contraria estaría asociada a la consolidación del *status quo*, y con ello a sus desigualdades y a la opresión. Así, la realidad a la que hacemos referencia no es "no-real", la cual se evidencia en problemas que no obedecen al contexto o a la naturaleza crítica de la sociedad; nos referimos más bien a la realidad en sí. Temas como la energía, el consumo de alcohol, cigarrillos y otras drogas, la pobreza, el acceso a servicios públicos y las guerras, entre muchos otros, pueden servir de marco a una actividad matemática escolar en nuestros países.

La exploración de concepciones espontáneas o previas, en el debate, discusión, ejemplos y no-ejemplos, en actividades como la verificación, argumentación y explicación, y en la actividad matemática orientada al estudio de la realidad, son fuentes muy importantes para alcanzar la transición. Éstas son necesarias en los libros de texto.

Algunos Ejemplos Sobre las Actividades Presentes en Libros de Texto que Favorecen la Transición

En esta sección se exponen ejemplos de actividades propuestas en algunos libros de texto de matemáticas que pueden favorecer, o no, el paso del PME a la transición. Los textos seleccionados son González (1987), Reyna y Flores (1999) y Rodríguez (1997). Los dos primeros son de 7º grado y el último de 9º grado.

> *Sobre la exploración de concepciones del lector*. Una característica común en los tres textos es que no dedican espacios para que los lectores expresen sus concepciones sobre algunos conceptos o sobre el tema a tratar. Esta tarea es importante pues el lector (alumno) se encontraría con la posibilidad de, en primer lugar, manifestar su pensamiento (que es por sí solo algo provechoso para el proceso enseñanza/aprendizaje de la matemática), y luego, confrontarlo con las nuevas ideas que se construirán con apoyo del texto. Los temas son abordados partiendo de una introducción en la que se hacen recordatorios de conceptos o propiedades ya estudiadas (en el mismo texto o en grados anteriores). Por ejemplo, Rodríguez (1997, p. 19) inicia el tema de los números reales así: "recordemos que al conjunto Q pertenecen las expresiones decimales periódicas y al conjunto I las expresiones decimales no periódicas. Por lo tanto Q e I no tienen elementos comunes y por consiguiente su intersección es vacía". Y presenta el gráfico adjunto (Figura 32). [En título de esta sección del libro dice textualmente "Conjunto R de los números irracionales". *Creemos* que ello consiste en un error de edición pues la sección se dedica a estudiar los números reales y sus aproximaciones].



$Q \cap I = \varnothing$

$Q \cup I = R$

R = {Expresiones decimales periódicas y no periódicas}

R

Figura 32. *El conjunto R. Fuente: Rodríguez (1997).*

González (1987) es el texto más elaborado en cuanto a la presentación de los temas a estudiar. Por ejemplo, antes de definir el conjunto de los números enteros, recuerda al alumno (pp. 1-3) que en los grados anteriores ha estudiado el conjunto de los números naturales, recuerda también su notación, el uso de los puntos suspensivos en la expresión N = {0, 1, 2, 3, 4, ...}, entre otros aspectos. Introduce también, el problema de que la diferencia de números naturales no siempre es un número natural y la necesidad de definir un nuevo conjunto con este nuevo tipo de números (los negativos), e incluso da ejemplos de la cotidianidad que pueden ser expresados con los números negativos ("la temperatura más baja registrada en América del Sur es –33º C, 33 grados centígrados bajo cero", "Nuestra familia tiene una deuda, con el Supermercado, de Bs. 350", etc.). Reyna y Flores (1999) utilizan la idea de temperatura para introducir los números positivos y los negativos, aunque también dan algunos ejemplos sobre altitud, desplazamiento y deuda, para seguidamente definir Z.

Los ejemplos y no-ejemplos. En los tres textos los nuevos objetos son presentados fundamentalmente por definiciones, salvo algunos en los que se da una introducción al concepto. Además, en la exposición las definiciones son ejemplificadas. Por otra parte, las actividades para el alumno no se reservan, únicamente, para el final de cada capítulo, sino que se encuentran grupos de actividades al final de cada sección. En ninguno de los textos se delega al alumno para que exponga otros ejemplos, además de los que da el autor, como parte de la misma discusión teórica del libro. Actividades como ésta son delegadas en las secciones de ejercicios, pero no en la exposición teórica. Otro aspecto que no se encuentra en los textos en estudio, y que el autor considera importante, es que no presentan objetos que no cumplan con una definición como una herramienta para enriquecer el mismo concepto matemático (comparar objetos con base en las propiedades que cumplen, comprender la misma definición, etc.). Incluso, en el texto pueden exponerse algunos problemas "mal resueltos" y asignar al lector que descubra los errores que se cometieron y encontrar la solución. Esto último puede contribuir al desarrollo de la estructura conceptual del alumno. Por ejemplo, puede encomendarse encontrar el error en:

$$\sqrt[5]{8 \cdot a^6 \cdot b^9 \cdot j^5} = \sqrt[5]{8 \cdot a^5 \cdot a \cdot b^5 \cdot b^4 \cdot j^5}$$
$$= a^5 b^5 \, \sqrt[5]{8 \cdot a \cdot b^4 j^5}$$

Entre muchas otras tareas similares que se pueden presentar durante la exposición teórica, no sólo en los grupos de ejercicios.

Sobre la verificación, argumentación y explicación. El alumno debe, no sólo comprender las ideas matemáticas, sino tambien poder aplicarlas en ciertos contextos y resolver algunos problemas asociados, debe también ser capaz de verificar sus soluciones, argumentar matemáticamente los pasos que sigue y explicar su producción a otros. Parece muy común que los alumnos de bachillerato no argumenten ni expliquen su producción. Si esto es uno de los fundamentos para la clase, los libros de texto deben abrir espacios para hacer consciente al alumno de dichos procesos. Una forma de conseguirlo (en el texto) es planteando cuestiones para que el alumno exponga el argumento que se ha utilizado, o para verificar algún cálculo o construcción. El ejemplo adjunto (Figura 33) es de González (1987, p. 41). Más adelante González (p. 42) incluye otros casos en los que también deja al lector el "por qué" de la desigualdad que se expone. González (1987) también omite cálculos y enuncia ello al lector, dejándole la tarea de efectuarlos.

1.8.2 RELACION DE ORDEN EN Z

Si p y q son dos números enteros (p,q,€ Z), diremos que:

a. p < q , si p - q < 0
b. p > q , si p - q > 0

Ejemplos

1. 4 < 5 porque 4 - 5 = - 1 < 0 (observa que 5 - 4 = 1 > 0)
2. -3 < 2 porque -3 - 2 = - 5 < 0 (observa que 2 - (-3) = 2 + 3 = 5 > 0)
3. -2 < -1 porque - 2 - (- 1) = - 2 + 1 = - 1 < 0
4. - 27 < - 15 ¿por qué?

Figura 33. *Ejemplo de preguntas dejadas al lector sobre argumentos utilizados. Tomado de González (1987, p. 41).*

En Rodríguez (1997) no se presentan actividades de este tipo. Están presentes en Reyna y Flores (1999) pero con menor frecuencia que en González (1987). Por ejemplo, Reyna y Flores (1999, p. 89), al estudiar las propiedades de la adición de números racionales dejan al lector las siguientes tareas, aunque indican que deben hacerse en el cuaderno (ver Figura 34). La posición del autor aquí es que los textos deben tratar que procesos, como la argumentación, verificación y explicación, sean explícitos para el alumno; para ello el autor no sólo debe argumentar, verificar y explicar, sino, delegar ello al lector en el mismo marco teórico del texto, no solamente en las secciones de ejercicios y problemas.

- Así como $4 + (-3) = (-3) + 4$, también se cumple que:
  $$\frac{1}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right) + \boxed{?}$$
- Así como $(4 + 2) + (-7) = 4 + [2 + (-7)]$, también se cumple que:
  $$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{-1}{7}\right) = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \boxed{?}\right]$$
- Así como $4 + 0 = 4$, también se cumple que:
  $$\left(\frac{-1}{2}\right) + 0 = \boxed{?}$$
- Así como el simétrico u opuesto de -4 es 4, también se cumple que:
  el simétrico u opuesto de $\left(\frac{-1}{4}\right)$ es $\boxed{?}$

Figura 34. *Tareas dejadas a los lectores. Fuente: Reyna y Flores (1999).*

Por otra parte, en ninguno de los textos (González, 1987; Reyna y Flores, 1999; y Rodríguez, 1997) se asume a la realidad sociocultural y a sus fenómenos como fuente importante para la construcción y comprensión de ideas matemáticas, así como para la comprensión de la realidad en sí misma. Esta idea se asocia a un enfoque sociocultural y crítico de la educación matemática. Si bien en ellos se hace referencia a conceptos como la temperatura o el desplazamiento, esto no se corresponde con una educación matemática en la que la realidad juegue un papel central. Tal enfoque puede influir en el desarrollo de formas de pensamiento matemático que no están asociadas a la realidad.

A Manera de Conclusiones

Entender el pensamiento imbricado con el lenguaje, en particular, si se sigue la postura teórica sobre la interdependencia entre el lenguaje y pensamiento matemáticos [*hipótesis sobre la interdependencia entre el lenguaje matemático y el pensamiento* (Serrano, 2004)], puede llevar a estudiar con más detenimiento el papel que tiene el

lenguaje matemático en el desarrollo del pensamiento matemático. Papel que va más allá de ser un instrumento para la comunicación en un grupo, y de ser la fuente para la simbología y las representaciones gráficas o tabulares; es un medio importante en el que se evidencian concepciones, malentendidos, errores, y al mismo tiempo, un agente que estructura el pensamiento matemático. Estas tesis resultan centrales para el estudio, diseño y estructuración de libros de texto de matemáticas dirigidos a la Escuela y al Liceo.

Parece más preciso concebir la transición en términos del salto cualitativo a que refieren Robert y Schwarzenberger (1991), junto con la necesidad de comunicarse matemáticamente, la reflexión sobre la certeza en la matemática y el interés por la investigación de otros conceptos matemáticos. Con esto no se olvida la influencia que puede tener el paso de la escuela a la universidad y temas como el de "procesos infinitos" o el de "límite" para alcanzar el PMA (Tall, 1988, 1991, 1997); pero la definición del texto abre el abanico y la concibe como un período propio a cada estudiante y con características también particulares.

La transición definida así, permite indagar sobre las actividades en el aula o en libros de texto que la favorecen o no. Destacamos aquí: (a) la exploración de concepciones previas y espontáneas que poseen los alumnos de un objeto matemático o de un tema en general, (b) el debate y la discusión, (c) los no-ejemplos (de tanta importancia como los ejemplos para el desarrollo de la estructura conceptual del alumno), (d) la verificación, argumentación y explicación como procesos esenciales de la actividad matemática de los alumnos (o lectores) y (e) la actividad matemática orientada al estudio de la realidad. Este último punto se diferencia de las perspectivas en Educación Matemática en las que se asume el desarrollo del pensamiento matemático exclusivamente en el marco de la actividad intramatemática.

Por otra parte, en los tres textos estudiados en este capítulo se observó que en ninguno de ellos se abren espacios para que el lector manifieste sus concepciones, no se exponen no-ejemplos ni se estudia la realidad. Tampoco se asigna la tarea de descubrir errores o de exponer otros ejemplos. En dos de los textos sí se deja al lector, en algunos puntos del desarrollo teórico, la tarea de exponer los argumentos utilizados y la de verificar algunos cálculos omitidos en el texto. Finalmente, consideramos que las actividades (a), (b), (c), (d) y (e) pueden potenciarse tanto en el contexto del aula como en los libros de texto preuniversitarios.

REFERENCIAS

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (s.f.). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. 1-9.

Acero, J. (1998). *Filosofía del lenguaje I. Semántica*. Madrid: Trotta.

Adorno, T. (1998). *Educación para la emancipación.* Madrid: Morata.

Alson, P. (2001). *Números Naturales.* Caracas: Erro.

Ander-Egg, E. (1980). *Técnicas de investigación social.* Buenos Aires: El Cid Editor.

Azcárate, C. y Camacho M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.* 10(2): 135-149.

Barragán, F. y Sarabia, J. (s.f.). *Matemática 7.* Caracas: CO-BO.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En: R. Biehler; R. Scholz; R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*; pp. 133-146. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

Benejam, A. (1998). El lenguaje del pensamiento. En: Acero, J. (Ed.), *Filosofía del lenguaje I. Semántica* (pp. 207-231). Madrid: Trotta.

Beyer, W. (1994). *El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula.* Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas.

Beyer, W. (2002). *Equidad y educación matemática.* Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, Universidad Central de Venezuela. Caracas: Trabajo no publicado.

Beyer, W. (2004). Bossio, Chela, Duarte y Zavrotsky: Un lazo de oro para la matemática y la educación matemática en Venezuela. En: C. D. Mora (coord.), *Tópicos en educación matemática* (pp. 183-202). Caracas: GIDEM - Universidad Central de Venezuela.

Beyer, W. (2006a). Algunos libros de aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía*. 27(78): 71-110.

Beyer, W. (2006b). El laberinto del significado: La comunicación en el aula de matemáticas. En: D. Mora, W. Serrano (eds.), A. Rojas, A. Míguez, M. Martín y W. Beyer, *Lenguaje, comunicación y significado en educación matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre matemática lenguaje, pensamiento y realidad desde la perspectiva crítica.* Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

Bhaskar, R. (1975). *A realist theory of science.* [Documento en línea]. Disponible: http://www.raggedclaws.com/criticalrealism/archive/rts.html [Consulta: 2005, Junio 16]

Bhaskar, R. (2005). *Realismo crítico, relaciones sociales y defensa del socialismo* [Documento en línea]. Disponible: www.vientosur.info/articulosweb/textos /index.php?x=37 [Consulta: 2005, Junio 16]

Bichko, I. (1973). *Conocimiento y libertad.* Montevideo: Ediciones Pueblos Unidos.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Paidós. [Traducido por Genís Sánchez del original en inglés *Mathematical enculturation*, 1991, Kluwer Academic Publishers].

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks. An analysis of the levels of difficulty.* Tesis de Licenciatura. Lulea University of Technology - Departamento de Matemáticas.

Brett, E. y Suárez, W. (2002). *Matemática 7mo* (3ª ed.). Caracas: Marca.

Brito, O. (2002). *Los libros de matemáticas en la Venezuela del siglo XIX*. Trabajo de Grado de Licenciatura (no publicado), Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (I). *Enseñanza de las Ciencias*. 8(3): 259-267.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En: C. Parra (comp.) *et al.*, *Didáctica de la matemática*; pp. 65-94. Buenos Aires: Paidós.

Calvo, M., Busto, A. y Escribano, M. (s.f.). Libros de texto con más de medio siglo. [Documento en línea]. Disponible: http://www.uv.es/asepuma/XI/libros-XIAsepuma2003.PDF [Consulta: 2006, Agosto 21]

Cantoral, R. (Coord.) (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1): 27-40.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(1): 73-112.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed.). Buenos Aires: Aique.

Cobo Merino, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*. 22(1): 5-18.

Confrey, J. (1995a). A theory of intellectual development (I). *For the Learning of Mathematics*. 14(3).

Confrey, J. (1995b). A theory of intellectual development (II). *For the Learning of Mathematics*. 15(1).

Confrey, J. (1995c). A theory of intellectual development (III). *For the Learning of Mathematics*. 15(2).

Cornu, B. (1991). Limits. En: Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Holland: Kluwer Academic Publishers.

D´Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 5(1): 40-48.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro* (Informe a la UNESCO de la comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI). Madrid: Santillana.

Descartes, R. (1977). Meditaciones metafísicas con objeciones y respuestas. Meditación segunda. Madrid: Alfaguara.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En: Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Holland: Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En: D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 140-152). Holland: Kluwer Academic Publishers.

Feyerabend, P. (1989). *Contra el método*. Barcelona: Ariel.

Foucault, M. (2007). Cómo se ejerce el poder. [Documento en línea]. Disponible: http://www.geocities.com/diesonne_2k/arhivo/poder_MF.html [Consulta: 2007, Marzo 3]

Freire, P. (1969). *La educación como práctica de la libertad*. México: Siglo Veintiuno Editores.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. México: Siglo Veintiuno Editores.

Freire, P. (1974). *Educación para el cambio social*. Buenos Aires: Tierra Nueva.

Freire, P. (1975). *La desmitificación de la concientización*. Bogotá: América Latina.

Freire, P. (1978). *Educación liberadora* (4ª ed.). Madrid: Zero.

Freire, P. (1990). *La naturaleza política de la educación: Cultura, poder y liberación*. Madrid: Paidós.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 18/1(52): 7-33.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.

González, F. (1994). *Paradigmas en la enseñanza de la matemática*. Maracay: Copiher.

González, F. (2004). *Cómo desarrollar clases de matemática centrada en la resolución de problemas*. Mérida: Universidad de Los Andes.

González, J. (1987). *Matemáticas para 7º grado*. Caracas: McGraw-Hill.

González, M. (2006). Sistemas de representación en la enseñanza de los puntos críticos: Perspectiva histórica. *Revista Diálogo Educacional, Curitiba*. 6(18): 145-160.

González, R., López, M., Milá, O., y Milá E. (s.f.). *Matemática 7º* (1ª ed.). Caracas: CO-BO.

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an Urban Latin School. *Journal for Research in Mathematics Education*. 34(1): 37-73.

Habermas, J. (1982). *Conocimiento e interés*. Madrid: Taurus.

Humboldt, W. (1990). Sobre la diversidad de la estructura del lenguaje humano y su influencia sobre el desarrollo de la humanidad. Barcelona: Anthropos.

Ifrah, G. (1988). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.

Johansson, M. (2006). Teaching mathematics with textbooks. A classroom and curricular perspective. Tesis doctoral. Lulea University of Technology - Departamento de Matemáticas.

Martin, M., Mullis, I., Beaton, A., González, E. y Chrostowski, S. (2004). *TIMSS 2003 international science reports. Findings From IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Martin, M., Mullis, I., Beaton, A., González, E., Smith, T. y Kelly, D. (1997). *Science achievement in the primary school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Martínez, C. y García, L. (2003). Las actividades de primaria y ESO incluidas en libros escolares. ¿Qué objetivo persiguen? ¿Qué procedimientos enseñan? *Enseñanza de las Ciencias*. 21(2): 243-264.

Mayor, J. (1985). *Psicología del pensamiento y del lenguaje*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Maz, A. (2005). Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX. Tesis doctoral. España: Universidad de Granada.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA*. 1(3), 113-123.

Medina, R. (2005). *La pedagogía tecnocrática a la luz del pensamiento pedagógico universal*. Caracas: Fondo Editorial del IPASME.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación y Deportes. (2004a). *La educación bolivariana*. La educación como continuo humano Nº 1/6. Caracas: Autor.

Ministerio de Educación y Deportes. (2004b). *Plan Liceo Bolivariano. Adolescencia y juventud para el desarrollo endógeno y soberano*. Caracas: Autor.

Ministerio de Educación, Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (1998a). *Informe para el docente 3º*. Caracas: Autor.

Ministerio de Educación, Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (1998b). *Informe para el docente 6º*. Caracas: Autor.

Ministerio de Educación, Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (1999). *Informe para el docente 9º*. Caracas: Autor.

Moore, G. (1983). *Defensa del sentido común y otros ensayos*. Barcelona: Orbis. [Traducido por C. Solís del original en inglés Philosophical papers, 1959, George Allen & Unwin].

Mora, C. D., Rivera, A., Reverand, E., Beyer, W., Serrano, W., Brito, O. y Torres, C. (2004). *Tópicos en educación matemática*. Caracas: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM).

Mora, D. (2001). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Caracas: Ediciones de la Biblioteca de la Universidad Central de Venezuela.

Mora, D. (2004). Aprendizaje y enseñanza. Proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro. La Paz: Campo Iris.

Mora, D. (Ed.), Becerra, R., Rossetti, C., Serrano, W., Beyer, W., Millán, L., Vernaez, G., Serres, Y. Reverand, E. y Rojas, A. (2005). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

Mora, D., Serrano W. (Eds.), Rojas, A., Míguez, A., Martín, M. y Beyer, W. (2006). Lenguaje, comunicación y significado en educación matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre matemática lenguaje, pensamiento y realidad desde la perspectiva crítica. Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

Morales, O. (2008). Discriminación a través de las ilustraciones de libros de texto de educación secundaria en España. *Discurso y Sociedad.* 2(1), pp. 115-152.

Mosquera, J. (1998). Una didáctica de las matemáticas para Iberoamérica. Ponencia presentada en el III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Caracas, Venezuela.

Mosquera, J. (1999). Juegos y enseñanza de las matemáticas. *Boletín EM*. (4)33: 1-2.

Moya, A. (2004). La educación matemática: una aproximación a su comprensión desde una visión interdisciplinar. Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda, República Bolivariana de Venezuela.

Naisbitt, (1994). *Global paradox*. Londres: Nicolas Brealey publishing.

OECD (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. Paris: OECD.

OECD (2000). *Measuring student knowledge and skills: The PISA assessment of reading, mathematical and scientific literacy*. Paris: OECD.

OECD (2001). *Knowledge and skills for life: First results from PISA 2000. Executive Summary*. Paris: OECD.

Ortiz, L. (2003). *Inteligencia lógico matemática 7* (1ª ed.). Bogotá: Voluntad.

Orton, A. (1996). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Pascual, M. y otros (2006). *Estudio del currículum oculto antiecológico en los libros de texto*. Madrid: Comisión de Educación Ecológica Ecologistas en Acción. [Documento en línea]. Disponible: http://www.ecologistasenaccion.org/ IMG/pdf/ Informe_curriculum.pdf [Consulta: 2007, Enero 4]

Piaget, J., Osterrieth, P, Wallon, H. et al. (1963). *Los estadios en la psicología del niño*. Buenos Aires: Lautaro.

Qüenza, S.; Tejada, L.; Jaén, A. y Castillo, J. (1984). *El libro de texto en Venezuela*. Turmero: «El Mácaro».

Ramírez, T. (2003). El texto escolar: una línea de investigación en educación. *Revista de Pedagogía*. XXIV(70): 273-292.

Ramírez, T., Gaspar, M., Figueredo, V. y Perales, M. (2005). La cultura indígena en las ilustraciones de los textos escolares de Ciencias Sociales de la segunda etapa de la Educación Básica en Venezuela. *Revista de Pedagogía,* XXVI(75): 31-62.

Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Reyna, R. y Flores, E. (1999). *Matemática 7* (2ª ed.). Caracas: Oxford University Press Venezuela.

Robert, A. y Schwarzenberger, R. (1991). Research teaching and learning mathematics at an advanced level. En: Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127-139). Holland: Kluwer Academic Publishers.

Rodríguez, E. (Dir.) (s.f.). *Matemática 7º. Cuaderno de trabajo*. Caracas: Romor.

Rodríguez, L. (2000). *Pesas y medidas antiguas en Venezuela*. Caracas: Tropykos.

Rodríguez, R. (1997). *Matemática 9º grado*. Caracas: Larense.

Ruiz, D. (2003). *El lenguaje en clases de matemática*. Mérida – Venezuela: Universidad de Los Andes.

Ruiz, J. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa (2ª ed.)*. España: Universidad de Deusto.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs. *Petit X*. 12: 5-32.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks: Lacroix as textbook autor. *For the learning of mathematics*. 7(3): 41-51.

Serradó, A. y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*. 15(1): 67-98.

Serrano, W. (2002). *Sobre la manipulación de conceptos matemáticos*. Trabajo no publicado. Caracas.

Serrano, W. (2004). Elementos de álgebra: unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez", Trabajo de grado de Maestría no publicado, Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Caracas.

Serrano, W. (2005a). *La alfabetización matemática*. En: Mora, David. (Coord.). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina (pp. 243-276)*. La Paz-Caracas: Editorial "Campo Iris"/GIDEM.

Serrano, W. (2005b). *Juegos de lenguaje en educación matemática*. Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda, República Bolivariana de Venezuela.

Serrano, W. (2005c). ¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático? *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 6(1), 47-59.

Serrano, W. (2005d). El poder matemático. Trabajo no publicado. Universidad Central de Venezuela.

Serrano, W. (2005e). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 75, 131-164.

Serrano, W. (2006a). Juegos de lenguaje en el contexto del aula de matemáticas. En: D. Mora y W. Serrano (Eds.), A. Rojas Olaya, A. Míguez, M. Martín y W. Beyer, *Lenguaje, comunicación y significado en educación matemática: Algunos aspectos sobre la relación entre matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica* (pp. 15-60). Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

Serrano, W. (2006b). *Algunas concepciones del saber matemático en la educación matemática*. Trabajo no publicado.

Serres, Y. (2004). Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 7(1): 79-108. [Documento en línea]. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/ redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33570104&iCveNum=1967 [Consulta: 2006, Mayo 15]

Serres, Y. y Serrano, W. (2004). Una propuesta de educación matemática crítica para Venezuela. Ponencia presentada en el V Congreso Venezolano de Educación Matemática y VII Jornada Centro-Occidental de Educación Matemática, Barquisimeto, Venezuela.

Sierra, M., González, M. y López, A. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Relime*. 3(1): 71-85.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente. [Traducido por P. Valero del original en inglés Towards a philosophy of critical mathematics education, 1994, Kluwer Academic Publishers].

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.

Steiner, H. (1985). Theory of mathematics education (TME): An introduction. *For the Learning of Mathematics*. 5(2): 11-17.

Suárez, E. y Durán, D. (2002). *Matemática 7*. Caracas: Santillana.

Tall, D. (1988). *The nature of advanced mathematical thinking. A discussion paper for PME*. Papel de trabajo presentado en el Working Group for Advanced Mathematical Thinking en la Psychology of Mathematical Education Conference, Hungary.

Tall, D. (1997). From school to university: the transition from elementary to advanced mathematical thinking. Papel de trabajo presentado en la Australasian Bridging Conference in Mathematics, Nueva Zelanda.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Holland: Kluwer Academic Publishers.

Torres, J. (1998). *El curriculum oculto*. Madrid: Morata.

Valero, P. (1996). La dictadura de las matemáticas: hacia una educación matemática para la paz y la democracia. En: S. Bermúdez (ed.), *Estrategias y experiencias para la construcción de la paz. Educación para la paz*; pp. 254-268. Bogotá: Departamento de Historia - ANPAZ – Uniandes.

Valero, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratisation in Latin America. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1, 20-26.

Vigotsky, L. (1998). *Pensamiento y lenguaje* (2ª ed.). La Habana: Pueblo y Educación.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6(1): 69-118.

Whorf, B. (1971). *Lenguaje, pensamiento y realidad*. Barcelona: Barral.

Wittgenstein, L. (1963). *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell.

Wittgenstein, L. (1998). *Los cuadernos azul y marrón* (3ª ed.). Madrid: Tecnos. (Traducción de la segunda edición inglesa de *The blue and brown books* por Francisco Gracia, Basil Blackwell & Mott).

Wittgenstein, L. (2003). *Tractatus logico-philosophicus* (2a ed.). Madrid: Tecnos. (Publicada originalmente en 1921 con el título *Logisch-philosophische Abhandlung* en *Annalen del Naturphilosophie*, Nº 14).

Gobierno Bolivariano de Venezuela | Ministerio del Poder Popular para Relaciones Exteriores

Venezuela AHORA ES DE TODOS

Fondo Editorial Ipasme

José Gregorio Linares
Presidente

Alí Ramón Rojas Olaya y Ángel González
Asesores

Gisela Belmonte
Planificador Jefe

Sady Silva Yape
Coordinador de Asuntos Literarios

Nelly Montero
Coordinadora de Investigación

Tibisay Rondón y Juan Carlos González Kari
Administración

Luis Durán y María Carolina Varela
Producción

Liliana Rivero
Coordinadora de Relaciones Institucionales

Yuley Castillo
Asesora de Informática

Enricelis Guerra
Asistente a la Presidencia

Saudith Felibertt
Coordinadora de Eventos

Tania Cañas
Relaciones Comunitarias

Gladys Basalo
Secretaria

Personal de Apoyo Logístico

Alexis Cárcamo, Eduardo Ariza, Enderber Hernández, Jazmín Santamaría, Mervin Duarte, Odalys Marcano, Ronald Carmona, Víctor Manuel Guerra y Yesenia Moreno

Fondo Editorial Ipasme

"2009: Hacia la consolidación del Estado Socialista"
IPASME A LA VANGUARDIA DE LA SEGURIDAD SOCIAL