*David Mora*
(Compilador)

# *Educación Matemática Crítica*

**Vol I**

*Darwin J. Silva Alayón*
*Hermelinda Torrealba*
*Silvia Alayón*
*Walter O. Beyer K.*
*Wladimir Serrano Gómez*

Luces para la América

## EPIGRAFE

"Hágase la diferencia, entre Profesor, Catedrático, i Maestro.

PROFESOR, es el que se dedica EXCLUSIVAMENTE al estudio de un ARTE o de una CIENCIA i lo prueba, a veces, aplicándose a ENSEÑAR.

CATEDRÁTICO, es el que enseña SENTADO en ALTO: porque, Cátedra significa PUESTO SUPERIOR O EMINENTE: i no se usa dar este título, sino al que enseña Teolojía, Filosofía, Derecho, o Humanidades.

Pero, puede úno ser Profesor o Catedrático,
i no ser Maestro

MAESTRO
es el dueño de los PRINCIPIOS
de una CIENCIA, o de un ARTE, sea LIBERAL, sea MECÁNICO, i que
transmitiendo sus Conocimientos,
sabe hacerse ENTENDER i COMPRENDER, con GUSTO.

i es el MAESTRO! por excelencia,
si aclara los Conceptos i ayuda a estudiar,

si enseña a aprender, facilitando el trabajo,
i si tiene el DON!
de INSPIRAR a uno, i EXCITAR en otros, el DESEO de SABER."

*Simón Rodríguez, (1851)*
*Consejos de Amigo, dados al Colegio de Latacunga.*

## UNA COLECCIÓN PARA LA EDUCACIÓN BOLIVARIANA

LUCES PARA LA AMÉRICA es una Colección destinada a la formación pedagógica y ciudadana de las educadoras y educadores de la República Bolivariana de Venezuela. Encuentra su inspiración ideológica en el pensamiento de Don Simón Rodríguez, quien, junto con Simón Bolívar y Ezequiel Zamora, es raíz que hoy nutre la experiencia democrática participativa y protagónica que desde 1999 experimenta el colectivo nacional.

LUCES PARA LA AMÉRICA, como lo es y seguirá siendo la obra escrita de Don Simón Rodríguez , y no menos, su ejemplo de educador de las Repúblicas liberadas del dominio colonial español. LUCES PARA LA AMÉRICA, como las velas por él fabricadas para ganar el sustento del cuerpo que lo llevó por el mundo y por la América con una llama siempre lúcida y dispuesta al estudio y a la creación de educador en beneficio del pueblo preterido por las oligarquías.

Las luces rodrigueanas avivan su llama en esta Colección que el Ministerio del Poder Popular para la Educación pone al alcance de las educadoras y educadores en cumplimiento de un mandato educativo constitucional afirmado en la concepción del Estado docente; porque son las educadoras y educadores quienes, día a día, hacen posible la continuidad cultural de nuestra existencia colectiva como nación.

La Colección LUCES PARA LA AMÉRICA se propone afirmar nuestra decisión de nación independiente y soberana a través de la elevación cultural, educativa y pedagógica de las educadoras y los educadores responsables de la formación de las republicanas y republicanos que asisten a las instituciones educativas sostenidas por el Estado según mandato de la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999), la Ley Orgánica de Educación (2009) y los Planes Nacionales, documentos en los que se ratifica la formación permanente como política de Estado.

LUCES PARA LA AMÉRICA se propone servir al Plan de Formación Permanente de las y los Docentes del sistema escolar venezolano; Plan de Formación que se implementa desde el año escolar 2011-2012, con el propósito de fortalecer la participación protagónica de docentes, estudiantes y comunidades; la reafirmación y construcción del Poder Popular mediante la democratización de los saberes.

También se propone incentivar una cultura humanística que se reencuentre con el compromiso social y afirme los valores de la democracia participativa y protagónica, propias de un Estado democrático y social de Derecho y de Justicia que propugna valores como el derecho a la vida, la libertad, la justicia, la igualdad, la solidaridad, la democracia, la responsabilidad social, la preeminencia de los derechos humanos, la ética y el pluralismo político. Una cultura humanística que siembre en la conciencia de las educadoras y los educadores de ésta generación y las venideras, que la educación, como lo establece la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela, es un derecho humano y un deber social fundamental, que es gratuita y la asume el Estado como función indeclinable y de máximo interés.

En la Colección LUCES PARA LA AMÉRICA hallarán espacio para el encuentro educativo y pedagógico sus expresiones más amplias, que son inseparables de lo político cuando éste se propone la elevación científica y cultural de las mayorías, condición indispensable para el logro de un mundo material y espiritual de calidad superior tanto por sus bienes materiales como por sus valores de trabajo, igualdad y solidaridad compartidos y practicados.

El Ministerio del Poder Popular para la Educación ha dispuesto que en esta Colección tengan cabida el pensamiento de eminentes venezolanas y venezolanos que nos legaron obras forjadas en el estudio y la reflexión de nuestros problemas educacionales en su más amplio sentido, y que son y seguirán siendo verdaderas y altas luces en el tiempo. No menos tendrán cabida las obras de autoras y autores que en el tiempo que ahora transcurre aportan nuevos conocimientos y soluciones a la complejidad educativa que hoy experimenta transformaciones en el territorio nacional; son obras que nos muestran, que descubren, tanto el talento emergente en el campo educativo como las novedosas experiencias pedagógicas que se verifican en diversas regiones del territorio nacional.

El Ministerio del Poder Popular para la Educación es portador de un principio esencial a la naturaleza de sus funciones: la calidad y extensión de la educación en todos sus niveles y modalidades, lo que supone a su vez la creciente calidad y extensión de la educación de las educadoras y educadores. Este principio de permanente vigencia, lo comprendieron, defendieron y divulgaron educadores como Don Simón Rodríguez, Andrés Bello, Julio Castro, Mariano Blanco, Manuel Velásquez Level, José Ramón Camejo, Guillermo Todd, Alejandro Fuenmayor, Alirio Arreaza, Cecilia Núñez Sucre, Gustavo Adolfo Ruiz, Rafael Vegas, Luis Beltrán Prieto Figueroa, Mercedes Fermín, Luis Padrino, Julio Silva Flores, Belén Sanjuán, León Trujillo y Miguel Acosta Saignes, entre otros. Los cambios económicos, políticos y sociales son el gran escenario de actuación de quienes educan para darle base cultural o alma nacional a la Venezuela bolivariana en construcción colectiva. Cultura pedagógica e histórica potencian y vivifican las experiencias educativas por la vida y para la vida, con sentido de comunidad y afirmación de la individualidad social.

LUCES PARA LA AMÉRICA es colección que abre sus puertas a la reflexión más amplia de los problemas educacionales colocados en el contexto histórico nacional y suramericano; terreno donde hunden sus raíces, nuestra praxis y fuera de la cual toda reforma estaría destinada al fracaso por servil imitación y mezquindad social, dos males que durante todo el siglo XIX y buena parte del XX colocaron a las mayorías en situación de analfabetismo de la letra y del trabajo.

Se propone el Ministerio del Poder Popular de la Educación que la acción pedagógica y didáctica en el aula trascienda a la comunidad para enhebrarla y hacerla consciente de los grandes objetivos económicos, sociales, políticos y culturales que se proponen desde las instituciones del Estado. El saber pedagógico y su práctica se eleva en sus miras y consecuencias cuando es saber sociopolítico, antropológico, sociológico, en fin, histórico.

*Maryann Hanson*
*Ministra del Poder Popular para la Educación*

# ÍNDICE

# PRESENTACIÓN

## EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA: ENTRE REALIDAD Y EXIGENCIA

En los diversos capítulos que conforman el presente libro, las autoras y los autores han desarrollado puntos de vista sobre la educación matemática desde la perspectiva sociocrítica. El denominador común de tales aportes consiste en considerar a las matemáticas y a su tratamiento pedagógico-didáctico como parte de la cultura de los pueblos, además de su significado en los procesos de enculturación y socialización de cada ser humano. El eje troncal de todos los trabajos del libro está determinado no solo por las matemáticas propiamente dichas, sino también por su importancia para la formación general básica de la población de cada país. Todas las autoras y todos los autores tienen una alta experiencia con respecto a sus campos de acción e investigación, pero esencialmente en relación con el vínculo de las matemáticas con los contextos sociales y naturales específicos, generadores de saberes/conocimientos matemáticos que van desde niveles elementales hasta elaboraciones de mayor complejidad matemática. Aunque los posicionamientos conceptuales podrían parecer, en cierta forma, diversos, consideramos que existen grandes convergencias en cuanto a la relación entre las matemáticas y el resto del mundo. En algunos casos no solo se teoriza sobre la importancia de las matemáticas realistas, críticas y contextualizadas, sino que se presenta algunas ideas concretas ejemplificadoras.

La idea básica de las autoras y los autores con respecto a las clases de matemáticas está orientada en la superación de la abstracción con la cual es tratado el contenido matemático en los procesos de aprendizaje y enseñanza, insistiendo en la relación estrecha de las matemáticas con la realidad socionatural, siempre desde la perspectiva de la formación crítica y emancipadora tanto del sujeto en el sentido puramente individual como de la colectividad en el sentido más comunitario. Se trata, entonces, del desarrollo de una cultura de la educación matemática, cuyo objetivo fundamental sea la comprensión del contenido intramatemático, pero también la comprensión de los contenidos extramatemáticos. Ello sería posible si y solo si establecemos relaciones de correspondencia directa entre ambos mundos, superando la supuesta dicotomía entre ellos o la idea de la transferencia del saber matemático a situaciones contextuales externas a las matemáticas.

La idea básica de la relación entre las matemáticas y la realidad, particularmente de las matemáticas escolares, ha estado y estará, sin duda alguna; en cada espacio de la discusión educativa que tiene lugar en nuestros países. Muchos estudios nacionales, regionales e internacionales muestran fehacientemente la importancia que tiene esta temática, cuyas consecuencias inmediatas en cuanto la caracterización y la transformación curricular son inmediatas. Estos estudios, de la misma manera, han mostrado que no siempre se están desarrollando los procesos de aprendizaje y enseñanza desde esta perspectiva interdisciplinaria e integradora del mundo intramatemático con el mundo extramatemático. La interdisciplinariedad didáctica puede ayudar, sin lugar a dudas, a superar la precaria situación dicotómica sociocultural entre las matemáticas y la realidad. Con ello se estaría conformando una concepción más humanista de las matemáticas, más relevante en cuanto a su relación con situaciones complejas de las realidades sociales, naturales y culturales. Las matemáticas son y así deberían ser tratadas en los procesos educativos y formativos, una elaboración sociocultural, un fenómeno esencialmente humano con significado económico, político, cultural, social y cognitivo. Las matemáticas provienen de los aportes de sujetos individuales, de las colectividades socioculturales en correspondencia con situaciones problemáticas reales, pero también, de la necesidad concreta de quienes desean indagar aún más en el saber propiamente matemático, independientemente de sus potenciales usos o aplicaciones.

Las autoras y los autores de los trabajos que conforman el presente aporte conceptual, pedagógico y didáctico sobre las matemáticas coinciden totalmente en cuanto a que la construcción de una cultura positiva sobre el quehacer matemático escolar está determinada tanto por las formas apropiadas cómo podamos desarrollar las clases de matemáticas dentro y fuera de los espacios de aprendizaje; como por el tratamiento de interrogantes altamente relevantes, relacionadas con la cotidianidad de las comunidades, la vida de las y los estudiantes y el mundo de la producción-trabajo de cada espacio-tiempo donde ocurre el proceso formativo matemático. Este es el gran reto que tenemos actualmente en nuestros países, especialmente en aquellos donde se intenta dar sentido crítico, político y emancipador a la educación, más que el cuestionable sentido reproductor de las estructuras de dominación, subordinación y alineación que han caracterizado el modelo educativo basado en la esencia del capital y sus múltiples contradicciones.

En muchas ocasiones hemos insistido en la necesidad de hacer grandes esfuerzos para transformar de manera profunda tanto las concepciones curriculares como las prácticas educativas concretas. Nuestra iniciativa consiste en tratar actividades problemáticas realistas generadoras de los procesos de aprendizaje y enseñanza con un enfoque intercultural de los contenidos escolares básicos. Para ello será necesario un cambio profundo del diseño y desarrollo curricular, la concepción de los libros de texto, pero también de la formación básica de las y los docentes, lo cual implicaría un profundo cambio en el quehacer de la práctica educativa concreta en los diversos ámbitos y espacios donde tienen lugar los complejos procesos del aprendizaje y la enseñanza. Una de las razones fundamentales de nuestras inquietudes pedagógicas y didácticas tiene que ver con los permanentes cambios que caracterizan actualmente a nuestras sociedades, especialmente con respecto al mundo de la producción, el consumo y las formas de trabajo. Para ello se requiere con mayor frecuencia personas con altos niveles de formación crítica, metódica, conceptual e investigativa.

La educación matemática, por lo tanto, podría contribuir considerablemente al desarrollo del pensamiento orientado en contextos complejos, capacidad para resolver problemas propios de las realidades sociales y naturales, habilidades y destrezas comunicativas, potencialidades para el trabajo grupal, participativo, cooperativo y colaborativo, el fortalecimiento de la formación crítica, política y reflexiva en torno a las realidades cotidianas concretas; fomento de la independencia y autodisciplina en correspondencia con el apropiado uso de los diversos tipos de saberes (ancestrales, populares e institucionalizados), desarrollo de capacidades argumentativas y creativas, siempre desde el vínculo estrecho entre matemáticas y realidad, disposición para comprender la complejidad de la vida social y natural con base en el razonamiento matemático escolar, etc. Todas estas buenas intenciones no podrán lograrse manteniendo las actuales formas dominantes tanto de las interacciones sociomatemáticas como de las formas de concebir y cultivar diariamente el saber/conocimiento matemático.

Este espectro de cualificaciones, entre otras, no solo generan consensos en el mundo de la pedagogía y la didáctica, sino que especialmente determinan el interés de buena parte de las y los docentes en los diversos ámbitos de nuestros sistemas educativos. A pesar de estas importantes inquietudes, tales potencialidades complejas no pueden ser alcanzadas por parte de las y los principales actores del proceso educativo mediante el desarrollo de clases de matemáticas, u otras disciplinas escolares, centradas en la actuación de los docentes, en la imposición frontal del conocimiento o en simples actividades didácticas disfrazadas de contextos sociales-naturales. En una sola disciplina no puede recaer esta alta responsabilidad, tampoco el tratamiento aislado de las demás disciplinas como viene ocurriendo con mucha frecuencia lograrían el desarrollo integral de tales potencialidades. Todas las disciplinas escolares: las matemáticas, las ciencias naturales, las humanidades, las lenguas y la comunicación, y las ciencias sociales deben cooperar, cada una con sus contenidos específicos y métodos, a alcanzar dichas potencialidades en el sujeto y la colectividad. Ellas tendrán más éxito en el logro de tales objetivos formativos si su tratamiento escolar es desarrollado desde una concepción interdisciplinaria e integral.

Consideramos que debería tener lugar una conjunción entre los saberes/conocimientos técnicos, conceptuales, metódicos, investigativos altamente institucionalizados, pero también aquellos ancestrales y populares. Las clases interdisciplinarias e investigativas basadas en temas generadores de aprendizaje y enseñanza serían, por tanto, el camino apropiado e ideal para alcanzar exitosamente dichas potencialidades individuales y colectivas. Por ello debemos concentrar nuestros esfuerzos en el fortalecimiento de las transformaciones educativas que nos permitan no solo desarrollar el curriculum de acuerdo con la orientación tradicional de las disciplinas (profundización intradisciplinaria), sino también en la interrelación entre diversas disciplinas (horizontalidad interdisciplinaria), donde las ciencias naturales, las matemáticas, las artes, las ciencias humanas, las tecnologías y las ciencias sociales conviven con sus contenidos específicos, pero también con sus métodos y aportes científicos.

Por supuesto que actualmente existe un cierto optimismo con respecto al desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza basado en ideas altamente progresistas de la pedagogía y la didáctica, como por ejemplo aprender/enseñar investigando, produciendo, trabajando, reflexionando e indagando. Estas importantes orientaciones tendrán éxito sólo si tienen lugar otros cambios con respecto a la gestión educativa propiamente dicha, así como la implementación definitiva de una didáctica interdisciplinaria. Uno de los grandes problemas que debe ser superado, consiste en la fragmentación de las clases en pequeños encuentros de cuarenta o noventa minutos de trabajo al interior de un espacio de aprendizaje. Un segundo problema consiste en imponer desde ciertas esferas educativas sin la participación cooperativa y colaborativa de las y los docentes y demás actores comunitarios, lineamientos curriculares ajenos a las realidades contextuales de las comunidades de aprendizaje y enseñanza. Como tercera situación problemática se encuentran, sin duda, las condiciones deplorables en las cuales se localiza el hábitat de estudio, los lugares y aprendizaje y enseñanza convencional, pero también los otros espacios donde debería ocurrir el proceso educativo. Una cuarta dimensión problemática tiene que ver con la formación de las y los docentes en los diversos ámbitos del sistema educativo, quienes aún continúan con concepciones teóricas y prácticas relacionadas con los procesos de aprendizaje y enseñanza basadas en la segregación y dispersión de los saberes/conocimientos dentro y fuera de los centros educativos. La quinta situación problemática está directamente relacionada con los recursos didácticos para el desarrollo de las prácticas educativas, especialmente los libros de texto, cuya orientación sigue siendo en la mayoría de los casos intradisciplinaria y altamente descontextualizada. Por último, podríamos indicar la carencia de una política de seguimiento, acompañamiento, valoración y evaluación tanto del proceso pedagógico y didáctico como de la implementación de acciones educativas transformadoras altamente significativas para cada uno de nuestros países y contextos específicos.

En algunos países, como el caso concreto de la República Bolivariana de Venezuela, se viene haciendo un esfuerzo altamente considerable con la finalidad de superar este déficit educativo. Para ello, la revolución bolivariana ha logrado, sin duda, grandes avances con la implementación de una concepción educativa revolucionaria y la búsqueda de soluciones a muchos problemas educativos vinculados con la gestión, administración, infraestructura, formación docente, etc. Una de las grandes iniciativas se ha consistido en la distribución gratuita de libros de texto en los ámbitos de los niveles  de Educación Primaria y Educación Media con un basamento pedagógico y didáctico centrado en la investigación y los contextos socioculturales y naturales.

Por supuesto que nuestra posición pedagógica y didáctica asume con mucha atención, cuidado y reflexión la propuesta del trabajo educativo centrado en la investigación y la integración de disciplinas. Es necesario tener presente que la interdisciplinariedad didáctica contiene grandes posibilidades y potencialidades, pero también se enfrenta a diversas dificultades, las cuales pueden ser superadas en la medida en que implementemos, investiguemos y evaluemos experiencias en los diversos ámbitos del sistema educativo. Algunos de estos aspectos problemáticos podrían ser los siguientes: los objetivos de la interdisciplinariedad didáctica y las respectivas formas de trabajo presuponen como sistema de referencia a la especialidad predominante; el desarrollo de relaciones científicas fundamentales y las maneras de pensar/realizar las clases son centradas en las disciplinas convencionales en detrimento de la integración del saber/conocimiento, los métodos y procedimientos; las limitaciones relacionadas con la metodología propiamente dicha deben ser superadas mediante constantes experiencias didácticas con la participación de docentes provenientes de diversas disciplinas, pero sobre todo con el tratamiento de temas generadores de aprendizaje y enseñanza investigativos e interdisciplinarios. Por último, esta importante orientación pedagógica-didáctica debe desarrollarse de manera natural, sin imposiciones y superando las limitantes temporales, espaciales y socioculturales propias de los contextos específicos donde tiene lugar el proceso de aprendizaje y enseñanza.

Un aspecto que debemos tomar en cuenta consiste, obviamente, en la carencia de experiencias significativas, orientaciones pedagógico-didácticas, materiales específicos, libros especializados, libros de texto, etc. basados en esta concepción investigativa e interdisciplinaria, que permitan su implementación exitosa. A ello se suma la falta de docentes lo suficientemente formados en esta dirección, pero también la creencia en cuanto a la calidad educativa centrada solo en el dominio de los contenidos parcelados intradisciplinarios. Estas dificultades concretas sólo serán superadas si nuestros gobiernos logran implementar algunas políticas revolucionarias que tengan como horizonte esta concepción pedagógica-didáctica, las cuales necesariamente tendrían que estar acompañadas de profundos y complejos procesos de formación académica, cambio de las prácticas educativas y acompañamiento permanente con la participación, cooperación y colaboración activa de las comunidades extraescolares e intraescolares. Además de estas exigencias, premisas y condiciones básicas, se debe desarrollar una tradición o cultura investigativa en las y los docentes, en lo posible con la participación activa de las comunidades, sobre sus propias prácticas educativas, lo cual contribuirá considerablemente a la reflexión, cambio y mejoramiento tanto de los procedimientos metodológicos propiamente dichos como de los mismos temas generadores de aprendizaje y enseñanza investigativos e interdisciplinarios.

Una segunda gran parte del presente libro a la cual deseamos referirnos tiene que ver con el pensamiento pedagógico-didáctico genuino que debe caracterizar a la educación matemática y que, por supuesto, es asumida por todas las autoras y todos los autores. Sus ideas básicas están dirigidas esencialmente a las escuelas de formación general públicas de todos nuestros países, considerando que es responsabilidad de estas escuelas, garantizar una educación matemática inclusiva, equitativa y emancipadora. Las autoras y los autores asumen el concepto de formación en su ámbito sociocrítico y político, considerando a la formación como el pilar central de todo proceso de transformación sociocultural. La idea fundamental tiene que ver con el desarrollo de todas las potencialidades de cada sujeto, como individuo, pero también como parte esencial de un colectivo, de una comunidad altamente compleja, donde concurre una heterogeneidad de actores y factores socioculturales. La pedagogía y la didáctica subyacentes tienen que ver directamente con la vida de cada persona, con el mundo sociocomunitaria, pero también con la existencia y la vida de los demás seres vivos y elementos de la naturaleza que contribuyen al mantenimiento de las dinámicas socionaturales.

Esta existencia de lo material, lo inmaterial y la vida misma adquieren derechos por el sencillo hecho de existir y coexistir en relación con el otro en correspondencia con los demás seres y las cosas, aunque inertes, pero altamente significativas para el mantenimiento de la vida en cualquier espacio y momento histórico. La educación en general, pero la formación matemática en particular, tienen que cumplir el papel fundamental de contribuir al mantenimiento de esta existencia, por un lado, pero también a garantizar la continuidad de la existencia de las cosas inertes que permiten la vida de todos los seres vivos como las plantas, los animales y, muy particularmente, los humanos. La educación matemática, por lo tanto, tiene y debe ayudar inexorablemente a la comprensión de tales dinámicas transformadoras. Este es uno de los aspectos básicos tomados en cuenta explícita o implícitamente en cada uno de los trabajos que componen el presente libro.

La formación integral de las personas desde la perspectiva crítica, política y emancipadora corre actualmente el grave peligro por el aumento de las tentaciones tecnocráticas en las cuales está inmersa buena parte de la población de nuestros países, especialmente la influencia de la gran cantidad de informaciones y conocimientos institucionalizados, todo lo cual repercute en los planteamientos pedagógicos y didácticos. Los cambios en los saberes y conocimientos, pero también de las tendencias pedagógicas, nos obligan a repensar una y otra vez las didácticas especiales, como el caso de la didáctica de las matemáticas, las didácticas interdisciplinarias, como por ejemplo la didáctica de los temas generadores de aprendizaje y enseñanza. Si miramos retrospectivamente el desarrollo de la didáctica de las matemáticas podemos constatar sin mayores inconvenientes que las mismas han estado sujetas a las dinámicas pedagógicas, por un lado, y a las dinámicas socioculturales en cuanto a los procesos de avance científico, tecnológico e industrial. Es decir, la educación matemática ha respondido a las exigencias históricas de la cultura y la sociedad tecnocrática, descuidando en buena medida su papel liberador y transformador, particularmente del sujeto y las comunidades. Este es uno de los reclamos hechos, con mucha coherencia, por la pedagogía crítica. Las didácticas en términos generales, pero la didáctica de las matemáticas en particular tiene esta deuda importante con los procesos de cambio. Por ello las autoras y los autores del presente libro insisten en ese papel emancipador de las matemáticas y, muy concretamente, de la educación matemática escolar.

La idea de la formación general básica de toda la población como parte de la educación cultural general, se constituye en el núcleo de actuación-reflexión de cada niña y niño, de cada joven y de cada persona adulta. La formación general básica es el punto de partida para entrar en el mundo de las matemáticas, por ejemplo, con mayor interés y curiosidad. La escuela, por lo tanto, tiene que cumplir con este importante y significativo papel, el de permitir a toda la población continuar interesada por el saber, por el comprender y por investigar, todo ello como esencia de su propia curiosidad e iniciativa. La escuela debe apoyar tales puntos de partida, sin los cuales no serían posibles los aprendizajes significativos. La escuela tiene la gran tarea de brindar los mecanismos apropiados para el desarrollo de habilidades y estrategias en correspondencia con la actuación-reflexión de cada sujeto y la colectividad en relación con otros sujetos y otras colectividades. Para ello, las matemáticas escolares se constituyen, sin duda alguna, en la bisagra entre mundos, entres sujetos y entre comunidades. Por supuesto que nos podemos evitar el riesgo que corremos cuando hablamos de la formación de cada sujeto en particular, puesto que esta particularidad nos llevaría a pensar que estaríamos inclinados por la formación individualista o personalizada de cada sujeto. No, cuando hablamos de sujeto, estamos pensado en la persona en relación con los demás, estamos pensado en un ser de relaciones e interacciones, interdependiente de otros sujetos o colectividades sociocomunitarias, quienes a su vez están determinados por el mundo del trabajo y las relaciones de producción. Esta sería, en consecuencia, la idea primordial de la formación democrática y comunitaria. Ambos elementos se entrelazan, se asocian y complementan simultáneamente.

La pregunta esencial, entonces, consiste en saber en qué sentido la educación matemática puede contribuir a la formación sociocrítica, política y emancipadora de la población; es decir, a la formación democrática. Nuestra repuesta consiste, desde la visión de la misma educación matemática, tal como se expone en el presente libro, en que toda ciudadana y todo ciudadano forma parte en igualdad de condiciones, derechos y deberes, de la sociedad donde ocurre su existencia. Bajo esta premisa, consideramos entonces que su actuar como ciudadana y ciudadano está directamente relacionado con el ejercicio de la democracia, para lo cual la formación general básica constituye en uno de las condiciones primordiales.

Las matemáticas escolares, entonces, como uno de los pilares primarios de esta formación, constituyen también uno de los elementos sustantivos del sostenimiento, práctica y esencia de la democracia, particularmente de la democracia participativa y protagónica. Por ello, consideramos que las clases de matemáticas pueden aportar mucho, no sólo el cultivo de los saberes y conocimientos matemáticos, sino también las relaciones de poder que tienen lugar en el mundo de las prácticas didácticas dentro y fuera de los espacios de aprendizaje. Para que ello ocurra, tendríamos que superar la creencia en una educación matemática enfocada en lo puramente pragmático y tecnocrático. La escuela y en particular las clases de matemática sí deben contribuir a llenar los grandes vacíos que caracterizan hoy a la educación impositiva, dictatorial, centrada en el docente y gobernada por el conocimiento institucionalizado.

La escuela, y en particular la educación matemática, tiene la responsabilidad histórica de ayudar con mucha fuerza y decisión al ejercicio democrático pleno, partiendo de las prácticas democráticas durante el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, pero también desde el significado social y cultural de las matemáticas trabajadas fuera y dentro de las instituciones escolares. Como se puede apreciar, la educación matemática contribuye al fortalecimiento de la democracia desde diversos ángulos. No sólo se trata del contenido matemático y de las potencialidades matemáticas de los sujetos participantes en el proceso educativo, sino esencialmente en las formas reales y concretas en que tienen lugar los quehaceres cotidianos de aprendizaje y enseñanza. Ello significa que los procesos de concientización no pueden ser impuestos mediante divagaciones teóricas moralistas, sino que por el contrario, ellos están determinados por las interacciones sociomatemáticas crítico-reflexivas. Es así como se ha entendido, en el presente libro, la formación de la conciencia crítica con la ayuda de la educación matemática escolar.

La formación de las ciudadanas y los ciudadanos desde una perspectiva crítica para la práctica democrática tiene, necesariamente, que estar reflejada en el ejercicio de las actividades matemáticas dentro y fuera de los centros educativos. Un ejemplo muy concreto consiste en la tendencia de la resolución de problemas y las aplicaciones como estratégicas importantes de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y su relación con la formación de ciudadanía crítica en sociedades democráticas. Tanto los problemas como las aplicaciones podrían estar determinados y dominados, en cierta forma, por la hegemonía del mundo tecnocrático, el cual se contrapone en la mayoría de los casos a la crítica y a la democracia auténtica, puesto que la técnica asume el predominio en el debate, la discusión y la interacción.

Sin embargo, si en las clases de matemáticas se asume una orientación de las aplicaciones y la resolución de problemas en correspondencia con situaciones sociales y naturales de interés para la gran mayoría de los participantes, entonces podríamos neutralizar o por lo menos disminuir considerablemente tales tendencias tecnocráticas tanto del conocimiento matemático como de las interacciones entre los miembros de la comunidad de aprendizaje y enseñanza. Las situaciones sociales y naturales generadoras del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas deben ser lo suficientemente abiertas y transparentes, con lo cual estaríamos ganando una primera batalla conceptual, por un lado, y pedagógica-didáctica, por el otro. Es decir, estaremos haciendo matemáticas de manera transparente, conciente y reflexiva, evitando con ello el estudio de matemáticas *ocultas*, sin saber exactamente para qué sirven o qué significado tienen para el sujeto que aprende, para la colectividad de aprendizaje y para la sociedad en su totalidad. De esta manera se estaría haciendo pública cada una de las intenciones, acciones y contenidos matemáticos que caracterizan cualquier clase de matemáticas.

De igual forma, se estaría construyendo técnicas, por muy sencillas o complejas, con amplios niveles de discusión, debates y participación, evitando toda orientación impositiva del quehacer matemático. Así, le estaríamos brindando a cada ciudadana y ciudadano las posibilidades y herramientas reales y efectivas para que pueda experimentar otras maneras más efectivas de comprender las matemáticas, hacer usos efectivo y apropiados de ellas, pero sobre todo cultivar las matemáticas con sentido humano, con sentido democrático. En la medida en que decidimos reunirnos para elaborar colectiva y participativamente, de acuerdo con estrategias apropiadas, el contenido y el concepto matemático, tomando en cuenta los saberes ancestrales, populares e institucionales, en esa medida estamos haciendo uso de interacciones, intercambios y reflexiones didácticas, premisas básicas de la vida en democracia. Las clases de matemáticas se convierten, por lo tanto, en excelentes espacios para ejercitar principios, reglas y procedimientos democráticos. Las clases de matemáticas participativas permiten, sin duda, la formación crítica de las ciudadanas y los ciudadanos y, además, el diálogo de saberes desde la perspectiva participativa, cooperativa y colaborativa.

Para que ello sea posible se requiere, por supuesto una cultura de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas correspondiente con la pedagogía y la didáctica crítica. Es necesario hacer todo lo que esté a nuestro alcance para garantizar las condiciones que nos permitan desarrollar en la práctica una pedagogía del diálogo, una formación basada en el intercambio democrático de ideas, pensamientos, acciones y posicionamientos de carácter científico y sociopolítico, también para la educación matemática. Este tipo de clases de matemáticas no estarían basadas en la discriminación, el desprecio e imposición del pensamiento, menos de los contenidos institucionalizados; por el contrario su horizonte estaría determinado por la práctica de múltiples relaciones dialógicas y democráticas.

Lo que deseamos con esta concepción de las matemáticas es muy claro; queremos sin duda que la educación deje de ser un problema para quienes participan en el quehacer educativo y se convierta, más bien, en una potencial y real solución a las dificultades relacionadas con la exclusión, desigualdades, inequidades y discriminaciones, practicadas en muchos casos en las clases de matemática antidemocráticas. Con ello no solo se continúa reproduciendo la miseria de la población más pobre y vulnerable de nuestras sociedades, sino que se acentúa la distorsión del verdadero significado de las matemáticas y, particularmente, de la educación matemática misma, todo lo cual entra en contradicción con el significado mismo de una sociedad democrática. Si asumimos tanto a las matemáticas como a su cultivo dentro o fuera de la escuela como parte sustantiva de la cultura de un pueblo, entonces tendríamos que reconsiderar definitivamente las formas e interacciones sociomatemáticas en el desarrollo de los complejos procesos de aprendizaje y enseñanza, lo cual pasa necesariamente por el cuestionamiento a las concepciones curriculares unidireccionales, centradas única y exclusivamente en los saberes/conocimientos matemáticos institucionalizados, en desmedro evidente de los saberes/conocimientos ancestrales y populares.

Si en las clases de matemáticas tomamos en cuenta el gran bagaje de experiencias de las y los estudiantes, docentes y la comunidad, entonces sí estaríamos incorporando estos dos últimos grandes campos de saberes. De esta manera estaríamos brindando las oportunidades a todos los actores del proceso educativo con la finalidad de elaborar compartidamente el nuevo conocimiento matemático; allí entraría en juego, por supuesto, el cultivo ineludible del diálogo auténtico, condición fundamental para el desarrollo de la democracia en el espacio de aprendizaje, la escuela, la comunidad y la sociedad en términos más generales. A esta exigencia didáctica es necesario añadir, además, que las tendencias constructivistas para aprender-enseñar, por sus características individualistas, no contribuye al fortalecimiento de la democracia, puesto que ellas descuidan considerablemente uno de sus principios básicos, el cual consiste en el diálogo. En segundo lugar, para estas creencias didácticas, altamente individualizadas, los contextos sociales y naturales como generadores básicos de temas altamente significativos para el cultivo de las matemáticas no son relevantes ni mucho menos dignos de tomarse en cuenta en las clases de matemáticas en cualquier ámbito del sistema educativo. Por supuesto que no negamos ni cuestionamos el cultivo de las matemáticas desde el punto de vista de su desarrollo y tradición técnico-científica, lo cual también está estrechamente unido al mundo de la conformación de las sociedades democráticas modernas. Por el contrario, creemos que hace falta un mayor cultivo de prácticas matemáticas que permitan a las ciudadanas y los ciudadanos comprender e incorporar el mundo de la ciencia y la tecnología en función del vivir bien, en función de la máxima felicidad posible de toda nuestra población. Ello permitirá, sin lugar a dudas, la reorientación de la tecnología, cuyo pilar fundamental son las matemáticas y la física, hacia el logro de objetivos más humanos, democráticos y revolucionarios.

Estamos de acuerdo que la democracia y el vivir bien reside en la ciudadana y el ciudadano, quien debe interactuar permanentemente. Sin embargo, para ello se requiere un conjunto de potencialidades intelectuales no solamente abstractas, como muchos piensan, sino un conjunto de experiencias de vida y de aprendizaje a partir de las cuales esa ciudadana o ese ciudadano puede alimentar cada día tales potencialidades intelectuales. Aquí está esa estrecha relación entre el pensar y el hacer, entre el actuar y reflexionar, entre la teoría y la práctica. Ello no será posible si no tomamos en cuenta realmente tales relaciones en la cotidianidad de la educación y en particular de la educación matemática. No será posible tampoco si seguimos pensado que las niñas, niños, jóvenes y personas adultas tienen que cultivar las matemáticas en contextos y realidades abstractas, alejadas de sus propios mundos y realidades. Estos espacios artificiales, de laboratorio no permiten la formación de la ciudadanía crítica y menos la comprensión contextualizada del saberes y conocimiento matemático. Tampoco nos ayuda el tratamiento de una realidad única, de un mundo homogéneo y estandarizado, donde todas y todos tenemos que vivir y repetir las mismas experiencias y formas de vida, en la mayoría de los casos determinadas por la tecnología universalizadora del conocimiento y los comportamientos.

El primer trabajo, elaborado por Wladimir Serrano Gómez, tiene por título *Algunos elementos para una educación matemática crítica* *en Venezuela: conocer y conocimiento*. Desarrolla el concepto de las concepciones explícitas e implícitas sobre la educación matemática. Para ello, el autor discute la idea del saber, particularmente del saber matemático. Él se basa en la teoría de la educación matemática crítica, analizando profundamente los aspectos funcionalistas y mercantilistas con los cuales han sido tratadas las matemáticas, por una parte, y los procesos educativos de las mismas, por la otra.

El segundo trabajo del libro está a cargo de David Mora, cuyo título consiste en *Formación matemática como parte de la Educación Integral Básica (EIB) de todas las personas*. El trabajo trata del papel que juegan las matemáticas en los actuales procesos de cambio y transformación en nuestros países. El autor discute con rigurosidad tanto los propósitos y las tareas de las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza en cualquier grupo sociocultural en todo momento histórico, como las interacciones socioculturales relacionados con el quehacer matemático, insistiendo en contraponer las consecuencias dominantes reproductoras de las estructuras de dominación con aquéllas orientadas a los procesos de liberación y emancipación del sujeto y la colectividad. Este trabajo, por supuesto, se inscribe también en la concepción de la pedagogía y didáctica críticas, cuya importancia para la educación matemática es altamente relevante, particularmente en países en procesos de transformación sociopolítica.

Como tercera parte del libro tenemos el trabajo titulado *Relación entre lenguaje, pensamiento, matemáticas y realidad*, también de David Mora. En este trabajo, el autor desarrolla una importante teoría sobre la relación entre las matemáticas, el leguaje, el pensamiento y la realidad. Para ello se discute el proceso de interacciones complejas sociomatemáticas que tienen lugar dentro y fuera de los centros educativos. También se discute, en el artículo, algunos aspectos fundamentales que tienen que ver con las representaciones lingüísticas y matemáticas que podrían estar ocurriendo en la mente de cada sujeto, siempre en interacción con otros sujetos mediante procesos comunicativos, cuyas consecuencias son muy importantes para la comprensión de conceptos matemáticos y, por supuesto, para el desarrollo del pensamiento crítico-reflexivo en torno a la complejidad social y natural. De la misma manera, el trabajo analiza aspectos sustantivos de algunos resultados recientes de las neurociencias y sus consecuencias para la conformación de los campos mentales matemáticos y lingüísticos, lo cual nos podría aclarar la posible existencia de una estructura matemática universal.

El cuarto aporte corresponde nuevamente a Wladimir Serrano Gómez, quien desarrolla un importante trabajo denominado *Juegos de lenguaje en contexto del aula de matemáticas*. En él, el autor explica detalladamente el concepto de significado en relación con las actividades matemáticas tratadas en los procesos de aprendizaje y enseñanza, siempre en correspondencia con las discusiones que han tenido lugar durante muchos años en el campo de la educación matemática, especialmente en el mundo occidental. De la misma manera, el autor estudia el concepto de juegos, caracterizando de manera muy precisa los juegos de lenguaje matemático en el contexto del aula. Este concepto, según el autor, permite comprender al lenguaje matemático más allá de su estructura lógica. El autor señala, por ejemplo, que *en un grupo que tenga relación con ideas matemáticas, se desarrolla sistemas de comunicación o juegos de lenguaje que le son característicos; además, construyen o asocian significados, de formas también particulares*.

El profesor Walter Beyer elaboró un segundo trabajo para este libro, cuyo título consiste en el *Laberinto del significado: la comunicación en el aula de matemáticas*. El mismo también estudia la problemática de la comunicación en las clases de matemáticas en el aula, desde una concepción sociocultural de las matemáticas, abordando las interacciones sociomatemáticas que tienen lugar en el espacio de aprendizaje como un sistema profundamente complejo. En este espacio de aprendizaje-enseñanza, además de la existencia del clásico triángulo didáctico, influyen otros actores y contextos, particularmente la complejidad sociocultural. El autor señala, entre otros aspectos sumamente importantes, que *en relación con el saber matemático éste es visto desde diferentes perspectivas las cuales permiten hablar acerca de un saber institucionalizado que engloba tanto al saber escolar como al saber académico, así como podemos pensar en un saber no institucionalizado presente en la sociedad en su conjunto*. En el trabajo se muestra el análisis sobre las interacciones sociomatemáticas presentes de manera permanente dentro de cualquier sistema didáctico, particularmente el referido a la didáctica de las matemáticas, lo cual tiene importantes repercusiones sobre el estudio analítico del lenguaje matemático. El autor estudia un conjunto importante de dimensiones y niveles que ayudan a comprender elementos de los procesos comunicativos escritos y orales en cualquier clase de matemáticas. Para ello, el autor se afianza en algunas teorías muy importantes como, por ejemplo, la comunicación y la lingüística, con lo cual le permite analizar conceptos tales como: *las nociones de signo, significado, ruido, entre otras en conjunción con conceptos de la didáctica de las matemáticas como son los obstáculos, los malentendidos, los errores permiten adentrarse con mayor profundidad en el estudio del sistema didáctico*. Un último aspecto, altamente significativo, del presente artículo tiene que ver con la presentación de varios ejemplos de interacción y comunicación sociomatemáticas que el autor ha obtenido a partir de largos procesos de observación de clases de matemáticas, tomados de los libros de texto, elaboraciones de las y los estudiantes en clases de matemáticas.

Los autores Rovimar Serrano, Hermelinda Torrealba y Wladimir Serrano han escrito, a partir de sus propias experiencias, un importante trabajo, denominado *currículo, internet y matemáticas escolares*. En él se discute importantes problemas relacionados con el uso del internet en el campo del desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Se analiza críticamente ciertas creencias asociadas con el uso del internet en las clases de matemáticas, tales como: el supuesto alto rendimiento en matemáticas, la fuente fundamental del conocimiento y la democratización de la ciencia y la tecnología. También se toma en cuenta aspectos críticos como la superficialidad de las interacciones entre los sujetos, la simpleza de los saberes y la escasa formación crítica de las y los participantes en las prácticas educativas concretas, particularmente en el campo de la educación matemática.

Como séptimo trabajo tenemos el aporte sustantivo de Darwin Silva, quien presenta un resumen muy esclarecedor del *desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva didáctica del trabajo por proyectos*. Esta investigación ha sido realizada con base en la metodología de la Investigación Acción Crítica. El contenido central consiste en estudiar analítica y críticamente las diversas fuentes de energía, focalizando los contenidos matemáticos en el ámbito del tercer año de educación media. Según el autor, el estudio ha contribuido con los siguientes aportes básicos: *a partir del problema de la valoración de las distintas fuentes de energía, se logró desarrollar el concepto de función;*

*y los y las estudiantes utilizan representaciones, procedimientos y conceptos matemáticos para interpretar la situación planteada, pero además se apoyan en el fenómeno analizado para comprender las ideas matemáticas*.

El siguiente aporte consiste en un importante trabajo de la profesora Rosa Becerra, cuyo título es: l*a educación matemática crítica -orígenes y perspectivas-*. Este es uno de los campos de análisis y estudio del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIDEM) de la República Bolivariana de Venezuela. La autora profundiza, en su artículo, aspectos muy significativos, tales como el principio fundamental de la construcción social de la realidad y su relación con la formación matemática crítica de los sujetos. Este análisis no se queda solo en el ámbito del tratamiento crítico de las matemáticas en las clases cotidianas, sino que por el contrario la autora profundiza en el tema de la investigación, la formación docente, etc. como partes fundamentales del currículo, las cuales involucran directa e indirectamente concepciones y posicionamientos ideológicos. Ella desarrolla con mucha precisión el concepto de la teoría crítica como teoría social que respalda la concepción de la educación matemática crítica, la cual ha tenido importantes avances. La autora concluye, por ejemplo, que *relacionamos los principios de esta teoría con los mecanismos utilizados por la educación y especialmente por la educación matemática, la cual corre el riesgo, como preveía Adorno, de perpetuarse como una simple entrega de información y fuerte contribuyente a perpetuar el status quo de nuestras sociedades*. Igualmente, la autora trabaja con cierta profundidad la relación entre matemática y democracia, para lo cual considera, sin equivocaciones que la argumentación, el debate, la discusión y, esencialmente, el diálogo constituyen dimensiones centrales para el desarrollo de los procesos de aprendizaje-enseñanza, pero fundamentalmente para la verdeara interacción y producción de saberes y conocimientos entre los principales actores del proceso educativo. La autora no descuida, en su trabajo, el aspecto de la *racionalidad comunicativa y dialógica*, la cual debería ser el epicentro de toda clase de matemáticas dentro y fuera de las respectivas aulas convencionales.

El octavo trabajo tiene por título *¿Qué significa Pedagogía Crítica frente a la sociedad matematizada?*, escrito por Uwe Gellert, quien considera que vivimos actualmente en una sociedad altamente matematizada. Ello significa que debemos tomar muy en cuenta tanto a las matemáticas, en sentido general, como a la educación matemática escolar. Para ello se debe asumir a las matemáticas como parte esencial del poder formativo de toda la población, particularmente de las niñas, niños y jóvenes. El trabajo se centra en analizar con mucha precisión el papel que tienen las matemáticas en la vida cotidiana de nuestras sociedades modernas y altamente tecnificadas. El autor también se basa en la orientación de la teoría crítica para hacer su respectivo análisis y propuesta didáctica. Él indica, entre otros aspectos sustantivos, lo siguiente: *consecuentemente, si tenemos interés en una pedagogía y didáctica crítica, los poderes formativos de nuestras sociedades, y entre ellos en lugar central las matemáticas, merecen la atención en sumo grado*.

El siguiente trabajo, también del profesor Walter Beyer, tiene por título *Matemáticas, desarrollo humano, cultura y naturaleza*. Por la precisión y claridad del resumen, realizado por el autor, consideramos necesario colocarlo textualmente:

> *En el presente artículo se aborda la evolución de la matemática desde un punto de vista socio-cultural, basado en una visión crítica de los postulados de Bishop acerca del tipo de actividades transculturales, de carácter universal, las cuales pueden considerarse como generadoras de conocimiento matemático o en cierta medida, matemáticas en sí mismas: contar, localizar, medir, diseñar, jugar, explicar. Se parte de una discusión de las diversas concepciones y acepciones de la etnomatemática. En particular, se hará una visión evolutiva de las concepciones de D´Ambrosio. Se pretende poner en claro algunos mitos que pueden existir tras la etnomatemática, su base epistemológica, su potencialidad de ser vista como una concepción didáctica y su poder al ser concebida como programa de investigación en el sentido lakatosiano. Se estudian las seis actividades consideradas por Bishop dentro del ámbito de diversas culturas, muy especialmente en las culturas indígenas venezolanas. Como punto contrastante, se tomarán en cuenta distintos elementos presentes en la naturaleza: en el mundo animal, en el mundo vegetal y en objetos inanimados, los cuales parecieran tener connotaciones matemáticas.*

El noveno artículo de la presente compilación es del profesor Wladimir Serrano Gómez, el cual consiste en la *alfabetización matemática*. El profesor Serrano considera que la alfabetización matemática constituye uno de los aspectos fundamentales de la educación matemática en América Latina y el Caribe. Para ello, el autor realiza un análisis teórico, basado en documentos, sobre los procesos de alfabetización matemática en nuestros países. Él toma en cuenta, para sus reflexiones teóricas, la teoría crítica de la sociedad, en particular la teoría de la educación matemática, cuyo avance en la República Bolivariana de Venezuela ha sido altamente significativo; en particular, analiza los procesos sociopolíticos relacionados con la formación matemática básica de todas las personas escolarizadas o en proceso de alfabetización inicial y funcional. El autor entiende la alfabetización matemática desde la perspectiva del desarrollo de competencias matemáticas; para ello analiza, además, el problema de las crisis y los conflictos inherentes a los relacionamientos y poderes explícitos o implícitos en nuestras sociedades, lo que él denomina dimensión sociopolítica de la educación matemática. Este trabajo es altamente significativo para comprender la concepción de la educación matemática orientada en la formación crítica, reflexiva y liberadora de los sujetos, en el sentido individual, pero también del colectivo en general.

El profesor David Mora desarrolla el *trabajo didáctica crítica y educación crítica de las matemáticas*. Podríamos afirmar que la Educación Matemática Crítica (EMC), desde nuestro punto de vista, se encuentra en un momento trascendental en cuanto a la discusión teórica y su experimentación práctica en los diversos ámbitos del sistema educativo. Consideramos, sin embargo, que es necesario, para su desarrollo y consolidación, seguir abarcando mayores espacios de acción y reflexión, de acuerdo con la diversidad de experiencias y aportes en el marco internacional. En este sentido, el presente trabajo tiene por finalidad presentar ante la opinión de educadoras y educadores matemáticos nuestra concepción sobre la EMC. Para ello hemos visto pertinente, tratar detalladamente las siguientes temáticas: la concepción sobre la pedagogía crítica, el papel de la didáctica crítica en el aprendizaje y la enseñanza; la educación crítica de las matemáticas y, finalmente, desarrollar una discusión epistemológica sobre las cinco corrientes predominantes en educación matemática. Con este trabajo no pretendemos culminar nuestra mirada hacia la didáctica de las matemáticas y, especialmente, hacia la conformación de una teoría mucho más profunda sobre la EMC, cuyo objetivo fundamental consiste en ampliar el horizonte con respecto a la formación general básica, política, crítica y emancipadora de todas las personas.

El último artículo corresponde, nuevamente, al profesor Walter Beyer. El título del mismo consiste en lo siguiente: *educación matemática y dialéctica. Bases para una investigación científica*. El profesor Beyer basa sus reflexiones en un análisis crítico profundo de diversas investigaciones en el campo de las ciencias humanas, concentrándose básicamente en el área de las investigaciones relacionadas con la educación matemática. Él considera que estas investigaciones, en su mayoría, cometen algunos errores epistemológicos, como por ejemplo los altos niveles de subjetividad, que se amparan en enfoques socioculturales no siempre comprendidos o trabajados adecuadamente. Este tipo de trabajos también muestran una marcada superficialidad, debido esencialmente a un elevado relativismo cultural y un apego exagerado a ciertos anarquismos epistemológico y a la incorporación acrítica de orientaciones postmodernas. El autor no sólo hace este importante análisis crítico, sino que también realiza una propuesta muy importante, la cual consiste en *tomar como método el análisis dialéctico y, sobre la base de éste, se muestra aquí diversos constructos teóricos, los cuales podrían servir de fundamento para emprender investigaciones -profundas, bien fundamentadas, con resultados constatables, intersubjetivas- sobre temas importantes dentro del campo de la educación matemática*.

Para culminar la presentación de este importante libro sobre educación matemática desde una perspectiva crítica y sociopolítica, debemos señalar muy brevemente que nos encontramos, actualmente, en un profundo proceso de cambio de paradigma en cuanto al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, pero también del significado e importancia que tienen ellas en nuestras sociedades altamente tecnificadas e informatizadas. Para ello, la teoría crítica de la pedagogía y la didáctica contribuyen considerablemente no solo al análisis de las potenciales contradicciones socioeducativas, sino esencialmente al desarrollo concreto de propuestas revolucionarias para la educación matemática social, política, cultural y cognitivamente significativas. Los trabajos que componen el presente libro ayudan a complementar los importantes avances logrados hasta el momento por la República Bolivariana de Venezuela en materia de elaboración y distribución gratuita de libros de texto en contexto, pero también en las diversas políticas educativas que viene impulsando y fortaleciendo en los diversos ámbitos del sistema educativo. En este sentido, el GIDEM, identificado plenamente con la revolución sociopolítica, educativa y matemática, se compromete una vez más a apoyar la conformación de una educación matemática para la construcción del socialismo, donde el ser humano y la pachamama se conviertan definitivamente en la esencia de la vida y en la razón de ser de la educación-formación revolucionaria de todos los pueblos del mundo.

# ALGUNOS ELEMENTOS PARA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA EN VENEZUELA: CONOCER Y CONOCIMIENTO

*Dr. Wladimir Serrano Gómez*
*Profesor Asociado del Instituto Pedagógico de Miranda*
*J.M.S.M., U.P.E.L.*
*wserranog@gmail.com*

# EL CONOCER

## El saber sabio

Una de las nociones centrales en toda teoría de la Educación Matemática, es precisamente *saber* o *conocer*; en ella descansa buena parte de la idea que se asuma sobre la educación. Aquí no distinguiremos entre estos términos, aunque ello sí se hace, por ejemplo, en la *Didáctica Fundamental*.

Para algunos, el saber es algo que ha sido elaborado en el seno de una disciplina por parte de los científicos; los no-científicos o el común de las personas, sólo pueden aproximarse a ese saber, mas no crearlo. Para Brousseau (1990) *el saber nunca es exactamente el mismo para sus creadores, para sus usuarios, para los alumnos, etc., cambia* (p. 261). Esta tesis formula, en otras palabras, la *relatividad* del conocer, idea que compartimos, pero incluye además, la suposición de que el saber es creado por algunos (los matemáticos de profesión) y usado por otros, otras disciplinas científicas e incluso por los estudiantes; quizá para hacer aplicaciones de la matemática. Es este último supuesto, el que no seguimos.

> El matemático no comunica sus resultados tal como los ha hallado; los reorganiza, les da la forma más general posible; realiza una *didáctica práctica* que consiste en dar al saber una forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada, atemporal.
>
> El docente realiza primero el trabajo inverso al del científico, una recontextualización y repersonalización del saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau, 1994, p. 65).

La tarea del docente bajo esta perspectiva, es proponer al estudiante situaciones de aprendizaje con base en la recontextualización y repersonalización que ha hecho del saber del matemático. Consiste en hacer la *transposición didáctica*[1] del saber sabio (o saber del sabio) al saber enseñado; planteamiento que es central en la *Didáctica Fundamental*.

---

[1] Chevallard (2000, p. 45) define la transposición didáctica de la siguiente manera: Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El *trabajo* que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado *transposición didáctica*.

Entonces, adapta, modifica y reorganiza el saber del sabio, obteniendo así un saber a enseñar y, posteriormente, un saber enseñado. Los estudiantes deben apropiarse de este saber *adaptado* a través de las situaciones que proponga el profesor. *Para que la enseñanza de un determinado elemento del saber sea meramente posible, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado* (Chevallard, 2000, p. 16).

Ciertamente la *Didáctica Fundamental*, ha hecho aportes importantes a la reflexión sobre el proceso de aprendizaje-enseñanza de la matemática, entre ellos podemos citar: (a) la idea de vigilancia epistemológica, según este, el didacta se pregunta por las evidencias, cuestiona las ideas que parecen simples y se desprende de la engañosa familiaridad de su objeto de estudio (Chevallard, 2000), (b) la caracterización de los efectos *Jourdain*, *Topaze* y el *deslizamiento metacognitivo*, (c) la idea de contrato didáctico, así como, (d) sus planteamientos sobre las relaciones entre el docente, los estudiantes y el conocimiento matemático[2]. En este marco teórico, el matemático tiene una fuerte influencia en el *qué enseñar*, y no así el profesor junto con los estudiantes, restringiendo la actividad docente al *cómo enseñar*. Tesis que se contrapone a una Educación Matemática de naturaleza multi e interdisciplinaria.

En la *Didáctica Fundamental*, la matemática escolar tiene como único referente a la matemática que se ha desarrollado y organizado a través de los siglos, a la matemática del matemático de profesión. Es claro que teorías como la Geometría Lineal, en la que se fundan los conceptos y proposiciones euclidianas, las ecuaciones diferenciales, el cálculo integral o la teoría de números, por solo mencionar algunas, se han desarrollado, fundamentalmente, en el seno de comunidades científicas; pero muchas de estas ideas y actividades matemáticas, están también presentes fuera del *núcleo científico* al que hicimos referencia. La matemática es una actividad propia de la cultura y de los pueblos. Actividades como contar, medir, calcular, representar, estimar y modelar han sido naturales a la cultura

---

[2] Aún cuando desde esta perspectiva no se considera, desde una dimensión amplia, al contexto que envuelve las situaciones de aprendizaje-enseñanza.

de los pueblos[3]. Pensemos en el empleo de distintas *bases*, desarrollo de sistemas de números como el indio-arábigo, el propio a culturas indígenas como la Maya, o los Yanomami en Venezuela, los diversos patrones de medida que construyeron y aún tienen lugar en comunidades y pueblos, como las antropométricas y las que tienen como referente a objetos, los métodos de cálculo y registro como el ábaco, el marcador con esferas, el Quipu Incaico, entre otros.

Una cuestión central en este punto, es si la matemática que es propia a un grupo cultural aporta las herramientas necesarias para estudiar, comprender y transformar situaciones socioeconómicas y tecnológicas que le afectan. Es claro que la matemática no es la única fuente para alcanzar estos objetivos, o incluso, para plantearlos, pero representa una base importante para tomar decisiones en el amplio rango de la actividad social, económica, educativa y cultural. Este es un problema complejo. Podemos pensar en los grupos étnicos de nuestro país, y en la matemática para comprender el lado matemático de la opresión y desigualdades que viven los pueblos Latinoamericanos, en lo que es propio a otros grupos que integran la población de nuestro país y que tiene raíces en su seno. Los estudiantes de la Educación Primaria y Media[4], son formados en la matemática occidental bajo una concepción estructuralista de las matemáticas. La educación aquí consiste en apropiarse de la matemática desde una visión interna: se define, enuncia propiedades y aporta ejemplos, se explica y usa algoritmos, resuelven problemas y, en algunos casos, se demuestran propiedades. Es la matemática a imagen del matemático. En este caso, tampoco hay condiciones para comprender el lado matemático de la opresión y las desigualdades, y adicionalmente, el de la liberación de los pueblos a través de su concienciación y de la transformación. No las hay, pues esta educación no tiene tal contenido político. Es una educación que se orienta solo a la matemática como ciencia; se enmarca en la disciplina. Esta última visión está ligada a la idea de que las nociones y actividades matemáticas, son inherentes a los científicos, a los sabios. No obstante,

---

[3] **Bishop (1999) describe seis actividades: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar que han estado presentes en la matemática de los pueblos; estas son ampliadas por Mora (2005, p. 138) a nueve, incluyendo, además de las descritas por Bishop (1999), a: desplazar-movilizar, imaginar-observar y estimar-aproximar.**

[4] **En nuestra investigación usaremos indistintamente los términos *Educación Primaria y Media***

¿filosofar es algo exclusivo de los filósofos? Y filosofar es algo tan antiguo como el pensar matemáticamente. Así, podemos plantear preguntas similares para otras actividades.

La expresión *Nadie entre sin saber geometría*[5] no se circunscribe a la época griega. Hoy día, las estructuras tecnócratas y de opresión, tienen su sustento en este viejo precepto de *La Academia*, en el conocimiento que poseen y en el que no poseen los pueblos; mencionemos, por ejemplo, el caso PDVSA[6], los créditos denominados indexados, las *cuotas balón*, los impuestos en general, las *regalías* por concepto de explotación de recursos naturales (gas, petróleo, etc.), la deuda externa, problemas relacionados con los niveles de producción y de calidad agrícola en rubros de consumo básico, e incluso, en problemas como la drogadicción, el alcoholismo, hábito de fumar, embarazo precoz, etc. Así, entender a la educación matemática con la idea del saber sabio, del saber a enseñar y del saber enseñado, se puede relacionar con una concepción ingenua de la educación. Esta última sería una educación en desconexión con el hombre en el mundo; es como la filosofía que se da sin conexión con la realidad.

Actualmente, algunos adelantos teóricos en el seno de la matemática como disciplina científica, inciden notablemente en las estructuras económicas y sociales de nuestros pueblos.

> Nociones como la optimación, encriptación de datos, métodos estadísticos cuali-cuantitativos, cálculo diferencial e integral y sistemas de ecuaciones, teoría de matrices, interpretación y análisis gráfico, ecuaciones diferenciales, la idea del caos, entre muchas otras, soportan en parte a las decisiones políticas, económicas y sociales, y, al mismo tiempo, no son manejadas por el ciudadano en general.

Esta situación la podemos denominar *paradoja de la* ***sociedad de la información*** (Serrano W., 2005b).

Aludimos con ella el supuesto que siguen algunos autores (como Naisbitt, 1994) en el que identifican la *sociedad de la información* con un conjunto de estructuras más democráticas e igualitarias que las

---

[5] Platón, abandonando la modestia socrática, estaba seguro de conocer las exigencias del saber y el camino hacia el saber más estricto. El camino a la verdad lo relaciona con la geometría; considera a la geometría el fundamento de todo saber.

[6] Petróleos de Venezuela Sociedad Anónima.

correspondientes a la Sociedad Industrial y, en general, a las sociedades anteriores, arguyendo que en la sociedad contemporánea predomina lo mental y que todos podemos procesar información. Sin embargo, no todos tenemos acceso a la información a través de medios como la televisión, radio, Internet, etc. Tal como se ha estudiado en trabajos como Flecha (1994) y Macedo (1994). De hecho, aún no está superado el problema del acceso a la información y mucho menos, a la información confiable; no parece ser adecuado describir a la sociedad actual como *de la información*. *La paradoja* de la *sociedad de la información* hace referencia, como vimos, solamente a las nociones e ideas matemáticas que sustentan buena parte de las decisiones políticas, económicas y sociales, y contrariamente, no son manejadas por el común de las personas; aunque puede aplicarse a muchos otros aspectos de la historia, la ciencia, la tecnología y la cultura –esto es, podemos hablar de paradojas de la sociedad moderna. La *paradoja de la sociedad de la información* tiene raíces en la *paradoja de Vico*, planteada por Skovsmose (1999).

La ***paradoja de Vico***[7] tiene que ver con el hecho de que en la sociedad danesa el común de las personas no comprenda la tecnología que soporta su aparato industrial y las decisiones del gobierno que se basan en esta.[8]

Skovsmose se refiere a su sociedad, propia de un alto desarrollo tecnológico e industrial; sin embargo, esta paradoja también se presenta en muchos otros países, y en particular en el nuestro, y no sólo en el plano tecnológico. Un ejemplo de ello es la incomprensión y confusión en torno a las *encuestas a salida de urna* llevadas a cabo durante el *Referendo*

---

[7] **Giambattista [Giovanni Battista] Vico (1688-1744). Este filósofo italiano sostuvo la idea de que sólo podíamos conocer las cosas que el mismo hombre había creado. La tecnología es una de éstas; sin embargo, en la sociedad moderna el común de las personas no la comprende. Es por ello que Skovsmose utiliza la expresión *Paradoja de Vico*. Además, Vico planteaba, en clara oposición al racionalismo de su época, que la sociedad humana necesitaba más que la razón para funcionar bien. Necesitaba creencias y tradiciones. Criticaba también que no se formara a los jóvenes con interés por los asuntos de la sociedad en que viven. Vico, por otra parte, es considerado por algunos como uno de los primeros *antimodernos*; refiriéndose con ello a sus críticas al empirismo y racionalismo de su época y a la manera en que entendió la filosofía.**

[8] **En *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* (Skovsmose, 1999) describe algunos proyectos llevados a cabo por estudiantes (daneses) relacionados con *construcciones* y con la *energía*.**

*Presidencial* de 2004 en nuestro país; aquí, parte de la población no reflexionaba[9] sobre algunas de las características de este método: la muestra seleccionada, su nivel socioeconómico, lugares en los que se recogió información, errores de inferencia, la idea de aleatoriedad, entre otras, que fue aprovechado mediáticamente por grupos con intereses partidistas. Otro ejemplo es el cálculo que realizaron recientemente las instituciones financieras para el cobro de intereses sobre intereses en el caso de préstamos personales y la adquisición de vivienda y vehículos (el caso de los créditos indexados). La matemática juega un rol importante en las decisiones que afectan a la población en general, tal es el caso de los que tienen que ver con la seguridad alimentaria, asistencial y médica, con los niveles de producción y exportación de energía (petróleo, gas, entre otros) y rubros agrícolas y pecuarios, tasas de interés e impuestos, etc. Por ejemplo, se puede modelar matemáticamente el crecimiento de una población de insectos, que afectan negativamente un cultivo y tomar decisiones sobre el control de esta: ¿Cuáles son los efectos del uso de plaguicidas en esta población y en el medio ambiente? ¿El uso de plaguicidas perjudica a otros insectos que no deterioran el cultivo? ¿Qué ventajas tienen los cultivos orgánicos?, entre otras preguntas importantes. Nos referimos a una modelación, no por un matemático de profesión, sino por el ciudadano común (en este caso, los agricultores).

*La paradoja de Vico* y la o las *paradojas de la sociedad de la información*, llevan a preguntarse ¿qué puede hacer la educación para transformar esta situación? La *Educación Matemática Crítica* (ver Mellin-Olsen, 1987; Skovsmose, 1999; Valero, 1999; Mora, 2002, 2004, 2005; Mosquera, 1998; Serrano W., 2004, 2005a; 2005b; Serres y Serrano W., 2004), haciendo explícito el rol sociopolítico que tiene la educación, busca impulsar desde la práctica educativa la necesaria transformación de las estructuras políticas, sociales, económicas y culturales que soportan las desigualdades y las crisis. Transformación que pasa por revertir la situación que describen estas paradojas.

[9] Esto se puede asociar a muchos factores, entre ellos podemos mencionar (a) la incidencia mediática de los medios de información y de algunas fuentes partidistas y (b) la creencia generalizada de que estudiar la matemática escolar ausente de sus naturales vínculos con el contexto y la realidad llevará a los estudiantes a aplicar efi cazmente las ideas y técnicas matemáticas en las situaciones que se le presenten fuera de la institución escolar.

En este contexto surge la pregunta ¿es el saber del sabio el único referente para la educación matemática? Si solamente nos preguntamos qué matemáticas enseñar, podríamos suponer *a priori*, que las matemáticas a estudiar son sólo las que han organizado los matemáticos en el transcurso de la historia, y no la matemática que está presente en nuestra sociedad; se omitiría así la visión de la matemática en relación con la realidad y sus fenómenos, con sus problemas. Tal visión se ubica en el mundo de las ideas que describió Platón, y no en las ideas en conexión con la acción sobre el mundo y sus problemas. Suponer que el conocimiento matemático es producido exclusivamente por los sabios, deriva a la pregunta: ¿qué resta entonces a la actividad de aula en la Educación Primaria y Media, e incluso, en el Universitario? Fijar el saber del matemático, o el saber del sabio, como **único** referente para la educación matemática, conlleva una actividad encerrada en la matemática[10] que se ha estructurado lógicamente a través de los siglos y, desde nuestra perspectiva, es un supuesto que no impulsa la necesaria transformación del sistema educativo venezolano en función de la formación del ser crítico y del ser social.[11]

La idea del saber sabio como única referencia para el aprendizaje-enseñanza de la matemática, no es exclusiva a la *Didáctica Fundamental*. Aun cuando no es un término usado en otros desarrollos, constituye un soporte no explícito para sus planteamientos. Por ejemplo, en el *Pensamiento Matemático Avanzado* es central la visión que los matemáticos de profesión tienen de la misma matemática, de la educación, de los procesos que envuelve su pensamiento, así como de las ideas matemáticas a las que han llegado (conocimiento matemático).

Uno de sus intereses, es buscar elementos en la actividad y en el pensamiento de los matemáticos, cuando éstos resuelven problemas e investigan, con la intención de compararlos con el tipo de pensamiento en estudiantes de la Educación Primaria y Media. Tall (1991) lo expresa así al comienzo de su trabajo: *Aunque consideraremos la naturaleza del pensamiento matemático avanzado desde un punto de vista psicológico,*

---

[10] Que aquí llamamos actividad intramatemática. Ejemplos de ésta son los siguientes: probar un teorema, aplicar un algoritmo, estudiar las propiedades de una ley o las de una relación, entre otras.

[11] El ser crítico y el ser social se relaciona con la auténtica libertad. En lo que respecta al ser social, se encuentra raíces de esta relación en los trabajos de Marx (1986) [ver también Bichko, 1973].

*nuestro principal objetivo será buscar penetraciones de valor en el trabajo profesional del matemático como investigador y como profesor* (p. 3). Si bien consideramos que ésta es una fuente importante de análisis de la actividad y pensamiento matemáticos, hemos ya señalado que no es la única referencia para ello.

Otros trabajos dentro del enfoque psicológico y el *Acercamiento Socioepistemológico*, entre otros, también asumen implícitamente la idea del saber sabio. Tal visión puede llevar a una educación cuyo eje es el estudio de aspectos de la estructura formal de la matemática, de una matemática separada del potencial papel que puede jugar en la sociedad. Es una educación disciplinar, desvinculada de la realidad social, cultural e histórica.

Una educación así, tiene como objetivo que los estudiantes se apropien de parcelas modificadas del saber sabio, mas no la apropiación de saberes y construir otros en función de la comprensión y/o transformación de problemas y crisis, esto es, tal como explicará Freire (1990, p. 32): *estudiar, si se busca la formación del ser crítico,* ***no es consumir ideas, sino crearlas y recrearlas***. Naturalmente, el estudio disciplinar de las matemáticas obedece a otros intereses; el problema surge cuando los profesores confunden éstos con los de la Educación Primaria y Media, e incluso, generalmente, con el de los estudios universitarios.

La verdad en el contexto de la idea del saber sabio, es la de la ciencia matemática, fundamentalmente la del formalismo en la matemática. El conocimiento aquí se relaciona con la deducción y lo universal. Podemos plantear entonces la pregunta: ¿cómo es la verdad en la Didáctica Fundamental, en el *Acercamiento Socioepistemológico* o en el *Pensamiento Matemático Avanzado*? La verdad es la característica de todo conocimiento matemático, bien porque ciertas proposiciones se las asume como tales (axiomas), porque ya se las ha probado (teoremas, lemas, corolarios) o porque se cree que así lo sean (conjeturas). Esta relación estrecha entre conocimiento y verdad en la ciencia matemática, ha opacado la manera de ver, desde la educación, el conocimiento escolar. Es por ello que las tendencias multi e interdisciplinarias de la Educación Matemática, han calado poco en la práctica; aunque tampoco constituyen una tesis generalizada en los estudios teóricos. Desde esta última perspectiva, la definición del conocimiento a partir de la verdad, no explica completamente su naturaleza; esta descansa más bien en el significado. Visión que se da en el *Interaccionismo Simbólico*, en el *Enfoque Sociocultural*, en la *Etnomatemática* y en la *Educación Matemática Crítica*, perspectivas que aun cuando poseen bases filosóficas y pedagógicas distintas, comparten la idea de que el significado se construye socialmente, y no la de un significado identifi cado únicamente con la estructura lógica de la matemática (propia de una actividad escolar intramatemática).

Este problema (el asociado al *saber sabio* como única referencia para la educación) supone que se *adiciona* a la naturaleza del conocer, el ámbito de la actividad intelectual de los matemáticos de profesión, lo cual puede relacionarse con el supuesto que describió a *La Academia* como única fuente [legítima] de producción del saber; los sabios como fuente de producción del saber. Sin embargo, también podemos pensar en las estructuras tecnócratas de la actualidad, en las tecnocracias, como los *ambientes* en los que se *concentra* el conocimiento; y en las estructuras opresoras que utilizan la *tenencia* del conocimiento o del saber como medio de poder.

En cambio, la construcción social del significado como una base de los planteamientos pedagógicos que aquí se sigue, es común a todo grupo, tal es el caso del aula de matemáticas y de otros lugares de aprendizaje. La posibilidad, origen, esencia, formas de conocimiento y su relación con el significado, no son conceptos exclusivos al conocimiento *del sabio*, lo son también en el conocimiento que tiene lugar fuera del núcleo científico de esta ciencia: en la vida cotidiana, en el trabajo o en ambientes de estudio como la escuela. He allí uno de los potenciales roles de la educación.

Ciertamente estas ideas responden desde otra óptica a preguntas como: ¿se logra conocer el objeto? y ¿obedece el conocimiento sólo a la razón o a la experiencia? Considérese la proposición *Por un punto exterior a una recta L pasa una única recta L´ paralela a L*. En la Geometría Euclídea es algo que no se puede probar a partir de los demás postulados; es en sí otro postulado (el quinto). Consiste en un hecho cuya verdad es considerada evidente en el marco de la estructura en que Euclides, organizó las ideas geométricas. Aunque a través de cierta experimentación puede llegarse al mismo planteamiento (no el que represente un postulado, sino el que por ese punto pase una única recta paralela a L). Pero el álgebra lineal aporta herramientas para demostrar lo que en los *Elementos* es un postulado; actividad que está contemplada en los estudios universitarios (por ejemplo, en los del profesorado en matemáticas de nuestro país[12]).

En otras geometrías tal proposición debe replantearse. Esto es, los objetos matemáticos (punto, recta, triángulo, función, grupo, espacio vectorial, límite, etc.), así como muchas propiedades pueden, en efecto, conocerse. La misma matemática aporta las reglas y medios para ello. Postura que goza de crédito en gran parte de los matemáticos de profesión. No obstante, si miramos *fuera* de la ciencia matemática, por ejemplo, a la actividad matemática en la Educación Primaria y Media, desde un enfoque multi e interdisciplinar, entonces podemos preguntarnos ¿es posible conocer?, lo cual lleva a la pregunta ¿es posible conocer algo fuera de la ciencia? El idealismo no es una postura filosófica que sea común entre los profesores de matemática; se asume a priori que podamos conocer objetos y hechos. Pero sí es común el *cientifismo*: no se ve a la ciencia matemática como una forma de conocimiento posible, sino que se identifica el conocimiento con la ciencia (Habermas, 1982: p. 13).

Esta es, quizás, la razón de fondo que sustenta la común actividad escolar intramatemática. ¿Qué lugar ocupan entonces otras formas de conocimiento en el aula de matemáticas? ¿Qué papel juega en ello la experiencia, la relación con la realidad y el contexto social? ¿Es el conocimiento matemático un producto de la razón, y sólo de ésta? Dentro de la ciencia matemática podemos pensar en el papel de la representación y la experiencia en la geometría Euclídea, en los numerosos cálculos de Gauss que le permitieron conjeturar cuál es la densidad de primos en un entorno de n o en la modelación de la realidad (a través de la definición de recta[13], fractales, caos, correlaciones, etc.), por citar algunos ejemplos; de hecho, en toda área de la matemática está presente la experiencia.

---

[12] En la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Miranda.

[13] Recordemos la idea de recta como *mitad de una hipérbola*, contrario a como se entiende en los *Elementos*: *longitud sin anchura*. Einstein usó esta nueva geometría (la hiperbólica) en sus cálculos astronómicos: en un espacio vacío los rayos de luz describen una trayectoria recta (como en Euclides); sin embargo, en nuestro espacio, los rayos de luz, en su trayectoria, describen mitades de hipérbolas ante la presencia de una gran masa.

En contraste con el cientifismo en la educación matemática, existen otras formas de conocimiento posible, vinculadas con la experiencia, los sentidos y la actividad. Aquí podría alegarse que, como en el caso de la asunción a priori del común de los profesores, es un supuesto que de hecho podamos conocer. No obstante, en muchos casos puede recurrirse al sentido común como medio para convencernos de la existencia de las cosas. Skovsmose (1999) en *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*, se vale de la *Prueba de la existencia del mundo exterior* de Moore (1983) para garantizar que las crisis son tales y caracterizan a la sociedad.[14] La prueba de Moore es un recurso filosófico importante que plantea lo que la educación matemática puede hacer en nuestra sociedad. Por otra parte, la educación matemática tiene un importante papel en la comprensión de las cosas y los hechos del mundo, del hombre en relación con el mundo real ¿Cómo comprender, o incluso, pensar en una educación con tal sentido político si se observan los hechos sociales y sus relaciones con una lente idealista? Esta lente o la indiferencia ante el rol político de la educación, es una manera de consolidar el *statu quo*, y con ello, sus desigualdades e injusticias. El saber sabio y el saber a enseñar, en tanto construcciones que comúnmente se presenta a los estudiantes sin los vínculos con la historia de la sociedad y su naturaleza, con el hombre y su humanización, con sus valores y antivalores, adquiere una dimensión política o bien limitada o engranada con una educación crítica, alienante. Es una educación para la especialidad, no para la humanización del hombre; y, como hemos señalado, puede asociarse, en la Educación Primaria y Media con la concepción bancaria que describió Freire (1970).

---

[14] Moore sostiene que puede hacer una gran cantidad de demostraciones distintas de que existen cosas fuera de nosotros. Su trabajo es una respuesta a las corrientes filosóficas que no aceptaban la existencia de cosas fuera de nosotros, que éstas eran sólo estados mentales o que existían en nuestra mente y nada más, y a las que se consideraba importante suministrar una prueba de ello. Entre estos últimos se encontraba Kant: *somos incapaces de atacar sus dudas [las de alguien que no acepte la existencia de cosas fuera de nosotros como una cuestión de fe] con una prueba satisfactoria*. Moore (1983) expone una de estas pruebas: *Puedo probar ahora, por ejemplo, que existen dos manos humanas. ¿Cómo? Levantando mis dos manos y diciendo, a la vez que hago un gesto con mi mano derecha, «Aquí hay una mano», y añadiendo, mientras hago un gesto con la izquierda, «y aquí hay otra». Si al hacer esto, he probado ipso facto la existencia de cosas externas, todos verán que puedo hacerlo también de muchísimos modos diferentes: no hace falta multiplicar los ejemplos* (pp. 155-156). La prueba de Moore y su sentido invitan a pensar en la existencia de crisis en nuestra sociedad como la pobreza o la opresión. La educación no puede permanecer ciega a la existencia de estas crisis, al menos las que no escapan al sentido común.

El saber sabio como única referencia para la educación matemática en la Educación Primaria y Media, e incluso, en la Educación Universitaria, tal como hemos sostenido, no permite abordar desde el contexto del aula el conocimiento y el conocer que es propio a los diversos grupos culturales que conforman la sociedad venezolana; ello tiene que ver con el grado de especialización, atomización y compartimento del diseño curricular –tesis que puede explicar situaciones similares en otras sociedades más allá de la Latinoamericana. El conocimiento y el conocer matemático que han desarrollado históricamente los pueblos en el marco de la agricultura, la pesca, la caza, en otras áreas de la producción de alimentos, en la atención a las enfermedades y afecciones, así como en el uso y conservación del agua, de las tierras productivas, de la fauna y la flora, y de los minerales, las tecnologías empleadas en ello, y su interpretación del hombre, el tiempo y del espacio, constituyen aquello que algunos autores denominan *saber no-científico*, *pre-científico*, *vulgar* o *ingenuo*; siguiendo precisamente el cientifismo al que aludió Habermas (1982). Así, de acuerdo con esta *visión cientifista*, la matemática (o la ciencia en general) no es una más de las formas, sino la única forma de construir conocimiento. Ello, de acuerdo con nuestra posición, ha permitido que desde algunas corrientes de la educación matemática, y de la educación formal en general, se haya pretendido distanciar el ámbito de la construcción de conocimientos y el proceso de conocer en sí de la realidad histórica, social y cultural de los pueblos del *saber popular*. Pensamos que una educación matemática no debe separarse del saber popular. Esta idea resume nuestras críticas al concepto de saber sabio en la Didáctica Fundamental, y al saber en la *Socioepistemología*, en el *Pensamiento Matemático Avanzad*o, así como en otras corrientes de la Educación Matemática; además, permite delinear la concepción de esta noción en una *Educación Matemática Crítica* para la sociedad venezolana.

## ALGUNAS FUNCIONES DEL CONOCIMIENTO DESDE LA EDUCACIÓN

Ahora bien, partiendo de las ideas que hemos discutido sobre el saber sabio y el saber popular, podemos preguntarnos por la o las funciones del conocimiento, considerando el potencial rol sociopolítico de la educación matemática (y de la educación) en la sociedad. ¿Cuál o cuáles son las funciones del conocimiento desde la educación matemática? Esta, tal como se refiere al saber, es una discusión compleja. Incluso, podemos preguntarnos ¿tiene sentido discutir sobre la o las funciones del conocimiento en educación matemática? ¿Acaso no es el aprendizaje y manejo de los conceptos y técnicas de la matemática escolar? El saber sabio como noción relevante para algunas corrientes, ha permitido observar que tal educación posee una orientación hacia la actividad intramatemática, donde el contexto que envuelve a las situaciones didácticas, se limita al aula[15] y no al que hemos delineado párrafos atrás. En este sentido, preguntarnos por las funciones del conocimiento en educación matemática, puede aportar elementos importantes para la comprensión de la naturaleza en sí de tal educación estudio que resulta medular en esta investigación. Explicitar la dimensión sociopolítica de la educación, y de la educación matemática en particular, pasa por valorar algunas de las concepciones que sobre el saber o el conocimiento se ha fijado en parte la comunidad de investigadores, pedagogos y estudiantes.

Es difícil caracterizar estas funciones, tanto como estudiar la naturaleza del conocimiento. De hecho, la realidad histórica de nuestras sociedades y culturas, así como las diversas actividades que ha llevado a cabo el hombre, ha configurado una diversidad de ellas. Nos interesa en particular considerar el conocimiento y su papel (o posible papel) en la sociedad y en el desarrollo del hombre. Otros intereses llevarían a otras categorizaciones distintas a la que expondremos aquí, aún cuando ésta no es completa ni disjunta.

1. *Función Mercantilista*. Esta función es el núcleo de los modelos pedagógicos basado a partir de la entrega de información (fundamentalmente) por el profesor y la recepción de ella por parte de los estudiantes. Es la *educación bancaria* que describió Freire (1970) y la base de la *fantasía teórica* a la que alude Eisenberg (1991).

La metáfora de Freire identifica a la educación con una lógica mercantilista en la que el conocimiento (o el saber) es la mercancía o el objeto que tiene el profesor y la entrega a los estudiantes. Este modelo aún se encuentra presente en todos los niveles y modalidades de la educación en los ámbitos nacional e internacional. En la educación matemática esta lógica encuentra ejemplo en las experiencias caracterizadas por la exposición por parte del profesor de definiciones, conceptos, aplicación de algoritmos, demostración de teoremas y resolución de problemas o ejercicios; y en

[15] Ver, por ejemplo, la idea de *noosfera* en la *Didáctica Fundamental*, o la noción de *situación* en el *Pensamiento Matemático Avanzado* (aún cuando no la defi nen explícitamente).

la interpretación de los estudiantes de esta información, así como en el trabajo en ciertos ejercicios o problemas.[16] Las experiencias centradas en los algoritmos son también un ejemplo de la función mercantilista del conocimiento al interior de la educación matemática. Además, muchos de los libros de texto para la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional, así como para la educación universitaria se escribe siguiendo implícitamente la función mercantilista del conocimiento.

> La función mercantilista del conocimiento conlleva una concepción *minimalista* de la educación; un vaciamiento de su naturaleza –es la *educación del dar/recibir*. Asumir esta función del conocimiento ha afectado no solamente la práctica educativa en el contexto del aula sino que ha servido de base para el diseño curricular en la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional venezolana, así como en la Universidad situación que también se ha dado en el ámbito internacional.

El *currículo sumativo*, con el consecuente compartimento que genera, es un ejemplo de ello. Además, podemos citar un supuesto que subyace a muchos de estos diseños curriculares: el de *dotar de herramientas y de técnicas a los estudiantes desde las distintas especialidades con la intención de que ellos las apliquen (posteriormente) en sus campos laborales, en la cotidianidad o en el medio académico*. Tesis que es contraria a la necesaria vinculación de la educación matemática con la realidad –que aquí sostenemos.

En Venezuela, esta vinculación educación-realidad ha adquirido nuevos espacios (teóricos y prácticos) desde la *Escuela Bolivariana* y desde el *Liceo Bolivariano*. Sin embargo, buena parte de las Universidades han dado tímidos y escasos pasos en esa dirección, en especial en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.[17]

---

[16] Skovsmose (2000) las relaciona con lo que denomina *paradigma del ejercicio*.

[17] Precisamente la principal Universidad de formación de docentes en el país. En ella no ha sido central la discusión sobre los fundamentos filosóficos y pedagógicos de la *Educación Bolivariana* ni sobre la *metodología de trabajo por proyectos* en la que ésta se apoya para sus fines prácticos. Sus programas de estudio no han sido estudiados estructuralmente en función de estos fundamentos. Por otra parte, muchos de los cambios que se han dado en la UPEL tienen que ver solamente con los aspectos técnicos de implementación de la metodología de trabajo por proyectos y no con un estudio amplio al respecto. Quizás ello puede explicarse por medio de la descripción que hizo Feyerabend (1989) de una de las formas de hacer ciencia en la modernidad: (a) separando su objeto de estudio del contexto, de la filosofía y de la historia, (b) ciñéndose a unas reglas del tipo axiomáticas [tal como en las matemáticas desde el *formalismo* y desde el *logicismo*] y (c) considerando al error un hecho lejano a la ciencia o al que hay que alejar de ella. O bien, recordando las preguntas que planteó Bhaskar (1975): ¿cómo debe ser la ciencia para estudiar el mundo? y ¿cómo debe ser el mundo para que sea estudiado por la ciencia?

2. *Función Hegemónica-Tecnócrata*. Los modelos pedagógicos orientados a la reproducción de las estructuras sociales existentes, tienen relación con la función hegemónica y tecnócrata del conocimiento en tanto que no se propone transformarlas. Así, el *statu quo* es la referencia y el fin último al cual debe atender la educación formal (en las instituciones educativas) y no-formal (la que se da a través de los medios de comunicación e información, de las producciones cinematográficas, juegos de video, etc.).

La función hegemónica y tecnócrata del conocimiento, tiene que ver con la posesión de éste por ciertos grupos como medio para apropiarse y consolidar su poder socioeconómico sobre las mayorías de la población. Aunque también la relación se da a la inversa: el poder socioeconómico también es usado como herramienta para apropiarse de conocimientos que sirvan a sus intereses hegemónicos.

Aquí son muchos los ejemplos; solo citaremos algunos: (a) las patentes nacionales e internacionales sobre medicinas como medio para monopolizar su distribución y mercado, (b) la apropiación de tecnologías computacionales para detentar el poder (tal es el caso del manejo del cerebro tecnológico de PDVSA luego del golpe de Estado de 2002 en Venezuela como medio de desestabilización y consolidación de sus intereses partidistas), (c) el desarrollo de la *tecnología nuclear* como fuente para el posicionamiento y ocupación militar, económica y geopolítica desde la Segunda Guerra Mundial –un comentario similar puede hacerse con respecto a la *tecnología satelital*, (d) la manipulación genética de productos agrícolas para satisfacer patrones de consumo de la sociedad moderna con el consecuente daño a los pequeños productores y campesinos de los países del sur, (e) el uso de la psicología y de la lógica del mercado como medio para promover el consumo de cigarrillos (alcohol, etc.)[18], en los jóvenes, entre otros. En el otro *sentido*, puede citarse la dificultad que históricamente se dio para que la mayoría de la población accediera a los programas de formación en las universidades públicas y privadas del país, y en los demás niveles y modalidades de la educación, así como en otras áreas vinculadas al desarrollo cultural (como el arte: la música, la danza, el ballet, la pintura, el teatro, etc.).[19]

---

[18] Apoyados en los llamados *estudios de mercado*.

[19] Ahora incorporadas a la formación del estudiante en muchas de las Escuelas Bolivarianas y en muchos de los *Liceos Bolivarianos*.

En ello se apoya el concepto de tecnocracia que describe Skovsmose (1999), e incluso, el sistema capitalista en su conjunto.

Las relaciones de poder y opresión en el contexto del aula (Bernstein, 1997; Chomsky y Foucault, 2006; entre otros) constituyen ejemplos de la reproducción de uno de los aspectos del *statu quo*, de la realidad; en ese sentido se orienta la hegemonía de grupos sobre la sociedad en su totalidad. La educación matemática no escapa de estas prácticas. En Beyer (2002), por ejemplo, se discute la naturaleza de la *equidad*[20] en el aula de matemáticas; concepto que puede ayudar a comprender las relaciones de poder y opresión que se consolidan desde el aula. La inequidad en el aula es, entonces, una manera de favorecer la hegemonía y la tecnocracia en la sociedad.

He allí la importancia que vemos en la caracterización de las funciones del conocimiento.

Poseer el saber matemático, es la forma que tiene la educación, de ubicar a sus poseedores en ciertas estructuras de la sociedad y entre ellas las estructuras tecnócratas.

Esta función del conocimiento caracteriza una educación por el *statu quo*.[21]

La *educación del dar/recibir* sirve a una educación por el *statu quo*.

3. *Función Humanística*. Las funciones mercantilistas y hegemónica-tecnócrata del conocimiento desde la educación, y desde la educación matemática en

[20] Concepto que se interrelaciona con la *cosmovisión* [weltanschauung] (visiones de la matemática, de la educación matemática y de la sociedad) del profesor y de los estudiantes. *La equidad se refiere a tratar a los estudiantes de manera justa y equitativa* (Beyer, 2002, p. 17); tiene que ver con: (a) Maneras diferentes de demostrar competencias, (b) Instrucción diferenciada a los estudiantes acorde con los diferentes estilos de aprendizaje, (c) Tiempo variable dedicado por el docente a cada estudiante y ayuda por parte de éste de acuerdo con las necesidades del educando, (d) Provisión de materiales curriculares bilingües a aquellos estudiantes cuyo idioma materno no sea el castellano (por ejemplo a las comunidades indígenas), etc. Este autor deja claro que la equidad y la igualdad no son sinónimos; esta última consiste en tratar a todos los estudiantes de la misma manera.

[21] Ver también Medina (2005).

> particular, guardan relación con la sociedad que ha construido el hombre, fundamentalmente en la modernidad [en especial con las estructuras que soportan sus modelos económicos y de desarrollo][22] y con el concepto del hombre sobre sí mismo.

La *educación del dar/recibir* y la *educación por el statu quo* ofrecen una visión limitada del concepto de hombre, así como de su papel en su realidad social y cultural en tanto que amputan la posibilidad de construir colectivamente ideas teóricas y de emprender acciones prácticas transformadoras en y de su entorno. En ellas, la formación del hombre tiene que ver con la adaptación de este al contexto, al mundo; no con su transformación. Estas ideas no pueden separarse de una educación matemática crítica.

*El conocimiento no modifica por sí mismo el mundo; es como si abriese el camino para la modificación sensorial de los objetos. Como esto va dirigido a la subordinación de la realidad al hombre, a la sociedad, a su humanización, el conocimiento que estimula tal cambio cumple la* ***función humanística de asimilación ideal a la realidad*** (Bichko, 1973, p. 39). Bichko (1973) describe solamente la función humanística del conocimiento, no habla de las dos primeras que se ha expuesto párrafos atrás. Este autor sostiene que el conocimiento puede y debe servir a la humanización del hombre –premisa que siguieron el *Marxismo*, la *Teoría Crítica*, la *filosofía de la ciencia* y el *Realismo Crítico* de Bhaskar (1975, 2005); la Pedagogía Crítica, el pensamiento de Freire (1969, 1970, 1974, 1975, 1978, 1990) y la *Educación Matemática Crítica.*

La humanización del hombre tiene que ver con las transformaciones cognitivas de las formas cómo se percibe el mundo, la sociedad, el papel del hombre en ella, así como la transformación de la sociedad en sí misma, de sus crisis y estructuras opresoras.

Las matemáticas escolares y la educación matemática, esto es, el conocimiento matemático, tienen un rol potencial en ambos aspectos de

---

[22] Aunque esta función del conocimiento también apoyó modelos pedagógicos en otros momentos históricos. Ella, así como la transformación de la sociedad en sí misma, de sus crisis y estructuras opresoras.

la humanización; en ese sentido hablamos de una función humanística del conocimiento. Desde la *Pedagogía Crítica* y la *Educación Matemática Crítica* se ha hecho importantes aportes teóricos y prácticos para la humanización del hombre.

> Las ideas matemáticas, sus representaciones, los modelos y los algoritmos, tanto de las matemáticas que se han organizado lógicamente a través de los siglos (la ciencia matemática) como de las matemáticas propias de los grupos culturales (las matemáticas culturales), así como los paquetes de cálculo, las bases de datos y otras tecnologías, constituyen elementos que tienen un potencial papel (desde la educación matemática) en las transformaciones cognitivas que implica la humanización del hombre; y consecuentemente en su actividad individual y colectiva ante su sociedad y la realidad.
>
> La función humanística del conocimiento caracteriza una *educación que, denominamos crítica.*

Esta educación se caracteriza por la búsqueda de equidad en el contexto del aula de matemática; además, los algoritmos no son concebidos como contenido (como en el paradigma del ejercicio), más bien busca complementar, por ejemplo, la resolución de problemas, los proyectos y la modelación entre otras metodologías y actividades matemáticas.

La tabla que sigue sintetiza algunos aspectos (criterios para una definición, papel del saber, concepción de la educación asociada) de las tres funciones del conocimiento que hemos caracterizado.

La tesis del saber sabio en educación se relaciona con las funciones *mercantilista* y *hegemónica/tecnócrata* del saber.

***Cuadro 1. Tabla comparativa entre algunas funciones del conocimiento en la educación matemática***

| | **Función Mercantilista** | **Función Hegemónica-Tecnócrata** | **Función Humanista** |
|---|---|---|---|
| Criterios para una definición | Es el núcleo de los modelos pedagógicos a partir de la entrega de información fundamentalmente) por el profesor y la recepción de ella por los estudiantes. Es la educación bancaria que describió Freire (1970) y la base de la fantasía teórica a la que alude Eisenberg (1991). | Es la base de los modelos pedagógicos que orientados a la reproducción de las estructuras sociales existentes, se relaciona con la función hegemónica y tecnócrata del conocimiento en tanto que no propone transformarlas. Esta función tiene que ver con la posesión de éste por ciertos grupos como medio para apropiarse y consolidar el poder socioeconómico sobre las mayorías de la población; aunque también la relación se da a la inversa. | Núcleo de los modelos pedagógicos en los que la formación del hombre escapa de la adaptación de este al mundo, al *statu quo*; y que se orientan a la humanización del hombre en sí y a la transformación del mundo. Es el modelo que se describe en la Pedagogía Crítica y en la Educación Matemática Crítica. |
| Papel del saber | Es la mercancía dentro del modelo pedagógico. | Es una posesión y un medio para consolidar, desde la educación, la hegemonía de las estructuras tecnócratas. | Es un medio que puede y debe servir a la humanización del hombre. |
| Concepción de la educación asociada | Es la educación del dar/recibir. | Es la educación por el *statu quo*. | Es la educación crítica. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Elementos en una educación matemática | • Experiencias centradas en la exposición del profesor y en la ejercitación de los estudiantes (paradigma del ejercicio).<br>• Énfasis en los algoritmos como contenido. | • Experiencias que reproducen en el aula de las relaciones de poder y opresión que están presentes en la sociedad.<br>• Inequidad en el contexto del aula de matemáticas.<br>• Poseer el saber matemático es la manera que tiene la educación de ubicar a sus poseedores en ciertas estructuras de la sociedad –y entre ellas a las estructuras tecnócratas.<br>• No necesariamente hay énfasis en los algoritmos. | • Experiencias orientadas a las transformaciones cognitivas de la forma como se percibe el mundo, la sociedad, el papel del hombre en ella; así como orientadas a la transformación de la sociedad en sí misma, de sus crisis y de sus estructuras opresoras.<br>• Búsqueda de la equidad en el aula de matemáticas.<br>• No hay énfasis en los algoritmos |
| | *Tesis del SABER SABIO* | | El saber popular y científico son importantes para una educación matemática crítica |

## A manera de conclusión

Habermas (1982) sostuvo que *después de Kant la ciencia ya no ha sido seriamente pensada desde una perspectiva filosófica* (p. 12). Él sostuvo que la teoría del conocimiento se ha sustituido por una metodología vaciada de todo pensamiento filosófico (Ibíd.). Este no es el caso de algunos desarrollos en educación como la Pedagogía Crítica y la *Educación Matemática Crítica*. Con esto expresamos también que otros desarrollos, tal es el caso de la *Didáctica Fundamental*, de las perspectivas centradas en el método didáctico cuya reflexión filosófica no se corresponde con el contexto socioeconómico, cultural e histórico, o de las que se da en el marco de una no-realidad o de una realidad atomizada (semirealidad), no han sido pensadas *seriamente* hasta ahora. Es decir, si nos circunscribimos a la estructura metodológica de la ciencia difícilmente podríamos objetar algo al proceder científico, salvo si pensamos, como 26 hizo Feyerabend (1989), en lo que denomina *simplificación racionalista del proceso ciencia* (Feyerabend, 1989: pp. 11-12); proceso que consiste en separar cierto dominio de investigación del resto de la historia. Ello conlleva a que, quien se entrena en ese dominio científico, se condiciona a tal lógica. En cambio, si vemos más allá de la metodología de la ciencia (de la educación o de la pedagogía, en nuestro caso), no escaparían preguntas básicas como ¿qué hombre se busca formar?, ¿para qué educar?, ¿es la educación simplemente la entrega/recepción de información?, ¿es acercarse únicamente al saber sabio?, ¿es su función la especialización del hombre?, ¿o la educación tiene un potencial rol en la transformación del mismo hombre de la sociedad y del mundo?

Por otra parte, la función humanística del conocimiento, se vincula con una educación crítica de la matemática. Este planteamiento puede orientar desarrollos similares en otros países de América Latina, atendiendo naturalmente a la realidad que envuelve a su sociedad, así como a su historia, economía, cultura, necesidades y problemas característicos; constituyéndose al mismo tiempo en elemento para una educación matemática crítica en nuestra región.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

**Bernstein, B**. 1997. *La estructura del discurso pedagógico. Clases, códigos y control (IV)*. Madrid: Morata.

**Beyer, W.** 2002. *Equidad y educación matemática*. Universidad Central de Venezuela. Trabajo no publicado.

**Bhaskar, R**. 1975. *A realist theory of science* [Documento en línea]. Disponible: http://www.raggedclaws.com/criticalrealism/archive/rts/rts. html [Consulta: 2005, Junio 16]

2005. *Realismo crítico, relaciones sociales y defensa del socialismo* [Documento en línea]. Disponible: http://www.vientosur.info/articulosweb/noticia/index. php?x=37 [Consulta: 2005, Junio 16]

**Bichko, I.** 1973. *Conocimiento y libertad*. Montevideo: Ediciones Pueblos Unidos.

**Bishop, A.** 1999. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós. [Traducido por Genís Sánchez del original en inglés *Mathematical enculturation*, 1991, Kluwer Academic Publishers].

**Brousseau, G**. 1990. *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (I)*. *Enseñanza de las Ciencias*, 8(3), 259-267.

**Brousseau, G**. 1994. Los diferentes roles del maestro. En: C. Parra (comp.) et al., *Didáctica de la matemática* (pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós.

**Chevallard, Y**. 2000. *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed.). Buenos Aires: Aique.

**Chomsky, N. y Foucault, M**. 2006. *La naturaleza humana: justicia versus poder*. Buenos Aires: Katz Editores.

**Eisenberg, T**. 1991. *Functions and associated learning difficulties*. En: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Holland: Kluwer Academic Publishers.

**Feyerabend, P.** 1989. *Contra el método*. Barcelona: Ariel.

**Flecha, R.** 1994. Las nuevas desigualdades educativas. En: M. Castells, R. Flecha, P. Freire, H. Giroux, D. Macedo y P. Willis, *Nuevas perspectivas críticas en educación*, (pp. 55-82), Barcelona: Paidós.

**Freire, P.** 1969. *La educación como práctica de la libertad*. México: Siglo Veintiuno Editores.

**Freire, P**. 1970. *Pedagogía del oprimido*. México: Siglo Veintiuno Editores.

**Freire, P**. 1974. *Educación para el cambio social*. Buenos Aires: Tierra Nueva.

**Freire, P.** 1975. *La desmitificación de la concientización*. Bogotá: América Latina.

**Freire, P.** 1978. *Educación liberadora* (4ª ed.). Madrid: Zero.

**Freire, P.** 1990. *La naturaleza política de la educación: Cultura, poder y liberación*. Madrid: Paidós.

**Habermas, J.** 1982. *Conocimiento e interés*. Madrid: Taurus.

**Macedo, D.** 1994. *Nuestra cultura común: una pedagogía engañosa*. En: M. Castells, R. Flecha, P. Freire, H. Giroux, .D. Macedo y P. Willis, *Nuevas perspectivas críticas en educación*, Barcelona: Paidós.

**Marx, C.** 1986. *El capital* (I, II y III). México: Siglo XXI.

**Medina, R.** 2005. *La pedagogía tecnocrática a la luz del pensamiento pedagógico universal*. Caracas: Fondo Editorial del IPASME.

**Mellin-Olsen, S.** 1987. *The politics of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

**Moore, G.** 1983. *Defensa del sentido común y otros ensayos*. Barcelona: Orbis. [Traducido por C. Solís del original en inglés Philosophical papers, 1959, George Allen & Unwin].

**Mora, C. D.** 2002. *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Caracas: Ediciones de la Biblioteca de la Universidad Central de Venezuela.

**Mora, C. D.** 2004. *Aprendizaje y enseñanza. Proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro*. La Paz: Campo Iris.

**Mora, C. D.(Coord.).** Becerra, R., Rossetti, C., Serrano, W., Beyer, W., Millán, L., Vernaez, G., Serres, Y. Reverand, E. y Rojas, A. (2005). Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina. Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

**Mosquera, J.** 1998. *Una didáctica de las matemáticas para Iberoamérica*. [Ponencia presentada en el III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática] Caracas, Venezuela.

**Naisbitt, A.** 1994. *Global paradox*. Londres: Nicolas Brealey publishing.

**Serrano, W.** 2004. *El poder matemático de los estudiantes*. Trabajo no publicado.

**Serrano, W.** 2005a. *La alfabetización matemática*. En: D. Mora (Coord.), R. Becerra, C. Rossetti, W. Serrano, W. Beyer, L. Millán, G. Vernaez, Y. Serres, E. Reverand y A. Rojas, *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina* (pp. 243-276). Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

**Serrano, W**. 2005b. *La paradoja de la "sociedad de la información" y la educación matemática crítica*. [Trabajo no publicado].

**Serres, Y. y Serrano, W**. 2004. *Una propuesta de educación matemática crítica para Venezuela*. [Ponencia presentada en el V Congreso Venezolano de Educación Matemática y VII Jornada Centro-Occidental de Educación Matemática] Barquisimeto, Venezuela.

**Skovsmose, O.** 1999. *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente. [Traducción al español por Paola Valero del original en inglés Towards a philosophy of critical mathematics education, 1994, Kluwer Academic Publishers B.V.]

**Tall, D. (Ed.)** 1991. *Advanced mathematical thinking*. Holland: Kluwer Academic Publishers.

**Valero, P.** 1999. *Deliberative mathematics education for social democratisation in Latin America*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1, 20-26.

# FORMACIÓN MATEMÁTICA COMO PARTE DE LA EDUCACIÓN INTEGRAL BÁSICA (EIB) DE TODAS LAS PERSONAS

*Dr. David Mora*
*Director Ejecutivo del Instituto Internacional de Investigación Educativa para la Integración del CAB.*
*dmora@iiicab.org.bo*

# INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo del presente trabajo queremos partir de la premisa, cada vez con mayor respaldo teórico y empírico, de que las matemáticas en términos generales, y la educación matemática en particular, están actualmente sujetas, por un lado, a un proceso de avance y transformación profundo y, por otro, a una profunda apatía de diversos sectores de las comunidades escolares y extraescolares. Podríamos decir que, en el primer caso, está la comunidad directamente vinculada con las matemáticas y su investigación, la cual se encuentra apartada del mundo de la realidad concreta donde ocurren los procesos de aprendizaje y enseñanza, seguramente porque las y los docentes están concentradas y concentrados en el *deber ser* de las matemáticas y su educación, sujetos a la idealización de lo que para ellas y ellos significaría aprender y enseñar matemáticas, sean éstas abstractas o vinculadas con el mundo real socionatural.

Es muy probable que este grupo esté altamente descontextualizado y apartado del mundo del quehacer educativo concreto, o que simplemente considere que sus reflexiones y aportes teóricos o los resultados de sus estudios empíricos tendrán algún día cierta resonancia y relevancia en las prácticas concretas y en las realidades específicas, tanto en la vida comunitaria como en las relaciones y procesos productivos.

En el segundo grupo se encuentra realmente el gran conglomerado de personas, podríamos decir que más del 99% de la población en cualquier parte del mundo, que sólo conoce o ha oído la palabra matemáticas, independientemente de su grado de escolaridad o *alfabetización matemática*. Con esta afirmación no pretendemos ser exagerados, ni tampoco crear una alarma innecesaria, solo deseamos resaltar y hacer explícita una realidad latente, subyacente e innegable en nuestras sociedades. Es simplemente así y, aunque nos duela profundamente, quienes amamos a las matemáticas, nos hemos formado en ellas y con ellas, las defendemos y en muchos casos las cultivamos, debemos aceptar esta situación real concreta y asumir, entonces, una posición sociocrítica y política en torno a tal situación problemática, con la finalidad de investigar, proponer y practicar algunas estrategias de cambio sustantivas, cuyo objetivo consiste en revertir esta situación preocupante, pero existente e irrefutable.

Las y los educadores matemáticos críticos nos hemos propuesto una tarea titánica, cuya meta no está en convencer a la población de que las matemáticas convencionales y su educación bancaria es importante para la vida de todas las personas, el desarrollo de su pensamiento lógico-matemático, necesario para el progreso científico y tecnológico o para el bienestar de la población. Estas afirmaciones simplistas no son más ni pertinentes ni creíbles, dado que, desde el punto de vista matemático, en su sentido abstracto, pedagógico y didáctico, la educación matemática simplemente ha fracasado, puesto que ellas sólo son importantes y significativas, desde la perspectiva burguesa, para un reducido número de ciudadanas y ciudadanos. Este hecho real y palpable lo vivimos permanentemente, pero pocos lo analizamos crítica y políticamente, siendo que de este análisis podríamos obtener algunas respuestas fundamentales para impulsar profundos procesos de transformación tanto de la concepción que tenemos de las matemáticas escolares como del desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza.

En el presente trabajo, asumimos una postura, en relación con las matemáticas, totalmente diferente a las posiciones convencionales de la mayor parte de las personas que se ocupan de las reflexiones sobre educación matemática, especialmente de aquéllas y aquéllos que están interesados solo en indagar y proponer, desde una mirada puramente teórica, supuestas soluciones didácticas para optimizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de acuerdo con una concepción puramente intradisciplinaria, cuya finalidad se centra en mejorar el rendimiento estudiantil, sin preocuparse del desarrollo de potencialidades y cualificaciones múltiples en las y los participantes del proceso educativo. Nuestra práctica, acción y reflexión educativas están sujetas a las necesidades, intereses y realidades tanto de las comunidades internas de los centros educativos autónomos comunitarios, como de las comunidades externas a ellos, influyentes directa e indirectamente en los procesos de comprensión y transformación sociocultural.

Nuestras ideas pedagógicas y didácticas, en el campo concreto de la educación matemática, podrían estar orientadas en dos direcciones; por una parte, consideramos que se requiere de una formación general básica, la cual está estrechamente vinculada con los contextos y realidades concretas, cercanas o lejanas de los espacios donde ocurren los procesos de aprendizaje y enseñanza, y abstractas, pero que obedecen a representaciones y niveles de abstracción de la realidad, en su sentido amplio. Esta formación será producto del tratamiento de los temas generadores de aprendizaje y enseñanza, mismos que forman parte de la concepción dinámica del currículo en particular y de toda la educación en general. Esta meta educativa será lograda, desde el punto de vista didáctico, a través de procesos de aprendizaje y enseñanza basados en la investigación.

En segundo lugar, nos encontramos con la necesidad de alcanzar una formación, también científica, al interior de las disciplinas, sobre la base de la didáctica intradisciplinaria; en nuestro caso particular, se trata de lograr una preparación-formación en el mundo de las matemáticas escolares, lo cual requiere una didáctica especial, la didáctica de las matemáticas.

Ambos componentes están directamente relacionados, puesto que la integración y unión de conocimientos nos lleva directamente a la necesidad de profundizar en el conocimiento matemático, y este también nos puede orientar al tratamiento de situaciones matemáticas interesantes mediante, por ejemplo, los procesos de modelación de realidad-matemática y las aplicaciones. Por último, es necesario resaltar que, en ambos casos, la indagación como herramienta de la investigación y el método de proyectos constituyen las herramientas básicas fundamentales, desde la perspectiva metodológica, para el tratamiento de situaciones de aprendizaje y enseñanza en ambas direcciones. Por supuesto que la fundamentación y concreción de estas dos orientaciones serán tratadas en otra oportunidad.

## PROPÓSITOS Y TAREAS BÁSICAS

Las instituciones escolares, en términos generales y en cualquier sociedad, tienen como tarea fundamental brindar una formación integral básica a toda la población, sin ningún tipo de exclusión o discriminación. Esta educación incluye, por supuesto, una sólida formación matemática en el sentido pragmático y sociocrítico (Xie y Carspecken, 2008). Una de sus tareas consiste en preparar a las y los jóvenes y personas adultas en el mundo del trabajo y para el trabajo, como una de las funciones sustantivas de la escuela. En este trabajo preferimos hablar de una educación matemática inclusiva, que permita, entre otras cosas, la configuración del proyecto de vida individual, familiar y social por parte de cada sujeto, especialmente de quienes han estado marginados del mundo educativo (Freire, 2002).

No se trata simple y llanamente de la transmisión de conocimientos aislados y desprendidos del mundo real de las y los participantes en la praxis educativa, sino de una formación general y, en particular, matemática, que responda verdaderamente a los intereses, potencialidades y necesidades de los sujetos en el sentido individual y de toda la sociedad, en el sentido colectivo (Mora, 2005).

La comprensión matemática (Perkins, 1995, 1997 y 2003) a la cual nos referimos en este documento podría escapar, evidentemente, de las convenciones normalmente aceptadas o asumidas por los respectivos sistemas educativos en la mayor parte del mundo. Aquí nos inclinamos por una *educación matemática formal, informal y no formal*, presente tanto en los conocimientos sistemáticos acumulados por el desarrollo científico de diversas culturas a lo largo de la historia de la humanidad, como en los saberes populares, ancestrales y sociales recreados frecuentemente a través de la gran variedad de interacciones productivas y comunitarias existentes, por supuesto, en cada grupo cultural en cualquier rincón de nuestro planeta,[1] todo lo cual ocurre en un mundo de relaciones e interacciones personales y sociales, lo que también determina las acciones vinculadas con el mundo socionatural. Leontiev, por ejemplo, señala al respecto lo siguiente:

> *El hombre, en general, se halla solo ante el mundo que lo circunda. Sus relaciones con él se hallan siempre mediatizadas por sus relaciones con otras personas. Su actividad siempre forma parte de estas relaciones, incluso en aquellos casos en que exteriormente se queda solo. La relación social en su forma exterior original, en la forma de actividad conjunta o en la forma de comunicación oral, o incluso sólo en el pensamiento, constituye la condición necesaria y específica de la vida del hombre en la sociedad. La relación social constituye también la condición necesaria para la formación en el niño, y en cada hombre por separado, de la actividad adecuada a aquella, que, al parecer, llevan en sí los objetos y los fenómenos que registran los avances del desarrollo de la cultura material y espiritual de la humanidad. De este modo, la relación social constituye la segunda condición obligatoria de la asimilación, su* ***mecanismo*** *por decirlo así. (1973: 27-28)*

[1] **En cuanto a la educación formal, informal y no formal, recomendamos ver los trabajos de Belle Thomas (1987) y David Mora (2007).**

Consideramos que la educación matemática, además de formar parte de la estructura educativa convencional de nuestros sistemas educativos, tiene que convertirse definitivamente en un verdadero pilar educativo en la formación general básica de toda la población, desde muy temprana edad hasta el final de la vida de cada sujeto, es decir, *educación para toda la vida*. Para que ello ocurra, será necesario cambiar, por una parte, la concepción que se tiene aún de las matemáticas, su educación y relación con el mundo y, por otra, iniciar un proceso profundo de reflexión y transformación de las prácticas educativas existentes en cuanto a la educación productiva, comunitaria y liberadora (Mora, 2009 y 2010; Freire, 1973 y 1985; Leontiev, 1978 y 1979).

Durante muchos años, especialmente en el transcurso de la segunda mitad del siglo XX, se escribió, investigó y profundizó ampliamente en lo que debería ser la educación matemática a finales de ese siglo y principios del presente (Winter; Heymann, 1996, Bauer, 1990; Bauersfeld, 1983; Bishop, 1988a y 1988b; Ernest, 1998; Fischer, 1982, 1988 y 1998; Fischer y Malle, 1985; Freudenthal, 1973; Hersh, 1997; Mora, 1998, 2009 y 2010; Schroeder, 2000; Steiner,1989; Wille, 1995). Hoy, después de transcurrida una décima parte del siglo XXI, continuamos prácticamente en las mismas condiciones de hace treinta o cuarenta años. A pesar de esta lamentable situación y la permanente crisis de la educación matemática en nuestros países latinoamericanos y caribeños, pero también en muchas otras partes del mundo, pensamos que es necesario seguir insistiendo en el tema de la formación general básica en matemáticas como parte de la educación integral de toda nuestra población (Mora, 2005 y 2009).

De allí que, siguiendo en cierta forma los planteamientos de Bishop (1988), Heymann (1996) y Mora (1998 y 2009), resumimos a continuación diez principios básicos que deberían caracterizar la educación matemática en correspondencia con la formación integral crítica, política, comunitaria, liberadora y productiva. Es decir, que las matemáticas en general y la educación matemática, en particular, deberían contribuir a la formación en cuanto:

1. Comprensión y dominio de las problemáticas cotidianas.
2. Mantenimiento de los saberes y conocimientos matemáticos como parte de la herencia cultural de los pueblos.

3. Orientación en la complejidad de los procesos de interacción internacional, especialmente en relación con las situaciones de injusticia, desigualdad, pobreza y discriminación.

4. Preparación sociocrítica, política y transformadora de toda la población, especialmente de los menos favorecidos.

5. Desarrollo de actitudes y aptitudes relacionadas con la responsabilidad individual y colectiva.

6. Fomento de las prácticas participativas, cooperativas, colaborativas y comunicativas en procesos de interacción incluyentes y democráticos.

7. Fortalecimiento de la independencia y autodeterminación del sujeto con respecto al aprendizaje.

8. Capacitación permanente de las y los participantes en el mundo de la educación productiva y comunitaria.

9. Desarrollo de cualificaciones interdisciplinarias e investigativas de todas y todos los integrantes del proceso educativo.

10. Cambios revolucionarios de los diversos ámbitos del sistema educativo, incorporando activamente a toda la comunidad educativa.

Estos principios fundamentales de la educación matemática, según nuestro punto de vista, están estrechamente relacionados entre sí, tanto de manera horizontal como verticalmente; de la misma manera, ellos coexisten en cada una de las situaciones problemáticas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, en cualquier ámbito del sistema educativo. Proporcionan, además, un marco amplio de orientación pedagógica y didáctica, adecuado para impulsar la práctica educativa concreta al interior y exterior de las matemáticas (intra-matemáticas y extra-matemáticas), siempre desde una perspectiva sociocrítica, interdisciplinaria, investigativa y transformadora (Mora, 1998, 2005, 2009 y 2010).

La idea básica consiste, más allá de la discusión de propuestas para el mejoramiento de la educación matemática y el rendimiento en términos capitalistas-comparativos, en lograr una verdadera transformación de la praxis educativa y del acercamiento positivo hacia las matemáticas como parte esencial de la vida cotidiana y científica de todas las personas en el mundo de la escuela, en su sentido amplio, o fuera de ella, en cada una de las interacciones socioproductivas y comunitarias (Hernández y Ventura, 2002; Hidalgo, 2009; Wass, 1992 y Sacristán, 1995). Debemos trascender la idea de que las matemáticas sólo son importantes para los especialistas y profesionales que las aplican o usan en sus respectivas actividades; ellas deben formar parte del quehacer permanente del sujeto y de la colectividad, en sentido general (Mora, 1998, 2005 y 2009).

Para la educación matemática, en términos específicos y generales, en los diversos espacios en los que están estructurados nuestros sistemas educativos en el mundo de la educación formal, informal y no formal, estos diez principios conceptuales básicos de educación general permiten, obviamente, el establecimiento de conceptos curriculares y estrategias metódicas de aprendizaje y enseñanza, siempre dentro de la orientación comunitaria, productiva, crítica, sociopolítica y transformadora (Freire, 1973; McLaren, 1997, 1998 y 2001; Apple, 1982, 1979 y 1996; Giroux, 1992, 1993, 2001 y 2003; etc.). Aunque cada uno de estos diez principios es muy amplio y su explicación analítica requiere, especialmente, un tratamiento extenso, intentaremos mostrar a continuación una caracterización sucinta de cada uno de ellos, para lo cual recurriremos a la bibliografía básica que los sustenta, particularmente desde una perspectiva sociocrítica y revolucionaria de la educación.

### Comprensión y dominio de las problemáticas cotidianas

La educación matemática y sus objetivos no deben reducirse simplemente a la adquisición de las denominadas *competencias de cálculo* burguesas, bajo la premisa de que estas competencias son las requeridas por una población alfabetizada, matemáticamente hablando. Es decir, unas matemáticas necesarias para la vida cotidiana privada y pública, pero centradas esencialmente en la reproducción de las estructuras sociales establecidas en nuestras sociedades capitalistas, orientadas en una concepción de desarrollo y consumo en contra de los intereses y necesidades de las mayorías, pero también basada en altos niveles de consumo de energía, recursos naturales de toda naturaleza, todo lo cual representa un alto peso para nuestra madre tierra.

Por supuesto que es sumamente importante una alfabetización matemática en esos términos (Skovsmose, 1994 y Serrano, 2005 y 2009); sin embargo, ella tiene que trascender el mundo de los requerimientos del sistema capitalista, el cual simplemente necesita trabajadoras y trabajadores formados en el campo de la producción y reproducción de las estructuras de desigualdad y dependencia, y cuyo objetivo básico consiste en imponer la ideología dominante, tal como lo señala Peter McLaren (2005: 281).

El concepto *ideología dominante* se refiere a los patrones de creencias y valores compartidos por la mayoría de los individuos. Casi todos los estadounidenses -tanto los ricos como los pobres- comparten la creencia de que el capitalismo es mejor sistema que el socialismo democrático, por ejemplo, o que los hombres, en general, son más capaces de desempeñarse en posiciones de mando que las mujeres, o que las mujeres deberían ser más pasivas y hogareñas.

Aquí debemos reconocer que el sistema económico actual requiere de la ideología del capitalismo consumidor para naturalizarlo y presentarlo como *de sentido común*. La ideología del patriarcado también es necesaria para mantener a salvo y segura la naturaleza de la economía en la hegemonía prevaleciente. Hemos sido *alimentados* con estas ideologías dominantes durante décadas, mediante los medios masivos de comunicación, las escuelas y la socialización de la familia. Las *ideologías oposicionales* existen, no obstante, e intentan desafiar a las ideologías dominantes y resquebrajar los estereotipos existentes. En algunas ocasiones, la cultura dominante es capaz de manipular ideologías alternativas y oposicionales de forma que la hegemonía pueda ser más efectivamente asegurada.

Al contrario, se trata de trabajar las matemáticas desde una concepción más sociocrítica e ideológicamente alterna a la ideología dominante; este trabajo debe hacerse tanto al interior de las matemáticas mismas, lo cual va más allá del simple cálculo aritmético, como en el mundo extra-matemático, cuyo objetivo básico consiste en considerar situaciones problemáticas realistas interdisciplinarias con un enfoque investigativo, tal como lo veremos más adelante.

Entre la multiplicidad de aspectos que deben ser considerados desde este punto de vista, podríamos mencionar, por ejemplo, los siguientes:

a. Aproximaciones, estimaciones, registros intuitivos de situaciones de interés individual y colectivo, manejo apropiado de magnitudes múltiples, percepciones matemáticas implícitas y explícitas en el mundo del trabajo cotidiano de cada persona en sus diversos espacios de acción diaria e interacción sociocognitiva.

b. Elaboración, discusión y aplicación de modelos matemáticos sencillos, especialmente aquellos implícitos en el mundo de las prácticas laborales de cada sujeto, no necesariamente estandarizados en el mundo de las prácticas matemáticas formales de todas las personas.

c. Elaborar, leer, interpretar, analizar críticamente y construir, cuando sea posible, diversas gráficas y dibujos técnicos que requieren un conjunto de ideas, saberes y conocimientos matemáticos no convencionales, diferentes a aquellos establecidos en el mundo de las denominadas *matemáticas formales*.

d. Uso y aplicación de las matemáticas como parte esencial de los diversos medios de comunicación disponibles por todas las personas para establecer interacciones comunicativas con los demás, siempre desde una visión crítico-reflexiva del mundo y sus contradicciones.

f. Desenvolvimiento apropiado con datos estadísticos, en lo posible elaborados por las y los propios participantes, interpretación crítica de afirmaciones probabilísticas y estadísticas en correspondencia con situaciones reales problemáticas social y cognitivamente significativas.

g. Manejo crítico y profesional de medios de ayuda tales como calculadoras populares y científicas, computadoras y sus respectivos programas matemáticos

> y/o interdisciplinarios, donde las matemáticas juegan un papel fundamental (Fischer y Malle, 1985; Freudenthal, 1973; Howson y Bryan, 1986; Niss, 1987; Mora, 2005 y 2009; entre otros/as).

Todos estos aspectos deben quedar claramente reflejados y establecidos en los diversos ámbitos de la formación general básica de todas las personas, donde se tiene que ver las matemáticas de manera reflexiva y estrechamente unidas a las actividades diarias de cada sujeto, independientemente de sus acciones y profesiones en el mundo de la producción comunitaria de carácter sociopolítico e histórico. La teoría de la actividad, por ejemplo, nos suministra la posibilidad conceptual necesaria para el desarrollo de la educación matemática desde esta perspectiva, puesto que la misma explica claramente cómo se aprende y se enseña en correspondencia con las prácticas concretas y los contextos específicos. Así, por ejemplo, Lave nos proporciona la siguiente idea básica sobre el particular:

> *En la perspectiva de la teoría de la actividad, el análisis del «contexto» empieza con las contradicciones que surgen históricamente y caracterizan a todas las instituciones y relaciones sociales concretas. A diferencia de otras tradiciones, también inspiradas en los principios marxistas, la teoría de la actividad enfatiza el carácter no determinado de los efectos de las estructuras sociales objetivas. Las diferencias en la posición social de los actores son inherentes a las estructuras político-económicas y se elaboran dentro de prácticas socioculturales específicas. Las diferencias de poder, intereses y posibilidades de acción son omnipresentes. Toda acción particular se constituye socialmente y recibe su significado de su ubicación en sistemas de actividad generados social e históricamente. El significado no se crea por las intenciones individuales, sino que se constituye mutuamente en las relaciones entre sistemas de actividad y personas que actúan, y tiene un carácter relacional. El contexto puede ser considerado como las relaciones concretas históricamente constituidas entre situaciones y dentro de ellas. Como afirma Engeström (en este volumen): «Los contextos*

*son sistemas de actividad. Un sistema de actividad integra al sujeto, el objeto y los instrumentos (herramientas materiales y también signos y símbolos) en un todo unificado (...) [que incluye relaciones de producción y comunicación, distribución, intercambio y consumo]». Dreier (en este volumen) sostiene que: «La situación se basa en determinadas conexiones con la estructura social general de posibilidades, significados y acciones que produce y reproduce la formación social concreta (...) Por lo tanto, las conexiones inmediatas* ***internas*** *de la situación están también socialmente mediatizadas de una manera concreta y particular». (2001: 30)*

## Mantenimiento de los saberes y conocimientos matemáticos como parte de la herencia cultural de los pueblos

La matemática tiene que superar, en el campo de la formación general básica, su papel puramente histórico en el sentido de su derecho adquirido como disciplina científica de alto uso y aplicación en los diversos campos del saber y del actuar de todas las personas en cualquier momento, espacio y acción del cosmos donde se desenvuelve la humanidad. Aquí consideramos que las matemáticas no pueden reducirse simple y llanamente a una acumulación o colección de técnicas y procedimientos especializados, particularmente algorítmicos, sino que deben verse como parte esencial de una forma de pensamiento y acción, así como una capacidad de resolución de problemas de connotación local y universal.

Aquí aparece como altamente relevante la discusión histórica de muchas décadas del pensamiento y la problemática de la educación matemática desde la mirada de las ideas fundamentales, las cuales proporcionan un vínculo altamente sustantivo entre las matemáticas *puras* y aquéllas propias de la cultura extra-matemática (realidad concreta) donde todos/as nos desenvolvemos. Este es el camino ejemplar que deberíamos seguir en el mundo de las matemáticas escolares y, por supuesto, de las matemáticas necesarias en el campo de la alfabetización matemática general de toda la población en cada rincón del planeta (Bruner, 1987, 1988 y 1997; Lave, 2001; Bishop, 1999 y 2000; Skovsmose, 1994; Serrano, 2005 y 2009; Heymann, 1996; Mora, 1998 y 2009; etc.).

En tal sentido, podemos insistir brevemente en este aspecto fundamental: la educación matemática debe orientarse en el mundo de las ampliamente conocidas ideas fundamentales, universales o centrales, sobre las que muchas y muchos autores han escrito a lo largo del siglo XX y, muy especialmente, durante el inicio del presente siglo (Bruner, 1987, 1988 y 1997; Lave, 2001; Bishop, 1999 y 2000; Heymann, 1996; Mora, 1998 y 2009; Schweiger, 1992; Tietze, Klika y Wolpers, 1982 y 1997; etc.). Entre esas ideas fundamentales de la educación matemática, podemos mencionar las siguientes: 1) *idea de número*, 2) *idea de la medida*, 3) *idea de la dependencia funcional*, 4) *idea de la probabilidad*, 5) *idea de la estructuración espacial*, 6) *idea del algoritmo*, 7) *idea de la modelación matemática*, 8) *idea de la comunicación intra y extra-matemática*, 9) *idea de la resolución de problemas intra y extra-matemáticos*, y 10) *idea de la matemática productiva y comunitaria*.

Estas diez ideas básicas de la educación matemática pudieran ser consideradas como la relación más estrecha y directa entre las matemáticas y la complejidad cultural de cada pueblo a lo largo y ancho del mundo. El verdadero significado e importancia de las matemáticas debe ilustrarse mediante el tratamiento de situaciones problemáticas completamente diferentes al mundo de las matemáticas *convencionales*, normalmente practicadas en la cotidianidad de los momentos sociomatemáticos al interior de los procesos educativos formales, correspondientes a los requerimientos de la sociedad capitalista.

Es muy importante resaltar que la intención de las ideas fundamentales no debe contener nuevamente las intencionalidades de la sociedad burguesa con respecto al logro de competencias individuales matemáticas, con la finalidad de garantizar un adecuado desenvolvimiento de las y los trabajadores en el mundo de las relaciones de producción capitalistas, las cuales obviamente requieren de las matemáticas. Por supuesto que no se trata de un ataque o rechazo al trabajo en sí mismo; el mismo Vigotsky (1926/2005: 293) era un defensor de la relación entre trabajo y estudio como medio apropiado para un mejor aprendizaje, con mayor sentido y significado social y cognitivo; este autor nos señala, entre otras afirmaciones importantes sobre el particular, lo siguiente:

*En el trabajo industrial, el niño tropieza desde el comienzo con las formas superiores de elaboración de los materiales naturales y aprende a seguir el largo camino por el que pasa el material en bruto, desde el momento que entra en la fábrica hasta que sale de ésta como producto elaborado y terminado. En el transcurso de este largo camino, el material tiene que poner de manifiesto casi todas sus propiedades esenciales y principales, tiene que evidenciar en los hechos que se supedita a todas las leyes de la física y la química, y por lo tanto el proceso de elaboración de cualquier materia prima es algo así como la demostración de estas leyes especialmente organizadas para el alumno. A la vez, las propias características del material que lo distinguen de otros no desempeñan un papel esencial. El material actúa, ante todo, como material en general, como portador de ciertas propiedades comunes que de acuerdo con el tipo de producción, se modifi can cuantitativa pero no cualitativamente. Ya sea que operemos con madera o metal, con lana o algodón, con piedra o hueso, en todos estos casos nos vemos ante cierta magnitud, densidad, elasticidad, deformación del material y otras propiedades del misino. Por lo tanto, el carácter de la producción moderna permite discriminar de todos los más diversos materiales sus partes comunes y generalizar palpablemente ante los ojos del alumno los atributos comunes de la materia. En la producción moderna -y éste es su rasgo esencial- el material no aparece como tal con todas sus características individuales y específicas, sino como cuerpo físico o conglomerado químico y, en este sentido, ante los alumnos, no sólo en las páginas del manual, sino también en las páginas de la vida, se revelan los rasgos comunes que son inherentes por igual, pero en diferente cantidad, tanto a las más finas hebras de algodón como al más duro acero. Por consiguiente, las leyes generales de la física y la química de la sustancia universal pasan ante los alumnos en el proceso del trabajo industrial con una fuerza totalmente directa e impactante.*

No menos importante es el hecho de que, en el proceso de esa producción, pasan ante las y los estudiantes también las principales leyes de elaboración de ese material, que están estructuradas teniendo en cuenta la mecánica científica y que le descubren no una ciencia natural estática, sino una ciencia práctica dinámica. El conocimiento de las tres partes de la fábrica moderna presupone necesariamente que la y el estudiante posea el más preciso conocimiento de mecánica y la habilidad de dirigir esas máquinas está basada, en última instancia, en estos conocimientos.

### Complejidad internacional y superación de las desigualdades

Podríamos decir que la transformación de la educación matemática debe tomar en cuenta, primeramente, una orientación educativa centrada en el trabajo creador de la población, pero también en garantizar posibilidades reales y concretas de un empleo digno y liberador, contrario al trabajo inhumano y explotador propio de las sociedades liberales y neoliberales. Por otra parte, esta educación matemática debe tomar en cuenta las realidades y problemáticas del cambio climático como parte de la vida actual de todas las personas, pero también de los peligros potenciales que encierra actualmente el mundo de las contradicciones sociopolíticas de la sociedad capitalista, impuesta prácticamente en todo nuestro planeta.

Estos dos aspectos constituyen los elementos sustantivos e irrenunciables de una educación matemática contemporánea. Al tratar en las clases de matemáticas intra y extraescolares estas temáticas, estaríamos tomando en cuenta, por otro lado, buena parte de lo que realmente necesitan nuestras sociedades en su sentido complejo y sistémico. No se trata sólo de un planteamiento puramente racional, sino también de un componente espiritual, puesto que las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza están asociadas al mundo de la vida compleja de nosotras y nosotros, también de nuestro mundo interior, catalogado por algunos como la vida intrínseca, a veces incomprensible, de nuestra personalidad individual, pero también de la conciencia colectiva de cada sujeto, independientemente de sus propias caracterizaciones.

El aprendizaje, en particular de las matemáticas, se constituye en un proceso que ayuda inexorablemente a comprender las realidades, pero también a transfórmalas, así como a transformar al sujeto, puesto que éste forma parte de las realidades sociales y naturales, encontrándose permanentemente en un proceso dinámico de cambio y transformación tanto del sujeto como de la colectividad comunitaria. Wenger, por ejemplo, nos ilustra claramente este punto de visita en la siguiente cita:

*Como el aprendizaje transforma quiénes somos y lo que podemos hacer, es una experiencia de identidad. No es sólo una acumulación de detalles e información, sino también un proceso de llegar a ser, de convertirse en una persona determinada o, a la inversa, de evitar convertirse en determinada persona. Incluso el aprendizaje que realizamos totalmente por nuestra cuenta acaba contribuyendo a convertirnos en una clase específica de persona. Acumulamos capacidades e información, pero no en abstracto, como un fin en sí mismo, sino al servicio de una identidad. En esa formación de una identidad el aprendizaje se puede convertir en una fuente de significado y de energía personal y social. Visto como una experiencia de identidad, el aprendizaje supone tanto un proceso como un lugar. Supone un proceso de transformación de conocimiento, además de un contexto en el que definir una identidad de participación. En consecuencia, apoyar el aprendizaje no sólo supone apoyar el proceso de adquirir conocimiento, sino también ofrecer un lugar donde se puedan plasmar nuevas maneras de conocer la forma de esa identidad. En consecuencia, si alguien no aprende como se espera, puede ser necesario considerar, además de los posibles problemas que pueda tener el proceso, la falta de un lugar como el mencionado y la competición de otros lugares. Para redirigir el aprendizaje, con frecuencia puede ser necesario ofrecer a los aprendices formas alternativas de participación que sean una fuente de identidad en la misma medida que las fuentes que encuentran en otros lugares. La práctica transformadora de una comunidad de aprendizaje ofrece un contexto ideal para desarrollar nuevas comprensiones porque la comunidad sustenta el cambio como parte de una identidad de participación. (2001: 260)*

En el caso de las matemáticas, concretamente, se hace indispensable encontrar medios de aprendizaje cooperativo, colaborativo y participativo con el que se puedan alcanzar estas transformaciones. La idea de la modelación matemática, por ejemplo, puede ayudar considerablemente en el fortalecimiento de la concepción de las matemáticas como herramienta central para comprender buena parte de los acontecimientos locales, regionales, nacionales, internacionales y mundiales, pero también para transformarlos. Podríamos decir que lo decisivo no está en la aplicación, por muy crítica que ésta pueda ser, de modelos matemáticos previamente construidos, muy probablemente en contextos ajenos a nuestras propias realidades socioculturales, sino la conformación de modelos altamente contextualizados y profundamente específicos. De esta manera se podrá reflexionar sobre el proceso de elaboración del modelo, el modelo propiamente dicho y sus consecuencias reales, prácticas y transformadoras durante y después de sus respectivas aplicaciones.

Al asumir la educación matemática desde este punto de vista, podríamos estar garantizando, por un lado, el aprendizaje de las matemáticas en su ámbito interior y, en segundo lugar, sobre las realidades extra-matemáticas, pero también altamente significativas para quienes actúan y participan en ellas, siempre con la perspectiva de poder alcanzar altos grados de comprensión del dinamismo de la realidad práctica (Pollak, 1979; Oberliesen, 1998; Oberliesen y Reuel, 2003; Maaß, 1988; Lange, 1987 y 1996; Mora, 1998, 2005 y 2009; etc.).

La educación matemática permite ver una gran cantidad de situaciones y fenómenos cotidianos con otros ojos, es decir, mediante la complejidad de las estructuras fundamentales que determinan, en última instancia, las relaciones entre los componentes al interior de las matemáticas y de las realidades concretas, como también al interior de las acciones y pensamientos de las personas. Si logramos popularizar una visión diferente de las matemáticas, pero también de las realidades, entonces habríamos ganado considerablemente una nueva visión de la transformación de esas realidades; estaríamos en presencia de un mundo, visto desde las matemáticas, altamente diferenciado y complejo, con necesidades de tratamiento y soluciones diferentes a las creencias y concepciones comúnmente aceptadas por las comunidades de educadoras y educadores matemáticos y de la población en general.

Por supuesto que no todo lo que es importante en la vida puede y debe ser modelado o matematizado, pero sí puede verse a través de lentes críticos, lógicos y reflexivos, todo lo cual podría ser producto del tratamiento matemático de situaciones reales complejas, ejemplares, reales y, muy particularmente, significativas en lo cognitivo, cognoscitivo y social. Esto quiere decir que cada ejemplo problemático tratado dentro o fuera de la escuela sirve como experiencia y conocimiento básico para la comprensión-transformación de otras situaciones problemáticas similares o de mayor complejidad. Esta concepción de la educación matemática cambia totalmente nuestras estructuras mentales, altamente socializadas y acomodadas a un mundo trivializado por las repeticiones y producciones cotidianas de los conocimientos.

En consecuencia, la educación matemática debe permitir la acumulación de experiencias múltiples, es así como podemos elaborar verdaderos procesos de modelación intra y extra-matemáticos, conseguir una mejor comprensión de los fenómenos dentro y fuera de las matemáticas, del significado de estas modelaciones, en especial en correspondencia con el mundo de las actividades cotidianas de los sujetos y, muy particularmente, del dominio primario de hechos y fenómenos aparentemente ajenos a las matemáticas, pero que al tratarlos con herramientas y explicaciones matemáticas podamos ver su incesante y compleja interacción con ellas. Con la finalidad de precisar estas apreciaciones, citaremos a continuación a Perrone (2003: 55-56), quien a su vez hace referencia al *National Council of Teachers of Mathematics*:

> *El Consejo Nacional de Docentes de Matemática (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) ha con-vertido la comprensión de los usos de la matemática en su centro de atención. Desafía de tal manera la sepa-ración tradicional de la matemática en las materias independientes álgebra, geometría, trigonometría, análisis, estadística y probabilidad, proclamando que los alumnos de todos los niveles deberían entender la matemática como un campo de investigación plenamente integrado, que apunta a ayudarlos a resolver problemas, comunicarse, razonar y hacer conexiones. Tales metas significan que* ***los alumnos deberían estar expuestos a numerosas y diversas experiencias interrelacionadas que los alienten a valorar la empresa matemática, a desarrollar hábitos mentales matemáticos y comprender y valorar el papel de la matemática en los asuntos humanos; que debería motivárselos a explorar, calcular y hasta cometer y corregir errores para que tengan confianza en su capacidad para resolver problemas complejos; que deberían leer, escribir y discutir matemática y que deberían conjeturar, probar y construir argumentos sobre la validez de una conjetura.***

*Aunque recomiendan que se enseñen contenidos particulares en cada conjunto de niveles, las normas del NCTM no estipulan requisitos curriculares detallados. En cambio, ponen el énfasis en integrar tópicos para que los estudiantes comprendan las ideas matemáticas relacionadas entre sí y en relación con el mundo de todos los días. Las* ***normas piden que se cambie el énfasis de un currículo dominado por la memorización de hechos y procedimientos aislados y por la solvencia en las habilidades con papel y lápiz, a uno que enfatice la comprensión conceptual, las representaciones y conexiones múltiples, la modelación matemática y la resolución matemática de problemas****. Una orientación más integradora y funcional hacia la matemática también está respaldada en On the Shoulders of Giants [En los Hombros de Gigantes], el informe de la Junta de Ciencias Matemáticas del Consejo Nacional de Investigación, Academia Nacional de Ciencias: Lo que los seres humanos hacen con el lenguaje de la matemática es describir modelos. La matemática es una ciencia exploratoria que busca entender todo tipo de modelos: modelos que aparecen en la naturaleza, modelos inventados por la mente humana e inclusive modelos creados por otros modelos. Para crecer desde el punto de vista matemático, los niños deben ser expuestos a una rica variedad de modelos adecuados a sus propias vidas, por medio de los cuales puedan ver variedad, regularidad e interconexiones.*

## Preparación sociocrítica, política y transformadora de toda la población, especialmente de los menos favorecidos

Todas y todos sabemos que las matemáticas forman parte del gran bagaje cultural de la humanidad, producto de largos años de trabajo individual y compartido en diversas partes del mundo; cada cultura ha aportado enormemente a la construcción del gran mundo que representan hoy los saberes y conocimientos matemáticos (Freudenthal, 1973; Burkhardt, 1981; Bishop, 1999 y 2000; Skovsmose, 1994 y 2005; Serrano, 2005 y 2009; Greeno, 1998; Gellert, 1998; Mora, 1998, 2005 y 2009; etc.), mismos que van desde las matemáticas elementales propias del quehacer cotidiano, cultivadas por buena parte de la población, hasta las matemáticas de mayor complejidad, propias de quienes dedican buena parte de sus vidas a su comprensión y desarrollo, las y los matemáticos profesionales. Entre ambos extremos existe obviamente un espectro muy grande de niveles de complejidad matemática y, por lo tanto, de posibilidades de abstracción y aplicación. Lamentablemente, por razones de espacio no podemos extendernos en el análisis de estos niveles de dinamismo horizontal y vertical de las matemáticas.

Quienes hemos estado vinculados con las matemáticas desde hace muchos años, pretendemos con o sin razón conformar una disciplina científica que se acerque realmente a la explicación *verdadera* de fenómenos naturales, sociales y propios del mundo de las mismas matemáticas. Esta percepción no es arbitraria, ni tampoco obedece a una visión positivista de la ciencia, puesto que también aquéllos paradigmas más subjetivos, como el caso del interpretativo-naturalista y el socio-crítico, también usan un tipo de razonamiento lógico inductivo, deductivo o abductivo que tiene que ver mucho con las matemáticas.

Dentro de la comunidad de matemáticas y matemáticos denominados *puros* existen, por lo menos, dos tendencias: quienes consideran que esta disciplina está libre de toda contradicción, posición predominante y anhelada por la mayor parte de las y los matemáticos, y quienes consideran que toda obra construida por el ser humano no está exenta de ellas.

Paradójica y muy lamentablemente, la mayor parte de las personas que han estado relacionadas con las matemáticas considera que son incomprensibles y no entienden absolutamente nada de ellas ni de sus aplicaciones, llegándose a considerar que es posible estudiar, analizar y transformar el mundo sin las matemáticas. Esta trivialidad epistemológica no solo es mal intencionada, sino que carece de toda veracidad y consistencia conceptual, llegando inclusive a un estado de desinformaron incomprensible. Por el contrario, cada cultura ha necesitado y seguirá requiriendo de las matemáticas, en muchos casos vinculadas con el mundo de la política, la producción y las relaciones de poder. Esto lo demuestra, por ejemplo, Gary Urton en su trabajo de investigación sobre *una antología de los números y la filosofía de la aritmética quechuas*, quien afirma que:

*De otro lado, lo que una devaluación de la moneda como la que acabo de mencionar* ***habría*** *hecho es violar los principios de la aritmética de la rectificación. Esto es, cuando el Estado cambiaba el valor de la moneda que circulaba mediante un acto como la devaluación del circulante, ello violaba* ***el pacto*** *entre el portador de las monedas y el Estado, y minaba por extensión los sistemas económicos y filosóficos de los valores sobre los cuales se llevaban a cabo los intercambios a todo nivel de la sociedad en forma cotidiana. El punto aquí, claro está, es que los referentes primarios de la aritmética de la rectificación eran* ***relaciones*** *sociales, políticas económicas y de otro tipo mantenidas (idealmente) en un estado de balance, armonía y equilibrio. Para hacer correcciones -mediante la aplicación de los* ***procedimientos correctivos*** *(****yapa****) de la suma, resta, multiplicación y división-, la necesidad de las mismas debía ser comprendida y evidente para las dos partes de la relación contractual. Por ejemplo, en su obligación de cumplir servicios laborales para el Estado inca, la disminución de la población de una comunidad habría sido reconocida tanto por ésta como por el Estado, y se habría hecho una corrección (como la reducción en el número de trabajadores requeridos para los proyectos estatales). Del mismo modo, si el Estado necesitaba un* ***input*** *laboral adicional estaba obligado a incrementar su* ***largesse*** *recíproca. Sin embargo, en la economía política del Estado colonial, el rey podía decidir que necesitaba elevar la producción (incrementando, por lo tanto, más trabajadores), o que necesitaba vender más de su producción en el mercado colonial (como con el repartimiento),* [1] *y efectuar las correcciones necesarias en su relación con sus súbditos. Mas, en estos casos, los comuneros de los pueblos y aldeas andinas afectados por esos* ***procedimientos correctivos*** *no formaban parte del proceso de toma de decisiones, ni tampoco gozaban de beneficio alguno con su implementación; más bien eran simplemente los receptores de los mandatos del Estado. Aún más importante es que esta abreviación que la administración colonial hacía de lo que hemos encontrado eran ciertos principios filosóficos comunes y esenciales de la matemática de la rectificación -esto es, la estandarización, la equidad, el equilibrio, y la idoneidad-*

*constituía una violación de la relación del Estado con las comunidades locales; estos actos fueron recibidos durante todo el período colonial con el desacato, la resistencia y ocasionalmente con la rebelión abierta. (2003: 215)*

Podríamos mencionar múltiples ejemplos de la relación de las matemáticas con la producción, la vida comunitaria, las ciencias, la tecnología, etc., pero también podríamos enumerar una gran cantidad de afirmaciones, muchas de ellas sin sentido alguno, que atacan a las matemáticas, inclusive desde una mirada *profesional* y supuestamente *científica*. Ahora bien, ¿dónde podríamos encontrar entonces una respuesta a esta profunda contradicción?

Por una parte, consideramos que la explicación estaría relacionada con el tratamiento de las matemáticas escolares, desvinculadas de la vida y la realidad de los sujetos que participan en el quehacer educativo, lo cual no trataremos detalladamente en este documento. En segundo lugar, se podría bosquejar también una posible explicación en el mundo extramatemático, pero obviamente lleno de matemáticas social y cognitivamente significativas, escasamente incorporado al proceso de aprendizaje y enseñanza. Este último aspecto lo tratamos indirecta y tangencialmente en el presente documento, quedando abierta, sin embargo, la búsqueda de una explicación mucho más profunda a este fenómeno. Aquí nos interesa pensar, entonces, en una matemática política, social, crítica y significativa para toda la población, que permita de alguna manera la emancipación del sujeto y la transformación profunda de nuestras realidades.

Para poder alcanzar este objetivo se requiere, además de la tradicional afirmación del desarrollo del pensamiento crítico, unas matemáticas (y su praxis) totalmente diferentes a las convencionales, practicadas durante muchos años en la educación formal e informal. Una de esas posibilidades consiste en prestarle atención a situaciones problemáticas y fenómenos socionaturales del mundo cotidiano, de nuestras propias realidades, permitiendo con ello la realización de juicios bien argumentados y justificados no a través de fórmulas, ecuaciones o demostración de teoremas abstractos, sino mediante razonamientos matemáticos comprensibles, puesto que ellos también forman parte esencial del pensamiento y las explicaciones que hace, con una alta frecuencia, cada persona en relación con sus mundos.

Este tipo de matemáticas, su aprendizaje y enseñanza es totalmente posible, sólo hace falta iniciar un proceso de búsqueda y construcción de esas matemáticas diferentes, más humanas y reales. Si una de las tareas básicas de la educación matemática consiste en hacer uso apropiado de la razón en cualquier momento de acción e interacción de los sujetos en correspondencia con sus propias problemáticas, entonces son más importantes la precisión y la ejemplificación profunda que el dominio memorístico de unas matemáticas imponentes e impresionantes, pero escasamente comprensibles y significativas (Andelfinger, 1996; Blum, 1993; Böer, 1996; Borba, 1990; Bishop, 1999 y 2000; Mora, 2005 y 2009).

Una condición importante para la comprensión matemática, en el sentido que le hemos dado en este documento, consiste en la creación de puentes entre los pensamientos cotidianos de quienes participan en el quehacer educativo, especialmente las y los estudiantes, y el conjunto de explicaciones matemáticas concretas *formalmente* explicadas por las y los docentes a partir del desarrollo de las actividades producto del tratamiento complejo de los *Temas Generadores de Aprendizaje y Enseñanza Interdisciplinarios e Investigativos* (TGAEII) (Freire, 1973 y Mora, 2010).

En la actualidad tenemos amplios conocimientos con respecto al comportamiento de las personas a la hora de enfrentarse a hechos o fenómenos socionaturales aparentemente difíciles o con altos niveles de complejidad. Uno de los comportamientos más comunes consiste en dejar de lado tales situaciones, aunque consciente o inconscientemente se considere que esta es una actitud totalmente incorrecta. Otra reacción tiene que ver con un comportamiento de rechazo, odio o aversión hacia aquéllos objetos/ sujetos que causan de alguna manera dificultades sociocognitivas a los sujetos. Estos dos comportamientos se pueden observar en la relación de las personas, especialmente de quienes asisten a la escuela de manera formal, con las matemáticas.

La tarea de las y los educadores matemáticos tiene que ver con la superación de estos y otros comportamientos contrarios al cultivo crítico y reflexivo de las matemáticas, en relación con los contextos reales concretos cercanos al sujeto o alejados del mismo. Por ello, se debería suministrar tiempo suficiente y buenas oportunidades de combatir estos comportamientos, con la finalidad analizar profundamente las situaciones problemáticas desde diversas miradas y razonamientos, muchas de ellas con altos contenidos matemáticos, a veces sorprendentes. De esta manera, se podría tener una gran oportunidad para la popularización de las matemáticas, siempre en beneficio de la formación metódica, investigativa, interdisciplinaria, crítica, política y emancipadora.

Es necesario hacer uso de las matemáticas cotidianamente para interpretar, conocer y cambiar la sociedad; de la misma forma, podemos hacer uso de otras disciplinas, desde la perspectiva intradisciplinaria, o de la unión de muchas disciplinas, desde la perspectiva de la inter y transdisciplinariedad, con la intención de alcanzar el mismo objetivo, es decir, la formación de ciudadanía, siempre desde la perspectiva crítica y política. Como se puede apreciar en esta cuarta característica de las diez que conforman nuestro repertorio, el tema trasciende, además, a la simple relación entre matemática y realidad; el mismo tiene que ver, evidentemente, con la concepción pedagógica y didáctica, lo cual veremos más adelante. Por el momento citaremos a Cerda y otros (2004: 241-242), quienes manifiestan la importancia y necesidad del proceso reflexivo como vía apropiada para la conformación y fortalecimiento de la ciudadanía:

> *El tema de la reflexividad en nuestra sociedad, que se expresa en la capacidad de tener conciencia de sí y de los demás, se constituye progresivamente en una capacidad fundamental para comprender los contextos societales en cambio constante. La adecuada comprensión de la sociedad en que se vive, está directamente relacionada con las posibilidades de interactuar con otros y de participar creativamente en la solución de las necesidades personales y colectivas. De igual manera, la estructura productiva de la actual sociedad del conocimiento demanda el desarrollo de capacidades y habilidades refl exivas, como garantía de integración a ésta. Junto a ello se afirma que las exclusiones sociales se definirán en un futuro cercano, en gran medida, por la posesión o carencia de capacidades básicas de pensamiento. Generar un proceso reflexivo en forma espontánea no es fácil, observándose frecuentemente que se llega a una demanda por opinión, lo que los alumnos realizan a partir de su sentido común. Problematizar estos sentidos*

*comunes, que significa avanzar en procesos reflexivos, es difícil realizarlo si no existe, conscientemente en los docentes, el objetivo de la reflexión. Esto implica, a su vez, tener claridad en la secuencia del pensamiento reflexivo y entregar orientaciones específicas a los alumnos que enmarquen el ámbito de debate. La dispersión en las opiniones y la ausencia de diálogos fluidos entre el docente y los estudiantes, y entre ellos mismos, van obturando las posibilidades reflexivas, a pesar de la intención de los docentes por implementarlas. En aquellas escuelas donde la planificación del trabajo en el aula se realiza metódicamente y las secuencias planificadas se implementan, se suele observar dinámicas reflexivas más consistentes y productivas. En estos casos, es frecuente también que se incorpore objetivos específicos de reflexión, en el marco de los contenidos curriculares que se está trabajando.*

### Desarrollo de actitudes y aptitudes relacionadas con la responsabilidad individual y colectiva

La concepción convencional que se tiene de la calidad de la educación matemática, en cuanto a rendimiento y competencia, no está dentro de nuestras prioridades ni mucho menos forma parte de los propósitos básicos de la educación y la formación en sentido amplio. La calidad de la educación matemática, en caso de considerar una posición alterna a la tradicional, no dependería entonces del contenido matemático propiamente dicho, sino del método, de las estrategias didácticas con que se debería manejar esos contenidos matemáticos dentro y fuera de las aulas de clase.

En principio, la concepción pedagógica y didáctica puesta en práctica por las y los docentes durante el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza forma parte, también, de la responsabilidad que tienen las y los docentes con las prácticas educativas, por un lado, y con las y los estudiantes y la comunidad en general, por otro. Esto significa que, para poder exigir responsabilidad de las y los demás, se requiere en primera instancia dar el ejemplo y éste no sólo debe estar caracterizado por la palabra y el discurso pedagógico del *deber ser*, sino del *ser* propiamente dicho. Aquí la o el docente es la primera persona que está en la obligación moral y social de actuar responsablemente.

De la misma manera, las y los estudiantes deben desarrollar un conjunto de actitudes y aptitudes que les permitan asumir situaciones frecuentes de manera seria y responsable, tanto desde el punto de vista individual como colectivo. Estas capacidades, destrezas y habilidades no podrán ser alcanzadas, tampoco, sin la ejemplificación por parte de las y los estudiantes. Para ello es necesario, por supuesto, el trabajo serio y responsable de cada sujeto, en el sentido individual, pero también de grupos, en el sentido colectivo. La educación matemática tradicional, centrada en los contenidos matemáticos, en su mayoría irrelevantes, y en las y los docentes, quienes ejercen el poder de sus acciones y discursos, no brinda oportunidades a las y los participantes en la praxis educativa para que cultiven actitudes y aptitudes responsables con el estudio, las matemáticas, la comunidad, la sociedad y el trabajo.

A veces nos encontramos con afirmaciones de profesionales, tales como abogados o sociólogos, por ejemplo, que se ufanan de decir que nunca les gustaron las matemáticas, o que con frecuencia obtuvieron bajas calificaciones en matemáticas durante el tránsito de su formación general básica. Estas afirmaciones forman parte, precisamente, de comportamientos y actitudes irresponsables en relación con el estudio, la sociedad y las mismas matemáticas. Por supuesto que estos profesionales *irresponsables* son producto también de una educación altamente *irresponsable*, en la cual existe una gran cantidad de cómplices, unos con mayor o menor grado de irresponsabilidad. Miguel de Guzmán, por ejemplo, hace al respecto la siguiente apreciación:

> *La sociedad se encuentra, por tradición de siglos, con una cultura fuertemente escorada hacia sus componentes humanísticos. Cultura parece ser sinónimo de literatura, pintura, música, etc. Muchas de nuestras personas ilustradas no tienen empacho alguno en confesar abiertamente su profunda ignorancia respecto de los elementos más básicos de la matemática y de la ciencia y hasta parecen jactarse de ello sin pesar ninguno. Las páginas de la mayor parte de nuestros periódicos aún no se han percatado de que las ciencias, y en particular las matemáticas, constituyen ya en nuestros días uno de los pilares básicos de la cultura humana. Es más, parece claro que, como*

*afirma Whitehead, «si la civilización continúa avanzando, en los próximos dos mil años, la novedad predominante en el pensamiento humano será el señorío de la intelección matemática». Sería muy deseable que todos los miembros de la comunidad matemática y científica nos esforzáramos muy intensamente por hacer patente ante la sociedad la presencia influyente de la matemática y de la ciencia en la cultura. Una sociedad con el conocimiento cabal de lo que la ciencia representa para su desarrollo se hará colectivamente más sensible ante los problemas que la educación de los más jóvenes en este sentido representa. En la comunidad matemática internacional, se viene prestando recientemente una gran atención a los medios convenientes para lograr abrir los ojos de amplios sectores de la sociedad hacia los beneficios de todos los órdenes que puede reportar una cultura que integre, del modo debido, ciencia y matemática. (2007: 55)*

Independientemente de estas reflexiones, debemos insistir en que la educación matemática podría contribuir considerablemente, más de lo que piensa la mayoría de la gente, a la formación integral y responsable de todas las personas que tienen la oportunidad de participar en clases de matemáticas realmente interesantes, problematizadoras, realistas y significativas en el orden social y cognitivo. Esta formación responsable y para la responsabilidad individual y colectiva, solo es posible mediante el tratamiento de situaciones problemáticas que requieran indagación, investigación, experimentación, discusión, reflexión y elaboración compartida de ideas matemáticas y extra-matemáticas.

Si un grupo de cuatro estudiantes, por ejemplo, tiene la oportunidad de trabajar, investigativa e interdisciplinariamente sobre un tema complejo socionatural, entonces ellas y ellos estarán formados adecuadamente para argumentar, explicar y sustentar responsablemente sus descripciones y afirmaciones. En ningún momento deberían atreverse a mostrar conclusiones poco originales o escasamente respaldadas con saberes y conocimientos matemáticos, muchos de ellos resultantes de sus mismas investigaciones (Capon y Kuhn, 1979; Carraher, 1991; Carraher, Carraher y Schliemann 1982 y 1985; y Civil, 1992).

## Fomento de las prácticas participativas, cooperativas, colaborativas y comunicativas en procesos de interacción incluyentes y democráticos

La educación matemática, tal como la concebimos en este y otros documentos, cumple un doble papel fundamental: por un lado posibilita que las/os participantes, mediante la realización de investigaciones en el marco de los TGAEII, tengan que trabajar en equipos pequeños durante el trabajo e interactuar permanentemente con demás miembros de la comunidad intra y extraescolar. Todo trabajo educativo práctico, a través de los temas generadores de aprendizaje y enseñanza (TGAE), requiere necesariamente del desarrollo de acciones compartidas, en grupos de por lo menos dos participantes. En la medida en que se da esta forma de estudio, siempre vinculada con la realización de actividades investigativas, en esa misma medida surge un conjunto de relaciones con docentes, el colectivo de la clase, el personal directivo, las demás clases y el personal administrativo al interior del centro educativo comunitario autónomo (Mora y Oberliesen, 2004).

En cuanto al mundo exterior a la institución escolar, de la misma manera las y los estudiantes, como sujetos investigadores, establecen un conjunto de interacciones con la comunidad externa involucrada directa o indirectamente en el quehacer investigativo como esencia del desarrollo mismo de los procesos de aprendizaje y enseñanza. En segundo lugar, es ampliamente conocido que el trabajo educativo grupal permite considerablemente el desarrollo y fortalecimiento de un conjunto muy importante de cualidades de carácter colaborativo, cooperativo y participativo. Al respecto, Jonson, Jonson y Jonson (1994/1999: 113) señalan lo siguiente:

> *En la escuela de producción masiva, los docentes están organizados, fundamentalmente, de manera horizontal (en equipos por años o departamentos). Los estudiantes pasan de una materia a otra y se educan por partes (por ejemplo, de una clase de matemáticas a una de ciencias y luego a otra de estudios sociales o de 1º año a 2º año y luego a 3º). Cada docente es responsable de una pequeña parte de la educación de sus alumnos. Hay barreras que separan a los docentes y los*

*obligan a concentrar toda su atención en una pequeña porción del programa general. En una escuela cooperativa, los equipos no son optativos. Son algo dado. Todo el trabajo importante se hace en ellos. El equipo de docentes asume simultáneamente la educación y la enseñanza. Los docentes constituyen equipos verticales (interdisciplinarios) en los que varios docentes son responsables de los mismos alumnos a lo largo de varios años. Los equipos verticales rompen las barreras que separan a los docentes, los niveles de año y los departamentos académicos y aseguran que todos los docentes puedan ver el proceso general al que aportan sus esfuerzos. Un equipo docente puede estar integrado por dos maestros principales y dos maestros secundarios, que reciben la responsabilidad de educar a unos 120 estudiantes en un período de 6 años. Otro equipo secundario puede estar integrado por un profesor de lengua, uno de matemáticas, uno de ciencias, uno de estudios sociales y uno de lengua extranjera, que deben educar a 120 alumnos durante 3 años (por ejemplo, desde 7° hasta 9° año).*

Desde el momento en que las y los participantes en el hecho educativo socializan colectivamente un conjunto de iniciativas, con la finalidad de tomar algunas decisiones importantes en cuanto a los temas generadores que serán trabajados durante un determinado tiempo, hasta la finalización de todas las actividades teórico-prácticas, se está trabajado principalmente de forma cooperativa y colaborativa, puesto que la gran cantidad de acciones y actividades requeridas durante el proceso investigativo no pueden estar centradas solo en el trabajo individual de las y los participantes.

Todo esto significa que la participación, cooperación y colaboración son indispensables en los procesos de comprensión de las matemáticas, pero también forman parte del desarrollo del aprendizaje y la enseñanza. Por otra parte, este tipo de práctica educativa no puede existir sin poner en funcionamiento alguna forma comunicativa entre las/os actores principales del quehacer educativo. Esto significa que el trabajo participativo, cooperativo y colaborativo está estrechamente unido a los procesos comunicativos, en su sentido amplio (Damerow, 1986; Howson y Bryan, 1986; Joseph, 1993; Mora, 2005 y 2009).

Cada acción colectiva implica automáticamente un mensaje, intencional o no, hacia los demás, quienes a su vez responden con otro mensaje, expresado mediante una determinada acción o a través de una respuesta directa y precisa al mensaje recibido. Por ello, podríamos afirmar que todo trabajo participativo, cooperativo y colaborativo está estrechamente unido a un proceso comunicativo, el cual hace posible, evidentemente, que se entablen esas interacciones interpersonales alrededor de un conjunto de acciones concretas. Estas no serían posibles sin la existencia de diversas formas comunicativas, muchas de ellas diferentes al lenguaje verbal comúnmente usado por los seres humanos en los procesos comunicativos (Mora, 2010).

Es muy importante resaltar que la cualidad comunicativa lograda a través de la educación matemática participativa, cooperativa y colaborativa, no solo se refiere al desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades comunicativas en el sentido convencional de la comunicación, sino especialmente al uso apropiado de las matemáticas escolares básicas para poder manejar apropiadamente informaciones y argumentos sobre el comportamiento de la realidad, sus interacciones y posibilidades concretas de transformación. Esto significa que las matemáticas se han convertido realmente en un medio apropiado e indispensable para fortalecer los procesos comunicativos entre las personas, siempre en correspondencia con hechos reales y situaciones concretas. El uso apropiado de las matemáticas facilita enormemente las interacciones, informaciones y comunicaciones entre quienes participan activamente en una determinada comunidad (Serrano, 2003, 2005a, 2005b, 2006 y 2009).

### Fortalecimiento de la independencia y autodeterminación del sujeto con respecto al aprendizaje

Aunque hay quienes consideran que el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza individualizado, en términos generales, proporciona a los sujetos participantes en el hecho educativo las herramientas procedimentales, afectivas y cognitivas necesarias para el desenvolvimiento de las personas de manera independiente y autodeterminada, consideramos que estas cualificaciones pueden ser altamente potenciadas por el mismo sujeto, siempre que se trabaje profundamente en el campo de las matemáticas realistas, con sentido social y cognitivo; igualmente, si este trabajo matemático tiene lugar en espacios abiertos con altos niveles de participación, cooperación y colaboración, tal como lo expusimos ampliamente en el punto anterior, entonces el interés y la motivación serán multiplicados.

El programa de matemáticas realistas que venimos impulsando desde diversos espacios en América Latina y el Caribe, está centrado en el trabajo investigativo de las y los estudiantes sobre temáticas de interés individual y colectivo, siempre vinculadas con diversos contextos locales, regionales, nacionales e internacionales. Estas matemáticas realistas requieren, por un lado, pero también se fortalecen, por otro, de las capacidades de independencia y autodeterminación de los sujetos en relación con la descripción, análisis y transformación del mundo, aunque este proceso de transformación sea a mediano o largo plazo. Pensamos que éste no tendrá lugar mediante el desarrollo de una educación escolástica, dependiente, bancaria y castradora de la creatividad del sujeto.

Para lograr nuestro objetivo liberador y emancipador de todas las personas, o lo que es lo mismo, de la sociedad en su conjunto, se requiere necesaria e indispensablemente de un tratamiento de las matemáticas y de su educación totalmente distinto a aquél al que hemos estado acostumbrados durante muchas décadas. Nuestra concepción teórica, pero también nuestras prácticas educativas, están orientadas hacia el tratamiento de problemáticas reales, muy especificas y nuestras, para lo cual obviamente se exige de las y los participantes altos niveles de compromiso y trabajo liberador, y esto contradice ampliamente la idea básica de una educación reproductiva y colonizadora (Bigott, 2010).

Además, es sumamente importante pensar en las personas excluidas, marginadas, oprimidas y olvidadas de este mundo, con quienes tenemos una inmensa deuda no solo social, económica y política, sino también ética: se trata simple y llanamente de hacer una justicia real con las personas abandonadas de este mundo, cuya situación es producto del desarrollo de un sistema capitalista demoledor de las personas, de la mayor parte de la humanidad. Para superar estas grandes injusticias, es necesario e indispensable asumir una postura crítica, ideológica y dialéctica, como por ejemplo en el caso de los procedimientos evaluativos basados en la simple selección social de las personas, tal como lo señala Gimeno Lorente en su trabajo crítico sobre el mantenimiento del sistema de opresión mediante la evaluación; es decir:

*A la teoría pedagógica se le piden soluciones. Como profesores necesitamos fórmulas y acciones prácticas que nos ayuden a desarrollar nuestro trabajo de cada día. El problema reside en que, en una tarea profesional de claro contenido simbólico como el nuestro, cualquier acción práctica (de enseñanza o de evaluación) responde a un esquema axiológico acerca de la cultura, la sociedad y el individuo y por tanto no pueden existir* ***fórmulas mágicas*** *ni* ***soluciones*** *a los problemas cotidianos que se generan en el quehacer del aula. Cada opción ideológica conllevará su propuesta de acción educativa y didáctica. Por ello, desde esta perspectiva teórico-crítica, se propone que cualquier opción o estrategia docente que se nos ocurra sea pasada inmediatamente por el tamiz de la crítica ideológica; es decir, si nos planteamos utilizar un determinado instrumento de evaluación deberemos refl exionar críticamente sobre las consecuencias que tal instrumento tiene en la forma de considerar el conocimiento de la materia y en los estudiantes. Pero, para poder cuestionarnos las acciones didácticas necesitaremos recurrir a unos criterios de carácter ideológico (concepciones de la cultura, de la sociedad y del individuo) que nos sirvan como criterios referentes para la crítica. Valorar una acción humana es una acción cognitiva atribuible a cualquier acto que realice el hombre. Valorar es simplemente atribuir valor a algo teniendo como referente un criterio de aquello que es correcto/incorrecto, verdadero/falso, bueno/malo, etc. (2001: 162)*

Como se puede observar, nuestra filosofía en el campo de la educación matemática trasciende el mundo de las convenciones pedagógicas, didácticas e ideológicas que sostienen las estructuras de exclusión-explotación que han estado histórica y culturalmente aferradas a la imposición y transmisión de conocimientos previamente elaborados por unas cuantas personas, impidiendo con ello que la ciencia, la tecnología y los conocimientos, en particular aquéllos inherentes a las matemáticas, formen parte del pensar y hacer de grandes colectividades a lo largo y ancho del planeta.

En la medida en que las personas trabajen individual y colectivamente sobre temáticas reales, significativas, necesarias e interesantes para el sujeto, pero también para el colectivo, en esa misma medida podríamos hablar de independencia y autodeterminación cognitiva, cognoscitiva y práctica, tanto en el ámbito individual como colectivo.

En este sentido, pensamos realmente que cada persona, además de ser responsable por sus actos y acciones de toda naturaleza, tal como lo hemos explicado anteriormente, también debe alcanzar niveles importantes de comprensión de manera independiente y autodeterminada, cuyas consecuencias no sólo serán positivas en el ámbito de los aprendizajes, sino básicamente en el campo de los cambios necesarios e indispensables que requieren nuestro pueblos (Apple, 1982, 1979 y 1996; Carr y Kemmis, 1988; Jackson, 1996 y 2002; Carr, 1990; Kemmis, 1992 y 1996; Frankenstein, 1997; Grundy, 1998; Bernstein, 1990, 1997 y 1998; Torres, 1994 y 2001; Giroux, 1990 y 2003; y Magendzo, 1996 y 2003), todo ello para poder establecer una filosofía sobre educación, pedagogía, didáctica y currículum totalmente diferente a los paradigmas tradicionales, los cuales hemos analizado y criticado en otros trabajos relacionados con estas temáticas (Mora, 2005 y 2010).

## Capacitación permanente de las y los participantes en el mundo de la educación productiva y comunitaria

Generalmente estamos acostumbrados al desarrollo de una educación matemática, prácticamente en todos los ámbitos del sistema educativo, desde una visión puramente intelectual, o sea, desde una perspectiva centrada en aspectos cognitivos y cognoscitivos, dejando de lado las diversas formas de práctica que podrían estar relacionadas con los procesos de aprendizaje y enseñanza. Es muy probable que esta tradición tenga sus orígenes, por un lado, en la influencia griega en cuanto a la idea de la producción de conocimientos y, por otro, a raíz de los aportes al método científico impulsado por René Descartes, especialmente a través de su famoso libro *El Método*.

Estas influencias tuvieron su auge objetivista, teórico, racional y cuantitativo con el advenimiento de la corriente positivista (Adorno, 1973; Viaña, 2009). Toda esta influencia racionalista en las matemáticas quedó plenamente reflejada en su enseñanza, reproduciéndose, además de una concepción positivista intradisciplinaria de las ciencias, concepciones puramente abstractas de las matemáticas. Podríamos decir que la historia de la educación matemática está impregnada de la creencia, equivocada por cierto, de que las matemáticas son producto sólo del pensamiento de sujetos individuales, descuidando por completo los saberes matemáticos existentes en cada cultura durante toda la historia de la humanidad.

Esta dualidad, altamente contradictoria, aún no se ha resuelto, particularmente cuando se trata de educación matemática escolar; por una parte, insistimos en señalar, obedeciendo a constataciones irrefutables concretas, que el desarrollo histórico de las matemáticas ha respondido a la necesidad que ha tenido el ser humano de estudiar y explicar situaciones propias de las realidades, lo cual obviamente ha permitido que la matemática, como disciplina científica, haya sufrido un avance independiente y abstracto sumamente importante, el cual a su vez ha contribuido a la solución de problemas posteriores muy reales y concretos de interés colectivo.

Por otro lado, los procesos de aprendizaje y enseñanza no tienen que ver con la primera parte del análisis anterior, sino que nos hemos quedado sólo el tratamiento intra-matemático, señalando con frecuencia que tales contenidos pueden ser aplicados en lo inmediato o en el futuro en diversos campos de las ciencias o en la solución problemas concretos de la realidad, especialmente mediante procesos de modelación de la realidad con herramientas matemáticas. A pesar de estas reiteradas afirmaciones, las prácticas educativas en la mayor parte de los países del mundo están totalmente alejadas de una verdadera relación entre el mundo de las matemáticas y el mundo exterior a ellas; Corbalán, por ejemplo, expresa al respecto lo siguiente:

> *Tenemos que poner de manifiesto los estrechos vínculos entre las matemáticas y la vida cotidiana (además de los medios de comunicación a los que acabamos de referirnos), ahora y en el pasado (para lo que habrá que dar importancia a la Historia de las matemáticas). Y algo más profundo: mostrar mediante la utilización de todos los instrumentos a nuestro alcance que las matemáticas son un instrumento imprescindible para entender el mundo que nos rodea y para poder diseñar modelos que nos permitan plantear y/o resolver los problemas que se nos presenten. Constatando la actual invisibilidad social de las matemáticas (intervienen en una gran cantidad de aspectos*

*de la vida diaria pero casi nunca los ciudadanos normales son conscientes de ello), es un aspecto en el que los profesores de matemáticas (nexo entre matemáticas y sociedad) tenemos que hacer esfuerzos colectivos, conscientes y planifi cados, para acabar con esa situación. Tenemos que utilizar el entorno próximo de los alumnos (que es su vida diaria) para poner de manifiesto el papel de las matemáticas en esos contextos. Los alumnos no detectan muchos ejemplos de uso fuera de las aulas, aparte de organizar el (poco) dinero que tienen, constatar que los objetos tienen formas geométricas sencillas y medir el tiempo. No saben aplicar a su vida lo que estudiaron en clase ni son capaces de detectar como matemáticas muchas de las tareas que realizan en su trabajo; y lo que es más grave, muchas veces ni se enteran de que saben matemáticas. (2000: 74)*

Esta situación se agrava si tomamos en cuenta los procesos de transformación educativa impulsados en buena parte por los países de América Latina y el Caribe, especialmente aquéllos que han asumido la construcción del socialismo como única posibilidad real y concreta de luchar contra los males irreversibles acumulados por el sistema capitalista internacional, tales como los países de la Alianza Bolivariana para los Pueblos de nuestra América (ALBA). Los cambios educativos, particularmente desde una nueva concepción del currículo (Mora, 1998, 2009 y 2010; Grundy, 1998; Stenhouse, 1984 y 1987; Carr y Kemmis, 1988; Freire, 1973, 1985 y 2002; etc.), están orientados hacia una educación productiva y comunitaria. Por supuesto que esta idea básica no puede estar desprendida de una concepción sobre producción y comunidad totalmente contraria a la idea impuesta por el capitalismo sobre estos dos constructos, especialmente sobre producción.

La educación matemática tiene que responder, entonces, a una idea de comunidad, no exclusivamente de carácter agrario y/o campesino, sino más bien en el sentido de la interacción social al interior de grupos que comparten espacios, intereses, necesidades, aspiraciones, contradicciones, formas diversas de relación y producción; esta idea de comunidad no sólo tiene lugar en aquéllos lugares donde se practica una economía rural-campesina-agraria, sino en cualquier espacio urbano, semi-urbano, etc. Consideramos que la complejidad estructural de las comunidades está presente y continuará acomodándose espacial y socialmente; sin embargo, lo que hace falta es construir organizaciones y redes de interacción comunitaria, tal como podría ocurrir con los consejos comunales o las organizaciones vecinales comunitarias, en sus diversas manifestaciones, existentes en algunos países de América Latina y el Caribe, lo cual obviamente tendrá consecuencias importantes en el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza (Wenger, 2001; Delanty, 2003; etc.).

La educación matemática, por lo tanto, debe estar vinculada a las comunidades exteriores al mundo de la escuela. La única forma, según nuestras apreciaciones, consiste realmente en tratar, durante el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, problemas interdisciplinarios que requieran un tratamiento investigativo, en lo posible vinculados directamente con las comunidades donde están ubicados los centros educativos comunitarios autónomos, sobre los cuales hemos escrito en varias oportunidades (Mora, 2004 y 2019). Esto quiere decir, en consecuencia, que hace falta una educación matemática comunitaria, siempre unida a los procesos de producción al interior de los centros educativos, de las comunidades extraescolares, de la realidad nacional y de las interacciones complejas internacionales.

Por supuesto que esta educación matemática también debe estar determinada por una concepción muy diferente de la idea producción en contraposición con la concepción manejada históricamente por el sistema capitalista local o global. No se trata de seguir produciendo con la finalidad de acumular capital y/o bienes puramente materiales, en la mayoría de los casos innecesarios. Esta idea de producción, unida por supuesto a una concepción de desarrollo extractivo y acumulativo, no tiene en el tiempo el suficiente sustento energético y material sobre el que apoyar sus pilares, además de las consecuencias negativas para el planeta como resultado de las grandes cantidades de residuos tóxicos y contaminantes generados por la producción y consumo de bienes materiales, muchos de ellos suntuarios.

La idea de *producción*, considerada en este trabajo como relevante y apropiada, está asociada a la elaboración solamente de bienes materiales e inmateriales necesarios para el *vivir bien* de toda la población, y ello estaría caracterizado por: vivienda digna y adecuada, vestimenta suficiente, salud, educación, servicios básicos indispensables, transporte público masivo, alimentación saludable y balanceada, recreación y satisfacción intelectual, todo lo cual debe ser producido a bajos costos para la *madre tierra* y con muy bajos niveles de consumo de energía, en los posible no contaminantes.

Si nos pudiésemos poner de acuerdo con algunas matrices básicas esenciales de producción, especialmente comunitarias, entonces avanzaríamos significativamente hacia la permanencia de la vida en la tierra, con altas posibilidades de que toda la población del mundo viva en armonía con la naturaleza, por un lado, pero sobre todo sin sufrir las grandes calamidades a las cuales está sometida más del cuarenta por ciento de la población mundial, por otro.

La educación matemática, por lo tanto, tiene obligatoriamente que estar orientada hacia la concepción de la educación comunitaria y productiva, en los términos antes mencionados sobre comunidad y producción. Al igual que en el caso de la educación matemática comunitaria, aquí estamos en presencia de una educación matemática productiva no solo al interior de las mismas matemáticas, sino también en correspondencia con el mundo de la producción de bienes materiales e inmateriales en los diversos ámbitos en que tenga lugar, es decir, en la escuela, la comunidad extraescolar, las ciudades, las regiones, el país y el ámbito internacional.

Finalmente, queremos destacar que es indispensable la conformación de una Educación Matemática Comunitaria y Productiva (EMCP) para que todas y todos vivan bien, lo cual solo será posible en una sociedad socialista, como tránsito hacia la sociedad comunista, para lo cual se requiere, obviamente, entender que la educación no puede estar aislada, descontextualizada y desligada de la lucha de las contradicciones sociales que caracterizan actualmente al mundo capitalista, puesto que el ser humano no es un sujeto pasivo ante el dinamismo del mundo socionatural, sino que él lo transforma y se transforma así mismo, siempre en relación con los demás. Aquí es necesario recordar las palabras de Gmurman y Korolev:

> *Al elaborarse los problemas del materialismo histórico, Marx y Engels se dedicaron directamente a la teoría de la educación como fenómeno social. Incluso los más insignes pensadores, no sólo de los tiempos antiguos, sino también de los mo-*

*dernos, no podían explicar las leyes o regularidades esenciales de la educación como uno de los fenómenos de la vida social. El carácter limitado de sus concepciones fi losóficas inmovilizaba sus pensamientos y los subordinaba a las condiciones transitorias de la sociedad de clases antagónicas. El marxismo también en esta esfera llegó a «conclusiones a las que no podían arribar individuos limitados por los marcos burgueses o atados por las ligaduras de los prejuicios burgueses». Pero siendo así, no despreció las valiosas conquistas del pensamiento científi co del pasado sino que «lo reelaboró, sometió a crítica y comprobó en el movimiento obrero». Marx y Engels tuvieron en alta estimación todo lo nuevo que los materialistas franceses introdujeron en la teoría de la educación: en las experiencias de Owen veían el germen de la educación del futuro. Las conquistas de los pensadores avanzados fueron utilizadas y de forma crítica fueron reelaboradas. Marx y Engels criticaron el materialismo unilateral mecanicista, que consideraba al hombre como un producto pasivo de la influencia del medio, de las circunstancias, de la educación. Aun explicando que las circunstancias crean a los hombres en cierta medida, y en otra cierta medida, los hombres crean las circunstancias, los fundadores del marxismo llegaron a [la] genial conclusión de que el hombre, en el proceso de su gestión activa sobre la naturaliza y la sociedad, cambia su naturaleza social. La importancia de dicha conclusión teórica es extraordinaria y multilateral. Precisamente esta tesis es la que iluminó como un proyector la perspectiva de la educación de las masas explotadas en el curso de la revolución socialista. Al basarse en esta comprensión de las leyes que rigen la formación de la psicología de los hombres, los fundadores del marxismo pudieron afirmar con seguridad:* ***... tanto para el surgimiento masivo de la conciencia comunista como para el logro del propio objetivo, es necesario un cambio masivo de los hombres, lo cual sólo es posible en el movimiento práctico, «en la revolución»; por consiguiente, la revolución es necesaria, no sólo por el hecho de que no hay otro camino para desalojar a las «clases explotadoras» del poder, sino también porque la clase «explotada» puede liberarse de su ignominia y hacerse capaz de crear la nueva base social sólo en la propia revolución.*** *(1967: 77)*

### Desarrollo de cualificaciones interdisciplinarias e investigativas en las y los integrantes del proceso educativo

Ya hemos mencionado en varias oportunidades, en este y otros documentos, que nuestra propuesta didáctica, también en el campo de la educación matemática, consiste en desarrollar la praxis educativa a través de los Temas Generadores de Aprendizaje y Enseñanza Interdisciplinarios e Investigativos (TGAEII), lo cual no significa que no se pongan en práctica también otras estrategias didácticas, como por ejemplo la resolución de problemas o el método por proyectos intra y extra-matemáticos. Este tema ha sido trabajado ampliamente en la segunda parte del libro *Didácticas de las Matemáticas*, publicado por el Instituto Internacional de Integración del Convenio Andrés Bello (Mora, 2010).

El tratamiento de los TGAEII incluye realmente todos los demás principios pedagógicos y didácticos de la educación matemática que hemos venido desarrollando en el presente documento. Se trata concretamente de seleccionar una temática problemática de interés colectivo, con la finalidad de buscarle solución mediante un proceso investigativo con una mirada metódica y conceptual de carácter interdisciplinario. Esto significa, obviamente, que las y los participantes del quehacer educativo logran una formación en dos direcciones, por un lado al interior de las disciplinas que intervienen en la realización de las actividades investigativas, las cuales podrían estar clasificadas normalmente en *matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias del movimiento y artes en general*; y por otro, lograrían una formación integral interdisciplinaria, a través de la unión de saberes y conocimientos de estos seis grandes campos científicos.

Como se puede apreciar, la idea consiste en un movimiento con cuatro dimensiones fundamentales: formación intradisciplinaria, interdisciplinaria y transdisciplinaria, todo ello en un espacio-contexto determinado y un tiempo específico, puesto que se asume definitivamente una concepción curricular dinámica (Mora, 2009). Esta doble formación posibilita el logro de un amplio conocimiento general, por un lado, y por otro la profundización en el conocimiento de cada disciplina participante, así como la incorporación de los saberes ancestrales, populares, individuales y sociales en el tratamiento de los problemas generales y específicos interdisciplinarios e investigativos.

Para ello, sin embargo, se requiere de tres condiciones fundamentales: en primer lugar, romper con la idea que tenemos actualmente de las matemáticas escolares y su aprendizaje-enseñanza; en segundo lugar, es necesario transformar profundamente las características imperantes actuales del sistema educativo, especialmente de los *Centros Educativos Comunitarios Autónomos* (CECA); y en tercer lugar, se necesita una formación integral de las y los docentes, personal directivo de los centros educativos, personal de apoyo educativo, instancias ministeriales, comunidad extraescolar, etc., puesto que la gran estructura educativa local, nacional e internacional, incluyendo todas las personas que trabajan en los diversos ámbitos del sistema educativo, están claramente identificadas y socializadas en el marco de la concepción educativa tradicional, positivista y capitalista.

La formación de las y los docentes es más exigente, amerita un mayor esfuerzo tanto por parte de quienes tienen a su cargo liderar los procesos de transformación educativa, como de las y los docentes dedicados a la preparación-actualización-formación, en cascada y desde las bases, de la gran mayoría de las y los maestros que podrán en práctica la nueva concepción curricular. Por supuesto que estos cambios profundos no pueden tener lugar de la noche a la mañana o simplemente por decreto; es indispensable, sin embargo, recorrer ese largo camino, en algunos casos altamente problemático, y mantener una línea clara, persistente, consecuente y revolucionaria en el tiempo y en los espacios en que tienen lugar los nuevos procesos educativos. Se trata realmente de una verdadera revolución socioeducativa.

**Cambios revolucionarios de los diversos ámbitos del sistema educativo, incorporando activamente a toda la comunidad educativa**

En la mayoría de los países latinoamericanos y caribeños hemos vivido, directa o indirectamente, procesos importantes de reforma educativa; sin embargo, estos no han generado cambios profundos en los diversos aspectos que conforman la vida escolar dentro y fuera de los centros educativos. Este potencial y real fracaso se debe, en la mayoría de los casos, al escaso compromiso asumido por el Estado Docente como principal responsable y promotor de la educación de un país, a la escasa participación educativa de los diversos grupos de poder existentes en nuestras sociedades, cada vez más imbuidos en el mundo del consumo y la trivialidad, a la prácticamente nula acción de las comunidades extraescolares de donde provienen las y los estudiantes que hacen su vida en las escuelas, a la poca reflexión sociopolítica de las y los docentes tanto dentro de sus centros educativos como fuera de los mismos, a la escasa capacidad de dirección por parte del equipo directivo de nuestros centros educativos, etc.

A estas razones se suma la imposición e influencia de los sectores de la economía nacional e internacional, interesados sólo en convertir la educación en un buen negocio, lo cual ha tenido en América Latina y el Caribe un espacio de ensayo muy exitoso durante las últimas décadas, especialmente en momentos del auge neoliberal (Torres, 2001; Sotelo Valencia, 2000; Pérez Gómez, 1998).

En este sentido, consideramos que es necesario impulsar, más que pequeñas reformas educativas circunstanciales, determinadas en última instancia por el mercantilismo educativo, revoluciones educativas de carácter nacional e internacional, mismas que deben romper definitivamente con las concepciones mentales de la educación castradora y reproductiva de las condiciones desiguales de vida y acción, así como con las estructuras sociopolíticas centradas en la dominación de unos pocos sobre la mayoría, particularmente de las personas excluidas de la educación y de otros derechos fundamentales (Flecha, 1997; Berstein y otros, 1997; Araujo de Freire, 2004).

Por ello, una revolución educativa trasciende el mundo de las pequeñas acciones o cambios temporales en algunos centros educativos, municipios o espacios de acción socioeducativa particulares, pequeñas acciones o cambios que, en la mayoría de los casos, se convierten solo en proyectos piloto muy particulares, cuyas consecuencias no abarcan la totalidad de las escuelas y/o comunidades, quedando como simples ejemplos muy particulares para la academia o los políticos de turno que pretenden justificar algunas de sus escasas acciones dentro del mundo de la burocracia educativa.

Nuestra concepción sobre las revoluciones educativas trasciende los espacios particulares de los proyectos piloto o las simples experimentaciones. Aquí consideramos que es necesario e indispensable desarrollar acciones compartidas entre el Estado Docente, los Centros Educativos Comunitarios Autónomos (Mora, 2004), el magisterio en su totalidad, de acuerdo con sus diversas formas organizativas, las y los estudiantes, sobre la base de sus estructuras orgánicas, y muy especialmente la comunidad extraescolar donde está ubicado cada uno de los respectivos centros educativos. Si asumimos definitivamente acciones revolucionarias altamente participativas, que incorporen en igualdad de condiciones a los diversos actores vinculados directa e indirectamente con la educación, entonces estamos totalmente seguros de que en efecto lograríamos cambios sustantivos y efectivos en toda la estructura educativa de cada uno de nuestros países.

Estos cambios, por supuesto, tienen que ver con el mundo de la educación productiva y comunitaria (productiva en su sentido más amplio), lo cual tiene que ver con la producción material necesaria y con la producción inmaterial, también indispensable, para el funcionamiento adecuado de nuestras sociedades, especialmente para la satisfacción de las necesidades básicas materiales y espirituales de toda la población. Para poder lograr este objetivo tan importante en cada uno de los rincones de la geografía internacional se requiere, necesariamente, la incorporación activa y participativa de las comunidades intra y extraescolar, lo cual hemos denominado, en términos generales, como *comunidad escolar*, puesto que la comunidad es en esencia el centro y motor del interés educativo de cada nación, todo lo cual ocurre independientemente de la formalidad del sistema educativo.

Para terminar este apartado, debemos destacar que nuestras inquietudes y exigencias en el campo de la participación comunitaria en el quehacer educativo no están referidas única y exclusivamente a los primeros niveles del los respectivos sistemas educativos, sino también a aquéllos caracterizados tradicionalmente por sus comportamientos y acciones elitistas, como ocurre, por ejemplo, con la educación universitaria o de mayor especialización, la cual ha estado aislada de las comunidades y restringida solo a grupos relacionados con sectores esencialmente académicos o dueños del poder económico, lo que les ha permitido comprar de una u otra forma el conocimiento científico especializado o, en última instancia, los resultados de tales conocimientos, como ocurre, por ejemplo, con la medicina.

Pensamos, en consecuencia, que es indispensable democratizar la educación y con ello la ciencia, la tecnología, los saberes y los conocimientos de toda naturaleza; si lográramos este objetivo, entonces estaríamos alcanzando realmente una profunda transformación educativa, es decir, una revolución educativa con la participación, en primera línea, de la comunidad, en sus diversas formas de acción y representación sociopolítica.

En el caso concreto de las matemáticas, creemos sin temor a equivocarnos que éstas tendrán un mayor significado y relevancia social si están al servicio de la comunidad y si ésta participa activamente en el campo de las matemáticas, en su sentido amplio. Ello quiere decir que las comunidades deben ser protagonistas de la construcción del conocimiento matemático y de la popularización de los saberes matemáticos propios de cada cultura; de igual manera, las matemáticas deben servir como herramienta indispensable del desarrollo integral del sujeto, en el sentido particular, y del colectivo, en términos más sociales.

Todo ello será posible si y sólo si impulsamos desde las bases una verdadera revolución educativa, más que simples cambios reformistas, propios de las sociedades que desean perpetuar sus estructuras sociopolíticas sin impórtales mucho las consecuencias altamente negativas tanto para el ambiente como para los seres humanos. La revolución educativa comunitaria asumida en nuestros documentos, desde diversos ángulos y perspectivas de análisis, debe afectar, además de al campo de la gestión y organización educativas, a los procesos de aprendizaje y enseñanza, así como a los contenidos generales y específicos referidos a conocimientos y saberes, sean ellos disciplinarios, interdisciplinarios o transdisciplinarios.

Lo más importante, a nuestro entender, consiste en crear expectativas, intereses e inquietudes, siempre desde las perspectivas de quienes participan en el quehacer educativo; de esta manera, tanto las matemáticas y las ciencias naturales como las demás disciplinas podrán ser interesantes y significativas para toda la población intra y extraescolar (Mora, 2010). Autoras y autores han trabajado esta temática, proponiendo diversas categorías y terminologías que en esencia guardan una estrecha relación. Así por ejemplo, Osborne habla de las *historias explicativas* al referirse a un tipo de aprendizaje que estaría focalizado también en ideas fundamentales, es decir:

*En primer lugar, debemos abandonar cualquier intento de reconstruir el conocimiento científico de abajo hacia arriba, ladrillo a ladrillo. En su lugar, tenemos que reconocer que en el centro de la aportación cultural de la ciencia hay un conjunto de ideas importantes sobre los objetos del mundo y sobre cómo se comportan, por ejemplo, el modelo de partículas de la materia, la teoría del germen de las enfermedades infecciosas, el modelo genético de la herencia, el modelo heliocéntrico del sistema solar, etc. Por consiguiente, estas ideas y estos temas deben ocupar un lugar preeminente en el currículo de ciencias y son estas ideas las que hay que esperar que constituyan el destilado que permanece como residuo de cualquier educación científica. La conclusión es también que estas ideas, a las que decidimos llamar «historias explicativas», se deben mostrar, suscribir y nombrar con claridad y celebrar como una de las funciones evidentes de la formación científica, más que presumir que su adquisición se producirá por un puro proceso de difusión. Estas «historias explicativas» se enmarcan en los lemas generales de la vida y los seres vivientes, la materia, el universo y de cómo está hecho el mundo. Todas ellas son áreas en las que la ciencia tiene algo fundamental que decir y juntas muestran una gran parte de la diversidad que cabe encontrar en las ideas y el pensamiento científicos. Nuestra propuesta es, pues, que la educación científica debe utilizar mucho más una de las formas de comunicación de ideas más poderosas y omnipresentes en el mundo: la forma narrativa, reconociendo que su objetivo primordial es presentar una serie de «historias explicativas». Con ello queremos decir que la ciencia cuenta con una explicación que puede ofrecer una respuesta a preguntas del tipo: «¿Cómo se contrae las enfermedades?», «¿cuántos años tiene la Tierra y cómo llegó a existir?», «¿cómo es que existe tal variedad desordenada de seres vivos en la Tierra?». Son estas explicaciones (las «historias explicativas») y sus amplios elementos los que interesan y atraen a los alumnos y, por consiguiente, son estas explicaciones las que cualquier currículo de ciencias nunca debe perder de vista como objetivo propio. La palabra «historias» no pretende sugerir que las explicaciones que proporciona la ciencia sean* *«meras ficciones». Al contrario: el valor de la narración está en su capacidad de comunicar ideas haciéndolas coherentes, memorables y significativas. Así pues, creo que presentar los contenidos de conocimientos del currículo como un conjunto de «historias explicativas» tiene un valor y unas ventajas considerables. (2001: 54-55)*

## LAS MATEMÁTICAS COMO PARTE ESENCIAL DE LAS INTERACCIONES SOCIOCULTURALES

### Matemáticas y comprensión-transformación de la cotidianidad

La educación matemática y sus objetivos no deben limitarse simple y llanamente al logro del denominado *cálculo burgués*, propio de las sociedades orientadas a la producción-consumo de bienes materiales en la mayoría de los casos superfluos, o el simple dominio de operaciones matemáticas básicas elementales, de las cuales requieren en promedio las y los jóvenes y personas adultas para su vida cotidiana tanto profesional como privada, en su mayoría desde la perspectiva de las más elementales aplicaciones. Por el contrario, se trata de la disponibilidad conceptual, metódica y operativa que permita ponderar matemáticamente diversas actividades sociopolíticas útiles para el individuo y la colectividad, incorporando todas las formas posibles de pensar y actuar con la ayuda de las matemáticas.

Entre este conjunto de potenciales actividades de pensamiento y acción podrían estar, entre otras, las siguientes: a) aproximaciones, redondeos, registro intuitivo de magnitudes pequeñas y grandes; b) traducción de problemas cotidianos a modelos matemáticos sencillos y viceversa; c) interpretación y elaboración de representaciones gráficas y dibujos técnicos; d) el uso de las matemáticas como medio de comunicación; e) manejo de datos estadísticos e interpretación de afirmaciones probabilísticas en contextos reales y cotidianos; f) manejo comprensible de medios técnicos, tales como calculadoras y computadoras, los cuales deberían estar reflejados en cada clase de matemáticas en todos los ámbitos del sistema educativo en la medida en que aumentan los niveles de exigencia matemática y de la situaciones problemáticas tratadas dentro y fuera de las aulas; etc.

De esta manera se podrá no sólo entender los fenómenos socionaturales, sino esencialmente transformar el mundo de la cotidianidad cercana y/o lejana de cada sujeto participante en el proceso educativo. Esto significa, evidentemente, que debemos situar a las matemáticas, en términos generales, y a la educación matemática, como vínculo entre las matemáticas y la educación en su alta connotación, en una perspectiva mucho más social, sin que ello signifique descuidar los aspectos relevantes y altamente influyentes de la psicología y otras ciencias afines al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Sobre este particular, es muy importante citar, como ejemplo de tales reflexiones, a Apple, quien haciendo una crítica al predominio de los análisis internalistas sobre los externalistas, señala lo siguiente:

> *La mayoría de las discusiones sobre el contenido y la organización de los* ***curricula*** *y la enseñanza en áreas como las matemáticas son sorprendentemente internalistas. O, cuando se acude a fuentes* ***externas*** *distintas de la disciplina misma de las matemáticas, se desplazan, pero a las cercanías: a la psicología. Parece que existe la fuerte convicción de que uniendo las mejores matemáticas con las nuevas teorías psicológicas, se resolverá las mayor parte de los problemas del rendimiento educativo y de la equidad. Esto prolonga una historia muy larga en las ciencias de la educación de intentos de tomar nuestros paradigmas básicos de un conjunto muy limitado de marcos disciplinarios. La psicologilización de la teoría y las prácticas educativas, aunque haya traído consigo ciertos benefi cios -como demuestran algunos programas nuevos de matemáticas, descritos en los capítulos de Silver y Nelson, de Carey, Fennema, Carpenter y Franke y de Khisty, en su interesante y aún más sociopsicológico análisis del usos del lenguaje-, por desgracia, también ha traído un conjunto de importantes efectos limitadores. Ha supuesto, en un plano profundo, la eliminación de consideraciones culturales, políticas y económicas críticas de la esfera de las deliberaciones curriculares. En el proceso de individualización de su visión de los estudiantes, ha perdido todo sentido serio de las estructuras sociales y de las relaciones de raza, género y clase social, que configuran a estos individuos. Es más, de este modo, es incapaz de situara áreas como la educación matemática en un contexto social más amplio que incluya unos programas globales para*

*una educación democrática y una sociedad más democrática. Por último, a causa de estos factores, nos deja unas visiones debilitadas de la práctica crítica. (1997: 348)*

### Conformación de la coherencia sociocultural a través del tratamiento de ideas matemáticas fundamentales

Las matemáticas tienen realmente sentido, en el marco de la formación general básica, si son entendidas más allá de la simple colección de técnicas especiales de orientación procedimental; es decir, ellas tienen sentido de ser y existir en la programación educativa general si posibilitan realmente el desarrollo del pensamiento crítico-reflexivo y suministran, al mismo tiempo, las herramientas básicas esenciales para la resolución de problemas con consecuencias locales y universales en el sujeto, en su sentido individual, y de la colectividad, en el sentido de la complejidad de interacciones entre sus participantes. Aquí se pone de manifiesto, nuevamente, el pensamiento discutido durante muchas décadas sobre desarrollar las clases de matemáticas en términos de ideas matemáticas fundamentales,[2] lo cual tiene como horizonte básico establecer una conexión directa entre las matemáticas propiamente dichas y la cultura externa a ellas, es decir, el mundo extra-matemático (Mora, 2009; Corbalán, 2000; Reverand, 2010; Ortega, 2005; Rojas y Algara, 2009; Giménez, Díez-Palomar y Civil, 2007; Goñi y otros, 2006; etc.).

Esta temática será analizada a mayor profundidad en otros documentos referidos al tema de las ideas fundamentales tanto en matemáticas como en otras disciplinas. Por el momento, consideramos que se hace indispensable, cada vez más, orientar la educación matemática al mundo complejo donde ocurren los procesos educativos, pero también de los contextos y hábitat de las y los participantes en las diversas prácticas educativas matemáticas, especialmente en relación con situaciones problemáticas externas a las mismas matemáticas, en correspondencia con los adelantos de la inter y transdisciplinariedad didáctica.

---

[2] También se habla de *ideas centrales* o *ideas universales* matemáticas. En este trabajo, preferimos hablar de *ideas matemáticas fundamentales*.

[3] Desde nuestra perspectiva educativa, consideramos que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas debería desarrollarse tomando en cuenta estas tres orientaciones, las cuales tienen que ver con un acercamiento muy estrecho entre las matemáticas y el mundo externo a ellas.

Entre las *ideas matemáticas fundamentales* podríamos señalar, por ejemplo, las siguientes: a) idea del número; b) idea de la medida; c) idea de la dependencia funcional; d) idea de la probabilidad; e) idea de la estructuración espacial; f) idea del algoritmo; g) idea de la modelación sociomatemática. Es importante resaltar que esta concepción de la educación matemática, constituida básicamente por siete grandes ideas fundamentales, coincide con los planteamientos de Bishop (1988a y 1988b, 1999 y 2000), Stenhouse (1987) y Mora (2005 y 2009); sin embargo, desde el punto de vista del tratamiento pedagógico y didáctico de las matemáticas, los tres planteamientos no son exactamente sinónimos.[3]

Estas siete ideas matemáticas fundamentales podrían ser consideradas, en cierto modo, como cortes fronterizos entre las matemáticas y la totalidad del mundo socionatural. Su significado debe ser ilustrado mediante el tratamiento de temas matemáticos completamente diferentes a la caracterización tradicional de las clases de matemática, a las cuales generalmente estamos acostumbrados. Se debe garantizar claramente, sin embargo, que las ideas matemáticas fundamentales no caigan en la trampa de repetir nociones matemáticas básicas profesionales, tal como ha ocurrido con la implementación didáctica de algunas propuestas hechas en el campo de la educación matemática durante las últimas décadas, las cuales han caído en la tradicional concepción de la orientación puramente matemática con algunos pequeños disfraces realistas.

Un aspecto sumamente interesante e importante del planteamiento de una educación matemática centrada en las ideas fundamentales, consiste en fortalecer, desde el punto de vista pedagógico y didáctico, la relación entre las matemáticas y una visión compleja de la realidad; hacer esto equivale a lograr una mirada más crítica y compleja del mundo en sus aspectos globales, pero básicamente en sus elementos más particulares. Al respecto, Zabala señala lo siguiente:

> *Comprender, analizar, interpretar... para actuar, implica siempre haber resuelto situaciones en que nunca los problemas que se presentan son simples, las respuestas nunca se reducen a una sola área de conocimiento, algo que solamente se da en el ámbito restringido de la escuela, y más concretamente*

*en las pruebas que ésta propone en las evaluaciones, en las cuales los problemas se plantean de manera simple. Los problemas relevantes para los ciudadanos y ciudadanas siempre son globales y complejos. El sentido del conocimiento incluido en las diferentes ciencias, y sus problemas internos y específicos, no son los problemas relevantes para las personas. El saber científico únicamente puede tener sentido educativo cuando se dispone al servicio del desarrollo humano en sus vertientes personales y sociales. Cuando la opción educativa es la del conocimiento para la acción crítica, la enseñanza ha de orientarse al planteamiento de un saber escolar complejo. Se tiene que construir un currículum que refleje el nivel de incertidumbre presente en la vida, en el cual es imposible conseguir siempre una única respuesta válida y verdadera para los múltiples problemas que surgen en una realidad en la cual se interrelacionan múltiples y diferentes variables y dimensiones. Es decir, una formación que facilite una visión más compleja y crítica del mundo, superadora de las limitaciones propias de un conocimiento parcelado y fragmentado, que demuestra que es inútil para afrontar la complejidad de los problemas reales del ser humano. Un conocimiento que sea global, integrador, contextualizado, sistémico, capaz de afrontar las cuestiones y los problemas abiertos y difusos que plantea la realidad.(1999: 47)*

### Utilización de las matemáticas como parte de la realidad local y global

El concepto educativo basado en la orientación a las aplicaciones, especialmente relacionadas con situaciones problemáticas sociales y naturales, constituye el elemento irrenunciable de una clase de matemática moderna y progresista, en términos emancipadores y sociocríticos. Por supuesto que las matemáticas no están explícitas en tales situaciones problemáticas, sino que pueden ser encontradas de manera inmanente. Deben ser didácticamente visibles, haciéndolas, al mismo tiempo, accesibles y racionalmente tratadas en los espacios y tiempos propios de las clases inter y transdisciplinarias.

La idea de la modelación matemática puede ayudar a relacionar las matemáticas, en su forma profesional convencional, con las realidades socionaturales de quienes participan en el quehacer educativo. Con esto estamos insistiendo en la relación entre las matemáticas y el mundo exterior a ellas, lo cual constituye un altísimo avance en la comprensión-transformación socionatural y en la significación cognitiva crítica por parte de las y los estudiantes en cualquier ámbito de los sistemas educativos (Blum, 1985; Burscheid, 1983).

Lo decisivo para desarrollar el gusto por las matemáticas y un excelente aprendizaje de las mismas no es la presentación unilateral, es decir, por parte de las/os docentes, de modelos matemáticos previamente elaborados o existentes en los libros de texto, sino brindar posibilidades y ocasiones de construir modelos matemáticos a partir de las situaciones problemáticas planteadas en correspondencia con los contextos específicos o de interés para las y los participantes. Con ello se podría reflexionar no sólo sobre el modelo matemático propiamente dicho, sino sobre el proceso de modelación, sus complejidades, su belleza y, sobre todo, su importancia sociocognitiva. Aquí las y los participantes en el proceso de aprendizaje y enseñanza comprenden algo de las matemáticas y de una parte o corte de la realidad tratada, sea ésta natural o social (Blum y Niss, 1991; Kaiser, 1995).

Muchas veces no se entiende realmente que las matemáticas permiten ver fenómenos cotidianos de toda naturaleza con otra perspectiva, con los ojos de las estructuras básicas complejas e interdisciplinarias, visión que estaría altamente limitada en ausencia de las matemáticas, aunque estas sean muy elementales. Si se incorpora esta visión matemática del mundo, se estaría ganando un concepto del mismo profundamente diferenciado; si se excluye a las matemáticas sociales de la formación integral del sujeto, entonces estaríamos en presencia de un empobrecimiento de nuestra formación y del tratamiento científico de las situaciones problemáticas de interés común, se estaría desembocando en la trivialidad de las interpretaciones, construcciones científicas y transformaciones. Por supuesto que no todo lo que es importante en la vida está sujeto a la modelación matemática, pero esto no implica que buena parte de la realidad no sea matemáticamente tratable.

Toda actividad educativa, materializada concretamente en procesos de aprendizaje y enseñanza, especialmente en el campo de las matemáticas, debe permitir la vivencia de experiencias múltiples y diversas con la finalidad de lograr una mejor comprensión y un dominio complejo de fenómenos inicialmente no matemáticos; para ello, es indispensable pensar y actuar matemáticamente, lo cual, a su vez, es posible mediante los procesos de modelación matemática. Sobre este particular hemos reflexionado profundamente en varias oportunidades, especialmente en el campo de las matemáticas escolares y universitarias (Mora, 2009).

Por supuesto que los procesos de modelación, como estrategia pedagógica y didáctica para el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, están referidos escasamente al mundo intra-matemático, sus contenidos son esencialmente realistas, del mundo cercano, intermedio o lejano a las y los participantes en el quehacer educativo, aunque en efecto puedan existir situaciones intra-matemáticas consideradas o tratadas mediante las herramientas comúnmente usadas para la modelación de problemáticas básicamente realistas, a diferencia de la teoría de las aplicaciones matemáticas. A este respecto, es importante resaltar lo que nos dice Da Ponte:

> *Finalmente, el contexto constituye una dimensión importante que debe tenerse en cuenta. En este punto, los polos vienen determinados por las tareas encuadradas en un contexto de la realidad y las tareas formuladas en términos puramente matemáticos. Skovsmose (2000), en un interesante artículo, todavía distingue un tercer contexto, que designa como semirealidad, que es extremadamente frecuente en los problemas y ejercicios de matemáticas. Aunque aparentemente se pongan en entredicho situaciones reales, para el alumno, éstas pueden no significar gran cosa. Dejando de lado este aspecto, la mayoría de las propiedades reales de las situaciones no se tienen en cuenta. La atención apenas se focaliza en la propiedad o propiedades que interesan a quien ha enunciado la cuestión y es en éstas donde se supone que debe centrase el alumno. Por eso, para el alumno acaba por ser un contexto tan abstracto como el contexto de las matemáticas puras... Las llamadas tareas de modelación son, en el fondo, tareas que se presentan*

*en un contexto de realidad. Dichas tareas, en general, entrañan una naturaleza problemática y desafiante, además de dar lugar a problemas o investigaciones, de acuerdo con el grado de estructuración del correspondiente enunciado. También es frecuente hablar de aplicaciones de las matemáticas. Según su naturaleza, se trata de ejercicios o problemas de aplicación de conceptos e ideas matemáticas. Asimismo, hay que señalar que los ejercicios, problemas, investigaciones y exploraciones, tanto pueden surgir en contextos de realidad como de semirealidad o de matemáticas puras. (2004: 32)*

## Comprender las matemáticas y desarrollar el pensamiento sociocrítico para superar la ideología dominante

Todos sabemos que las matemáticas representan una realidad, abstracta en muchos casos, construida por los seres humanos; ellas no tienen realmente ningún carácter arbitrario, ni mucho menos casual. Están caracterizadas por la necesidad y los esfuerzos de aclaración de las contradicciones, por la coherencia y consistencia de sus modelos, por la precisión de sus argumentaciones, por su fuerza explicativa, por la belleza y precisión de sus encadenamientos conceptuales y algorítmicos, etc. Por estas razones, son comprensibles por quienes entran paciente y consecuentemente en contacto con sus diversas manifestaciones. Paradójicamente, para mucha gente que ha estado, en algún momento de su vida, en contacto directo o indirecto con las matemáticas, éstas han dejado de ser comprensibles, hasta el punto de que muchas personas las odian, las rechazan y escasamente las usan en sus vidas.

Podríamos afirmar, con mucha certeza, que las matemáticas no comprendidas dejan escasos recuerdos significativos en los sujetos, no les proporcionan absolutamente nada de su potencial creador y utilitario, dejan escasas huellas de la relación entre matemáticas y realidad y mucho menos del pensamiento crítico reflexivo, del cual se habla con frecuencia. Esta apreciación no significa, de ninguna manera, que nos olvidemos de las matemáticas como medio apropiado para el logro de actitudes y aptitudes emancipadoras, democráticas y liberadoras en todas las personas pertenecientes a una comunidad determinada.

Por el contrario, debemos insistir en la posibilidad real y concreta de incorporar radicalmente las matemáticas al mundo de la cotidianidad de cada persona, al mundo de las interacciones sociales; por ello hablamos con frecuencia de la sociomatemática y de la equidad e igualdad entre todas las personas que participan en los procesos educativos, especialmente en aquellos vinculados a las matemáticas, dentro y fuera de las respectivas instituciones de formación, capacitación, preparación, acción, producción y reflexión sociopolítica en todos los ámbitos de nuestros sistemas educativos. La educación matemática, entonces, puede efectivamente contribuir al esclarecimiento de muchas contradicciones sociopolíticas de nuestros tiempos, así como ayudar a establecer mayor igualdad socioeconómica en todos los pueblos del mundo. Siguiendo las palabras de Skovsmose y Valero (2007):

> *La educación matemática proporciona nuevas oportunidades a las personas, pero podría también llegar a ser una obstrucción para ciertos grupos en términos del avance social. La educación matemática presupone recursos, y creemos que es necesario preguntar cómo estos recursos -humanos y materiales- crean oportunidades y, más esencialmente, cómo se distribuyen los recursos y las oportunidades alrededor del mundo. Al mismo tiempo, se podría reconocer la educación matemática como un recurso económico de la sociedad, pues apoya el desarrollo tecnológico. Y estos potenciales políticos y económicos de la educación matemática podrían operar de maneras muy distintas en diferentes contextos sociopolíticos.*

Las matemáticas, obviamente, podrían ayudar considerablemente a explicar y aclarar fenómenos difusos y complejos del mundo cotidiano, especialmente en el ámbito social, sustituyendo con ello prejuicios por juicios argumentados y bien justificados, sustituyendo la alienación por la formación política, sustituyendo la educación bancaria por la liberadora. Si asumimos definidamente que la educación matemática debe tener entre sus objetivos fundamentales la contribución a la conformación de un pensamiento sociocrítico, entonces la precisión y profundización del tratamiento matemático de la realidad es más importante que la memorización simplista de contenidos impuestos por la escuela conservadora, tal como lo analizaba amplia y sabiamente Paulo Freire (1973).

Una premisa básica para comprender esta importante tarea es considerar que las y los participantes en el proceso de aprendizaje y enseñanza deben constituir puentes entre sus pensamientos cotidianos, aprendidos durante sus procesos de socialización y enculturación, y el pensamiento matemático supuesto para ellas y ellos por quienes conocen y están encargados de la constitución del currículum matemático. Las y los participantes en actividades matemáticas tienen que enfrentar y aceptar en la mayoría de los casos situaciones poco agradables en relación con las matemáticas, no por culpa de sus supuesta dificultad, sino esencialmente por la concepción pedagógica y didáctica predominante.

Se trata fundamentalmente de impulsar un cambio radical en el mundo de la educación matemática, en cuanto la aceptación definitiva de que todas las personas han estado o están vinculadas con las matemáticas, de una u otra forma, independientemente de su procedencia sociocultural, formación o relación con el mundo y las normas productivas (Mora, 2005 y 2009). Lo que se desea es comprender que, en efecto, todas las personas hacen matemáticas, en la mayoría de los casos sin darse cuenta, y que ellas constituyen parte de sus vidas, de sus formas argumentativas y comunicativas. Sobre el particular, Knijnik señala lo siguiente:

> *Discutir las posibilidades de incluir en el currículo escolar las historias de aquellos que son definidos como los otros en términos de clase social, raza/etnia, género, etc., considerando sus modos de razonar matemáticamente, no es una operación neutra, meramente técnica: implica optar por una política del conocimiento que subvierta la política del conocimiento dominante, que atribuye supremacía, por ejemplo, a la escritura, tornando invisible la oralidad matemática de otras culturas... (2007: 78)*

Con frecuencia, quienes entran en contacto con las matemáticas, especialmente en el ámbito de la educación formal, tienen que asumir comportamientos sociocognitivos contrarios a sus formas de comprensión, particularmente aquellas que tienen que ver con sus procesos de enculturación y socialización histórica y contextual, así como con sus formas de vida, producción e interacción sociocultural. En muchas oportunidades ellas y ellos tienen que dominar estrategias de resolución de problemas matemáticos o extra-matemáticos, pero con la ayuda de unas matemáticas que no coinciden con sus formas particulares e independientes de enfrentar y resolver problemas sencillos y complejos de su cotidianidad. La escuela, entonces, no toma en cuenta los denominados conocimientos previos, pero tampoco sus contextos sociocognitivos específicos, puesto que ella, en nuestras sociedades capitalistas, obedece sencillamente a un aparato de dominación, control y opresión sociocognitiva, es decir, la escuela es, esencialmente, un medio de imposición de la ideología dominante.

Esta realidad del mundo de la escuela debe ser transformada radicalmente, incorporando una ideología liberadora y emancipadora. De esta crítica se desprende, en consecuencia, la oportunidad de superar formas pedagógicas y didácticas contrarias a la vida y formas de comprender de cada persona, como individuo, pero también como parte de un colectivo que aprende y enseñanza simultáneamente; con ello se permitiría, por lo tanto, el desarrollo de aptitudes y actitudes complejas y liberadoras en cada una de las personas que participa directa o indirectamente en el proceso educativo. Se debería brindar suficiente tiempo y oportunidades para que la comprensión de los conceptos matemáticos sea realmente significativa en los aspectos cognitivos y sociales, lo cual será posible sólo si existe una relación profunda con los fenómenos sociales y naturales tratados o relacionados con los conceptos matemáticos explícitos o subyacentes.

En este sentido, consideramos que, en última instancia, el currículo de las matemáticas escolares se convierte en el caballo de batalla de la imposición ideológica de los sistemas capitalistas opresores, siendo precisamente el Estado el encargado de esta masificación curricular-ideológica en todos los ámbitos del sistema educativo, ideología que sólo sirve a los sectores dominantes, dueños del poder político, económico y militar. El trabajo de Moreno, *Ideología y Educación Matemática. El proceso de infusión ideológica*, es ampliamente esclarecedor en el tema de las matemáticas y su educación como medio de imposición de la ideología dominante; es decir:

> *Según el modelo de infusión ideológica, los diseños curriculares y los profesores (por medio de las relaciones de aula) transmiten ideología inconscientemente a los alumnos al crear con ellos un conjunto de representaciones y presupuestos ideológicos que*

*utilizarán para la interpretación de situaciones sociales. La política participa de esta infusión ideológica contribuyendo a la elaboración del diseño curricular y en la formación y selección del profesorado. Los fines políticos, los valores jurídicos y el sistema económico definirán las finalidades de la educación matemática y la ubicación de las matemáticas como materia de enseñanza en la estructura del currículo educativo. La fragmentación del currículum en asignaturas, entre ellas la de matemáticas, oculta las relaciones de poder y asegura estabilidad al presentar los confl ictos como problemas técnicos. Al mismo tiempo, las fi nalidades justifi can adecuadamente la decisión deliberada de construir las matemáticas escolares como las matemáticas. Los planteamientos de la estructura de poder quedan ocultos en los diseños curriculares y difuminados en el proceso de formación y selección del profesorado. La transmisión ideológica se convierte entonces en infusión ideológica. (2004: 85)*

**Momentos subjetivos de las clases de matemáticas**

En su desarrollo, los procesos de aprendizaje y enseñanza de matemáticas son tan subjetivos como los de otras disciplinas, tales como aquéllas referidas al campo de las ciencias sociales. Quienes hemos estado vinculados con estas temáticas, sabemos que el movimiento positivista intentó imprimir a la ciencia toda una connotación objetivista de los saberes populares, convirtiéndolos en conocimientos supuestamente científicos, avalados por la racionalidad de la ciencia. Por supuesto que el positivismo científico permitió, y aún permite, el avance del conocimiento, las disciplinas y la ciencia en general, pero también se ha convertido en un arma de dominación, explotación y desigualdad local e internacional. Las matemáticas, entonces, son usadas como medio ideal para el desarrollo de la ciencia y la tecnología, para que proporcionen mayores ganancias a los países y/o grupos internacionales que dominan industrial y técnicamente más del 90% de la economía, la política, la ciencia y la tecnología alrededor del mundo.

Consecuentemente, nuestra tarea consiste en generar también, con la ayuda de las matemáticas, mecanismos de liberación y emancipación nacional e internacionalmente hablando, es decir, apropiarnos de las matemáticas para lograr nuestros objetivos, que tienen que ver con la formación sociopolítica y la formación metódica, técnica y científica. Con ello estaríamos superando en buena medida momentos de imposición ideológica subjetivos, disfrazados de tecnificismo, objetividad, dificultad, supremacía y veracidad absoluta del conocimiento matemático, con lo que se pretende imponer neutralidad sustantiva a las matemáticas y, con ello, a buena parte de las ciencias (Mora, 1998, 2005 y 2009; Moreno, 2004).

El problema sustantivo de esta corriente epistemológica consiste en asumir una supuesta neutralidad de la ciencia como parte de la denominada *objetividad científica*. Por suerte ha existido, a lo largo de la segunda mitad del siglo anterior y principios del presente, un movimiento crítico muy importante que ha develado profundamente esta falacia epistemológica, reconociéndose en la actualidad que la ciencia contiene una gran carga política y que ella obedece a hechos sociohistóricos, cargados a su vez de una gran carga ideológica, obedeciendo con frecuencia a los intereses y necesidades de los grupos dominantes, en la mayor parte de los casos, aquellos sectores poseedores de las riquezas financieras y económicas en cada grupo cultural y momento histórico a lo largo y ancho de nuestro planeta.

En este sentido, al conocimiento científico, particularmente a las matemáticas impuestas, por ejemplo, en los libros de texto, se la impregnado ese carácter de objetividad, neutralidad, credibilidad y aceptación acrítica. Es decir, se ha afianzado en los sujetos una forma de representación y reproducción de una supuesta verdad. Pérez, Mateos, Scheuer y Martín afirman, por ejemplo, que:

> *En cuanto a lo del segundo aspecto, hace referencia a las creencias sobre la fuente del conocimiento, que irían desde la creencia [de que] el conocimiento es externo al sujeto que conoce y reside en una autoridad (los problemas matemáticos sólo tienen un método de solución correcto y es el que viene en el libro de texto o ha expuesto el profesor) a la creencia en el propio sujeto como constructor de conocimiento (un problema sobre un área se puede resolver aritméticamente, midiendo directamente, por medio de dibujos, etc.; la forma en que se resuelva dependerá del interés, los conocimientos, etc. de quien*

*lo resuelva), así como también a las creencias sobre el papel de la evidencia y los procesos de justifi cación, que irían desde la aceptación del conocimiento (lo pone en el libro) a la conciencia de la necesidad de justificar el conocimiento (demostración argumentada de cualquier solución). (2007: 72)*

Otra crítica importante tiene que ver con la concepción unilateral de las disciplinas científicas, apartando toda posibilidad de intercambio disciplinario, la multidisciplinariedad, la interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad. Por supuesto que nuestra posición filosófica en cuanto al desarrollo del conocimiento científico, especialmente en el campo de las matemáticas, tiene que ver con la complementariedad científica, la cual consiste en buscar puntos de encuentro entre la profundidad de las disciplinas particulares o específicas y la inter y/o transdisciplinariedad conceptual, con la finalidad de encontrar un equilibrio entre la particularidad y la generalidad. Este es un problema esencialmente pedagógico y didáctico, cuya solución nos permitirá conseguir un paradigma educativo que posibilite en buena medida la formación general o integral de toda la colectividad, pero también la formación científica disciplinaria, con la finalidad de apropiarnos del conocimiento, democratizarlo y hacerlo útil para todos nuestros pueblos.

No debemos caer en la trampa, también ideológica, de que la transdisciplinariedad es la solución absoluta al dominio y control de la ciencia y la tecnología de unos pocos sobre la gran mayoría de la población mundial; debemos formarnos también en todos los campos de las ciencias y la tecnología, lo cual requiere la profundización en el campo de las disciplinas y sub-disciplinas altamente especializadas, lo que algunos peyorativamente denominan híper-especialización o súper-especialización.

Por supuesto que las matemáticas, al igual que las demás disciplinas, no siempre están determinadas por altos niveles de objetividad conceptual, por ello asumimos una concepción amplia de las matemáticas, apegadas a las formas diversas y múltiples de producir y reproducir ciencia por parte de las diversas culturas en cualquier ámbito de nuestro planeta, desde la antigüedad hasta nuestros días. Cada pueblo ha construido unas matemáticas muy particulares, con características específicas de acuerdo a sus necesidades e intereses, siempre vinculadas con sus realidades específicas. Por ello, consideramos que las matemáticas también obedecen a orientaciones subjetivas, entre otras cosas, porque están sujetas a altos niveles de aproximaciones, suposiciones, avances y retrocesos, comprobaciones, etc.

La idea del desarrollo de una educación matemática crítica, tal como la hemos analizado en otras oportunidades (Mora, 2005 y 2009), tiene como consecuencia inmediata que, tanto en los procesos de aplicación y modelación matemática como en la resolución de problemas intra y extra-matemáticos, se tome en cuenta procesos sociomatemáticos altamente interactivos entre todas las personas que participan en el hecho educativo dentro y fuera de las aulas de clase. Al desarrollar los procesos de aprendizaje y enseñanza desde este punto de vista, estaríamos considerando momentos de subjetividad variables, alternos y profundamente dialécticos, lo cual superaría la idea de las matemáticas acabadas, objetivas y exentas de toda posibilidad de ensayo, error e improvisación conceptual, y esto es necesario e indispensable para la comprensión profunda de las ideas matemáticas explícitas o implícitas en su relación con situaciones problemáticas de interés colectivo.

Para culminar, queremos recalcar que la cualidad de las clases de matemáticas no es, en primera línea, dependiente de los contenidos, sino, en sentido amplio, de los métodos, de las formas en que se trata en las clases concretas ese contenido matemático y cómo se establece interacciones sociocríticas entre las y los participantes en el desarrollo de una cultura de aprendizaje y enseñanza participativa, cooperativa y colaborativa. Creemos, sin temor a equivocarnos, que la comunidad educativa intra y extraescolar tiene un papel central en este proceso de transformación, y para desempeñarlo es indispensable trabajar permanentemente y en igualdad de condiciones con las y los docentes, puesto que son ellas y ellos los motores fundamentales de los cambios dentro y fuera de los centros educativos comunicaros autónomos (Mora, 2004). Sobre esto, Parra nos dice:

> *La escuela es una configuración institucional específica que podemos abstraer de las organizaciones concretas en las que intervienen personas: estudiantes, familias, directivos, docentes, personal auxiliar, etcétera. Pero cada una de ellas es un componente necesario para que la escuela sea lo que es y también*

*puede ser un camino para transformarla en otra cosa. Por eso, puestos a pensar alternativas para el futuro de las escuelas, necesita mos ineludiblemente pensar en los sujetos que las integran. Cada cual pien sa, siente y actúa1 en la cotidianidad escolar aportando direcciones y contrapesos, colaborando en la conformación de un proyecto que será necesariamente colectivo, pero no por eso indiscriminado. La mirada de cada docente sobre la tarea y sobre su modo particular de vivirla se asienta en representaciones sobre lo que la escuela puede y tiene que hacer y comuni ca una concepción del espacio público escolar. Por eso, en este caso, nos interesa indagar la trama subjetiva de los docentes. En sus historias de vida, en sus preguntas abiertas y respuestas narrativas, el carácter político de la educación puede hallar un anclaje específi co. Según Daniel Korinfeld «El acto es el nudo que liga la posición del educador y la producción subjetiva al educar, es decir que el acto educativo no se sostiene sólo desde el conocimiento, sino desde el propio ser del docente y que sólo desde allí puede alcanzar su dimensión política, su dimensión transformadora... (2005: 239)*

## Conclusiones

A lo largo del presente trabajo hemos insistido reiteradamente en los aspectos sociales, formativos y políticos que están directa e indirectamente relacionados con las matemáticas propiamente dichas y con la educación matemática, tanto desde la perspectiva del aprendizaje y la enseñanza como de los correspondientes programas de investigación que la caracterizan. Por supuesto que este trabajo no pretende agotar, ni mucho menos, esta extensa y necesaria discusión, la cual evidentemente debe continuarse y profundizarse en todos los espacios interiores de los centros educativos de cualquier ámbito del sistema, pero también en el conjunto de la sociedad, en muchos casos apartada de las matemáticas, de sus beneficios y de sus profundas contradicciones, tales como su fundamento científico y tecnológico o su mecanismo de dominación y alienación sociocultural.

En la mayor parte de las páginas que componen este documento se analiza, con cierto detalle, diez propósitos o tareas fundamentales que debe tener la educación matemática de nuestro tiempo, siempre en correspondencia con el dinamismo y los cambios que caracterizan a las sociedades, en diversas partes del mundo, así como las transformaciones, innatas o provocadas por los seres humanos, de la naturaleza. El primero tiene que ver con la importancia que tienen las matemáticas y su tratamiento educativo, en cuanto a comprender las problemáticas cotidianas, relacionadas directamente con el mundo de la vida de todas las personas en un determinado grupo cultural. Este proceso de comprensión no solo se refiere a una mirada externa al mundo de las realidades y sus posibles connotaciones matemáticas, sino más bien a reconocer la existencia de diversos niveles de comprensión, los cuales están obviamente asociados a los mismos procesos de cambio que influyen directamente en la misma actividad de aprendizaje y enseñanza.

En segundo lugar, hemos tratado la temática vinculada con la necesidad de mantener, cultivar, criticar y seguir desarrollando los saberes matemáticos propios de cada cultura, como parte esencial de la relación de los seres humanos con otros seres humanos en procesos altamente interactivos, y como parte de las herramientas culturales para transformar la naturaleza y la sociedad. Este aspecto ha sido analizado desde una posición profundamente crítica, puesto que no todo quehacer matemático es beneficioso para todas las personas y para el mundo natural en su profunda complejidad. En tercer lugar, consideramos aspectos relacionados con el papel que juegan las matemáticas en el estudio de la complejidad internacional y el esclarecimiento de las desigualdades socioculturales, en algunos casos fortalecidas por la ideología dominante que recubre el pensamiento y la acción de las matemáticas burguesas.

Como cuarto componente, hemos considerado importante resaltar que las matemáticas escolares pueden contribuir enormemente a la preparación sociocrítica, política y transformadora de la población, particularmente de quienes han sido excluidos de los beneficios de la ciencia y la tecnología, considerándolos no como simples consumidores de los productos altamente tecnificados, cuya producción reporta grandes ingresos a las trasnacionales del conocimiento y a los países que se han apoderado de él, sino como analistas críticos de ese conocimiento y productores de conocimientos propios, siempre en correspondencia con las problemáticas contextuales de cada sociedad y grupo cultural. Aquí consideramos que las matemáticas deben estar definitivamente al servicio de los intereses y necesidades de los excluidos y olvidados de este mundo injusto y profundamente inhumano.

El quinto aspecto tiene que ver con el aporte de la educación matemática al desarrollo de actitudes y aptitudes altamente significativas en lo social, cultural y cognitivo, para el desarrollo de altos niveles de responsabilidad individual y colectiva, tan necesarios en nuestras sociedades impregnadas por las desigualdades, imposiciones y opresiones. Como sexto componente, hemos tratado elementos sustantivos del desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, que tienen que ver con el fomento de las prácticas participativas, cooperativas, colaborativas y comunicativas en procesos de interacción incluyentes y democráticos. En cuanto al séptimo aspecto, creemos que las matemáticas y su tratamiento escolar permitirán el fortalecimiento de la independencia y autodeterminación de las personas, para que puedan aprender y enseñar de manera independiente, responsable, crítica y reflexiva, con lo cual se alcanzará importantes cotas de comprensión y transformación.

En el octavo punto nos concentramos en establecer una relación fundamental entre la educación productiva, la comunidad y los procesos educativos, básicamente de las matemáticas. Aquí nos encontramos con un reto sumamente importante, puesto que nuestras instituciones escolares, los libros de texto y las prácticas docentes niegan, consciente o inconscientemente, el papel que juegan las matemáticas en el mundo de la producción sociocomunitaria, hasta el punto de considerar la inexistencia de tal relación. En este sentido, pensamos que está pendiente una tarea sumamente urgente en cuanto a la necesidad de desarrollar una educación productiva tanto en el mundo comunitario institucional como extraescolar, siempre con la incorporación las matemáticas como parte esencial de la ciencia, la tecnología y la producción.

Como noveno aspecto, vinculado directamente con todos los anteriores, hemos tratado la temática del desarrollo de cualificaciones interdisciplinarias e investigativas en las y los integrantes del proceso educativo, como un medio adecuado para un mejor y mayor aprendizaje. Este aspecto tiene que ver con la corriente pedagógica y didáctica que venimos impulsando desde hace algún tiempo, en cuanto a la necesidad de que las prácticas educativas concretas estén centradas en actividades de investigación, ricas, necesarias y motivadoras tanto para la comunidad extraescolar como para los actores directos del proceso educativo.

Por último, hemos considerado sumamente importante la necesidad de fortalecer las revoluciones educativas, no sólo en el aspecto organizativo, administrativo e institucional, lo cual obviamente es muy necesario, sino básicamente con respecto al desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza propiamente dichos. Para ello es necesario incorporar activamente a toda la población, organizada en comunidades donde se ubiquen los respectivos centros educativos comunitarios y autónomos.

En la segunda parte del presente trabajo tratamos, también con cierta profundidad en el análisis y la reflexión sociocrítica, las matemáticas como parte esencial de las interacciones socioculturales, insistiendo en los aspectos de carácter ideológico. Al igual que en la primera parte, aquí también nos hemos apoyado en una diversidad de autoras y autores que, aunque no todas y todos se refieren exclusivamente a las matemáticas, sí nos proporcionan elementos sustantivos y argumentativos para poder elaborar algunos constructos teóricos críticos sobre tales interacciones.

Analizamos aspectos como, por ejemplo, la utilidad de las matemáticas para comprender y transformar la cotidianidad del sujeto, en su sentido individual y colectivo, la importancia que tienen las ideas matemáticas fundamentales en la formación sociocrítica de las personas en cualquier momento histórico y espacio sociocultural, o el tratamiento de las matemáticas como parte esencial de los diversos niveles de abstracción de la realidad, pero también desde las realidades locales y globales, ambas altamente influyentes en la conformación de una ciudadanía crítica.

También hemos considerado importante apuntar que la comprensión apropiada de las matemáticas permitirá desarrollar el pensamiento sociocrítico para superar la ideología dominante. Por último, tratamos de estudiar la caracterización de los momentos subjetivos de la educación matemática. Todo lo anterior ha sido analizado y estudiado con la ayuda de la bibliografía pertinente y disponible sobre las respectivas temáticas.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA


**Adorno, T**. 1973. Sobre la lógica de las ciencias sociales. En: AA. VV. *La disputa del positivismo en la sociología alemana*. Barcelona: Grijalbo.

**Andelfinger, B**. 1996. *Allgemeine Mathematik-Sanfter Mathematikunterricht-Allgemeine Mathematikdidaktik. Trends und Perspektiven in einem Wechselwirkungsfeld*. Ulm.

**Apple, M**. 1997. Tomar en serio el poder: nuevas orientaciones en la equidad en la educación matemática y más allá. En: Secada, W.; Fenema, E. y Adajian, L. *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. Madrid: Morata.

**Apple, M**. 1979. *Ideology and Curriculum*. New York/Londres: Routledge y Kegan Paul.

**Apple, M**. 1982. *Education and Power*. New York/Londres: Routledge y Kegan Paul.

**Apple, M**. 1996. *Política cultural y educación*. Madrid: Morata.

**Araujo Freire, A**. 2004 (ed.). *La pedagogía de la liberación en Paulo Freire*. Barcelona: Graó.

**Barton, B**. 1999. *Ethnomathematics and Philosophy*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 3*.

**Bauer, L**. 1990. *Mathematikunterricht und Reflexion*. *Mathematik Lehren*. 38.

**Bauersfeld, H**. 1988. *¿Quo Vadis? Zu den Perspektiven der Fachdidaktik*. *Mathematica didactica*. 11.

**Bauersfeld, H**. 1983. *Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens*. *Lernen und Lehren von Mathematik, Aulis, Köln*.

**Belle; T**. 1987. *Educación no formal en América Latina y el Caribe. ¿Estabilidad, reforma o revolución?* Caracas: Ateneo de Caracas.

**Bernstein, B**. 1990. *Poder, educación y conciencia*. Barcelona: El Roure.

**Bernstein, B**. 1997. *La estructura del discurso pedagógico*. Madrid: Morata.

**Bernstein, B**. 1998. *Pedagogía, control simbólico e identidad*. Madrid: Morata.

**Bernstein, B. y otras/os** 1997. *Ensayos de pedagogía crítica*. Madrid: Editorial Popular.

**Bigott, L. A**. 1992. *Investigación alternativa y educación popular en América Latina*. Caracas: Fondo Editorial Tropykos.

**Bishop, A**. 1988a. *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht.

**Bishop, A**. 1988b (ed.). *Mathematics Education and Culture*. Dordrecht.

**Bishop, A**. 1999. *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

**Bishop, A**. 2000. *Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos?* En: Gorgorió, N.; Deulofeu, J. y Bishop, A. (coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó.

**Blum, W**. 1985. *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion*. *Mathematische Semesterberichte*. Nº 32.

**Blum, W**. 1993 (ed.). *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht: Beiträge aus dem ISTRON - Wettbewerb.* Hildesheim.

**Blum, W. y Niss, M**. 1991. *Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications and Links to Other Subjects - State, Trends Issues in* Mathematics. *Instruction. Educational Studies in Mathematics*. Vol. 22.

**Böer, H**. 1996. Das Risiko von Atomkraftwerken. *Mathematikleheren*. Nº 76.

**Borba, M**. 1990. Ethnomathematics and Education. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 10.

**Bruner, J**. 1987. *La importancia de la educación*. Buenos Aires: Paidós.

**Bruner, J**. 1988. Desarrollo cognitivo y educación. Madrid: Morata.

**Bruner, J**. 1997. *La educación, puerta de la cultura*. Barcelona: Visor.

**Burkhardt, H**. 1981. *The Real World and Mathematics*. Blackie-Birkhauser; reprinted 2000, Shell Centre Publications, Nottingham, U.K. URL: http://www.mathshell.com/scp/index.htm.

**Burscheid, H**. J. 1983. *Formen der wissenschaftlichen Organisation in der Mathematikdidaktik*. *JMD*. 4.

**Capon, N. y Kuhn, D**. 1979. Logical reasoning in the supermarket: adult females use of a proportional reasoning strategy in an everyday context. *Developmental Psychology*. 15 (4).

**Carr, W**. 1990. *Hacia una ciencia crítica de la educación*. Barcelona: Laertes.

**Carr, W. y Kemmis, S**. 1988. *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

**Carraher, D**. 1991. Mathematics in and out of School: A Selective Review of Studies from Brazil. En: Harris, M. (Hrsg.): *Schools, Mathematics and Work*. Londres: Falmer.

**Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D**. 1985. *Mathematics in the street and in schools. British Journal of Developmental Psychology*. 3.

**Carraher, T., Carraher, D. y Schlieman, A**. 1982. *Na vida dez, na escola, zero: Os contextos culturais da aprendizagem da matemática*. Sao Paulo: Caderna de Pesquisa. 42.

**Cerda, A. M. y otros**. 2004. *El complejo camino de la formación ciudadana. Una mirada a las prácticas docentes*. Santiago de Chile: LOM Ediciones / PIIE.

**Civil, M**. 1992. Entering Students Households: Bridging the gap between out of school and in-school mathematics. En: A. Weinzweigh y A. Cirulis (eds.). *Proceedings of the 44th International Meeting of ICSIMT*.

**Corbalán, F**. 2000. El Currículum en la ESO. En: Goñi, J. M. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Editorial Graó.

**Da Ponte, J. P**. 2004. Problemas e investigación en la actividad matemática de los alumnos. En: Giménez, J.; Santos, L. y Da Ponte, J. P. (coords.). *La actividad matemática en el aula*. Barcelona: Graó.

**Damerow, P**. 1986 (ed.). *Mathematics for all. Problems of cultural selectivity and unequal distribution of mathematical education and future perspecti. ves on mathematics teaching for the majority*. París: UNESCO.

**Delanty, G**. 2003. C*ommunity. Comunidad, educación ambiental y ciudadanía*. Barcelona: Graó.

**Ernest, P**. 1998. *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, State University of New York Press*.

**Fischer, R**. 1982. *Einige Ansätze zur Philosophie im Mathematikunterricht*. En: Steiner, Hans-George (ed.): *Mathematik - Philosophie - Bildung, Aulis*. Köln.

**Fischer, R**. 1988a. *Mittel und System. Zur sozialen Relevanz der Mathematik. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 20 (1).

**Fischer, R**. 1998b. *Technologie, Mathematik und Bewußtsein der Gesellschaft*. En: Kadunz, G. (ed.) Mathematische Bildung und neue Technologien. Teubner, Stuttgart y Leipzig.

**Fischer, R. y Malle, G**. 1985. Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, BI Wissenschaftsverlag. Mannheim y Wien.

**Flecha, R**. 1997. *Pensamiento y Acción Crítica en la Sociedad de la Información*. En: Bernstein, B. y otros. Ensayos de Pedagogía Crítica. Madrid: Popular.

**Frankenstein, M**. 1997. *La equidad en la educación matemática: el aula en el mundo exterior al aula*. En: Secada, W. G.; Fennema, E. y Adajian, L. B. (comps.). Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias. Madrid: Morata.

**Freire, P**. 1973. *Pedagogía del oprimido*. Madrid: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1985. *La naturaleza política de la educación. Cultura, poder y liberación*. Barcelona: Paidós.

**Freire, P**. 2002. *Pedagogía de la esperanza. Un reencuentro con la pedagogía del oprimido*. Buenos Aires: Silo XXI.

**Freudenthal, H**. 1973. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Bd. 1. Klett Verlag, Stuttgart.

**Freudenthal, H**. 1973. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Volumen I und II. Stuttgart.

**Gellert, U**. 1998. *Von Lernerfahrungen zu Unterrichtskonzeptionen. Eine soziokulturelle Analyse von Vorstellungen angehender Lehrerinnen und Lehrer zu Mathematik und Mathematikunterricht*. Berlín.

**Gimeno Sacristán, J**. 1995. *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

**Giroux, H**. 1990. *Los profesores como intelectuales. Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Madrid: Paidós.

**Giroux, H**. 1992. *Teoría y Resistencia en Educación*. México: Siglo XXI.

**Giroux, H**. 1993. *La escuela y la lucha por la ciudadanía: pedagogía crítica de la época moderna*. México: Siglo XXI.

**Giroux, H**. 2001. *Cultura, política y práctica educativa*. Barcelona: Graó.

**Giroux, H**. 2003. *Pedagogía y política de la esperanza. Teoría, cultura y enseñanza*. Buenos Aires: Amorrortu.

**Gmurman, V. E. y Korolev, F. F**. 1967. *Fundamentos generales de la pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

**Gorgorió, N.; Prat, M. y Santiesteban** 2006. *El aula de matemáticas multicultural: distancia cultural, normas y negociación*. En: Goñi, J. (2006) (coord.). Matemáticas e interculturalidad. Barcelona: Graó.

**Greeno, J**. 1998. *The Situativity of Knowing, Learning, and Research. American Psychologist*. January. Vol. 53.

**Grundy, S**. 1998. *Producto o praxis del currículum*. Madrid: Morata.

**Guzmán, de M**. 2007. *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Revista iberoamericana de educación, enseñanza de la matemática. Madrid: Organización de Estados Iberoamericanos.

**Hernández, F. y Ventura, M**. 2002. *La organización del currículum por proyectos de trabajo. El conocimiento es un calidoscopio*. Barcelona: Graó.

**Hersh, R**. 1997. *What is mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press.

**Heymann, H. W**. 1996. *Allgemeinbildung und Mathematik. Bildungstheoretische Reflexionen zum Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen*. Weinheim.

**Hidalgo, M**. 2009. *Los proyectos de aprendizaje integrado. Una propuesta pedagógica*. Lima: Impresoras Grafi mag.

**Howson, G. y Bryan, W**. 1986. *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90*. Kuwait.

**Howson, G. y Bryan, W**. 1986. *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90*. Kuwait.

**Jackson, Ph**. 1996. *La vida en las aulas*. Madrid: Morata.

**Jackson, Ph**. 2002. *Práctica de la enseñanza*. Buenos Aires: Amorrortu.

**Jonson, D.; Jonson, R. y Jonson, E**. 1994. *Los nuevos círculos del aprendizaje. La cooperación en el aula y la escuela*. Buenos Aires: Editorial Aique.

**Joseph, G**. 1993. "A Rationale for a Multicultural Approach to Mathematics". En: Nelson D.: Joseph, G. y Williams, J. *Multicultural Mathematics*. Oxford.

**Kaiser, G**. 1995. *Vergleichende empirische Untersuchungen in England und Deutschland zum realitätsbezogenen Lehren und Lernen von Mathematik*. En: Steiner, V. (ed.): *Neue Probleme und praxisbezogene Forschungsansätze*. IDM 20, Köln.

**Kemmis, S**. 1992. *Mejorando la Educación mediante la investigación acción*. En: Salazar, M. (ed.). *La investigación-acción participativa. Inicios y desarrollo*. Madrid: s/e.

**Kemmis, S**. 1996. *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Morata.

**Lange, J**. 1996. *Using and Applying Mathematics in Education*. En: Bishop, A. J. (ed.). *International handbook of mathematics education, Part one*. Ultrecht: Kluwer Academic Publishers.

**Lange, J**. 1987. *Mathematics-insight and meaning*. Ultrecht: Kluwer Academic Publishers.

**Lave, J**. 2001. "La práctica del aprendizaje". En: Chaiklin, S. y Lave, J. *Estudiar las prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires: Amorrortu.

**Lave, J**. 2001. *Estudiar las prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires: Talleres Gráficos Color Efe.

**Leontiev, A**. 1978. *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ciencias del Hombre.

**Leontiev, A**. 1979. *La actividad en la psicología*. La Habana: La Habana.

**Leontiev, A. N**. 1973. *El hombre y la cultura*. Problemas teóricos sobre la educación. México D. F.: Grijalbo.

**Lorente, P. G**. 2001. *Sugerencias para la Práctica de la Evaluación desde una Posición Teórica-Crítica*. En: Mainer, J. (coord.). *Discursos y prácticas para una didáctica crítica*. Sevilla: Díada.

**Maaß, J**. 1988. *Mathematik als soziales System . Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht*. Weinheim: Deutscher Studienverlag.

**Maaß, J. y Schlöglmann, W**. (eds.) 1989: *Mathematik als Technologie? Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Neuen Technologien, Aus- und Weiterbildung*. Weinheim: Deutscher Studienverlag.

**Magendzo, A**. 1996. *Currículum, educación para la democracia en la modernidad*. Bogotá: s/e.

**Magendzo, A**. 2003. *Transversalidad y currículum*. Bogotá: Magisterio.

**McLaren, P**. 1997. *Pedagogía crítica y cultura depredadora. Políticas de opresión en la era postmoderna*. Barcelona: Paidós.

**McLaren, P**. 1998. *Pedagogía, identidad y poder. Los educadores frente al multiculturalismo*. Rosario/Santa Fe: Homo Sapiens.

**McLaren, P**. 2001. *El Ché Guevara, Paulo Freire y la pedagogía de la revolución*. Buenos Aires: Siglo XXI.

**McLaren, P**. 2005. *La vida en las escuelas. Una introducción a la pedagogía crítica en los fundamentos de la educación*. México D. F.: Siglo XXI.

**Mora, D**. 1998. *Probleme des Mathematikunterrichts in lateinamerikanischen Ländern-explorative empirische Studie zur Entwicklung didaktische und curricularer Innovationenansätze im Kontext der Educación Popular am Beispiel Nicaragua und Venezuela*. Universidad de Hamburgo. Disponible en: www.sub.uni-hamburg,de/disse/05.

**Mora, D**. 2005. *Didáctica crítica y educación crítica de las matemáticas*. En: Mora, D. (coord.). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. La Paz: Campo Iris.

**Mora, D**. 2009. *Didáctica de las matemáticas desde una perspectiva crítica, investigativa, colaborativa y transformadora*. La Paz: Instituto Internacional de Integración.

**Mora, D. y Oberliesen, R**. 2004. *Trabajo y educación: Jóvenes con futuro. Ideas educativas y praxis sobre el currículum, la escuela, el aprendizaje, la enseñanza, la formación docente en un contexto internacional*. La Paz: Campo Iris.

**Moreno, A**. 2004. *Ideología y educación matemática*. El proceso de infusión ideológica. Barcelona: Octaedro-EUB.

**Niss, M**. 1987. Applications and Modeling in Mathematics Curriculum - State and Trends. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*. 18.

**Oberliesen, R**. 1998. Arbeitsorientierte Bildung in Netzwerk von Lernorten. *Arbeiten und Lernen / Technik*. 8. N° 29. Seelze: Friedrich Verlag.

**Oberliesen, R. y Reuel, G**. (eds.) 2003. *Schule zwischen materieller und virtueller Lernkultur. Ballmannsweiler*: Schneider Verlag.

**Ortega, T**. 2005. *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: Graó.

**Osborne, J**. 2001. *Hacia una educación científica para una cultura científica*. En: Benlloch, M. (comp.). *La educación en ciencias: ideas para mejorar su práctica*. Barcelona: Paidós.

**Pérez Gómez, A**. 1998. *La cultura escolar en la sociedad neoliberal*. Madrid: Morata.

**Pérez, M.; Mateos, M.; Scheuer, N. y Martín, E**. 2007. *Enfoque en el estudio de las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza*. En: Pozo, J. I. y otros. *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje. Las concepciones de profesores y alumnos*. Barcelona: Graó.

**Perkins, D**. 1995. *La escuela inteligente*. Barcelona: Gedisa.

**Perkins, D**. 1997. *Un aula para pensar*. Buenos Aires: Aique.

**Perkins, D**. 2003. *La bañera de Arquímedes y otras historias del descubrimiento científico*. Buenos Aires: Paidós.

**Perrone, V**. 2003. *¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión?* En: Stone Wiske, M. (comp.). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Talleres Gráfi cos D´Aversa.

**Pollak, H**. 1979. *The interaction between mathematics and other school subjects*. En: UNESCO (eds.), *New trends in mathematics teaching IV*. Paris.

**Restivo, S.; van Bendegem, J. P. y Fischer, R**. 1993 (eds.): *Math Worlds. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*. New York: State University of New York Press.

**Sacristán, G**. 2005. *La educación que aún es posible*. Madrid: Morata.

**Schroeder, J**. 2000. *Mathematik*. En: Reich, H. y Holzbrecher, A. y Roth, H.-J. (eds.). *Fachdidaktik interkulturell. Ein Handbuch, Leske + Budrich*. Opladen.

**Schweiger, F**. 1992. *Fundamentale Ideen-eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik*. *Journal für Mathematikdidaktik*. 13 (1992) 2/3, S.

**Serrano, W**. 2003. *El discurso matemático en el aula. Mimeografiado*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

**Serrano, W**. 2005a. El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía*. XXVI (75).

**Serrano, W**. 2005b. *Elementos de Álgebra.* [*Unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez"*]. Tesis de Maestría no publicada. Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

**Serrano, W**. 2006. *Algunos desarrollos teóricos en Educación Matemática: Una revisión de sus fundamentos*. Mimeografiado. Caracas: universidad Central de Venezuela.

**Serrano, W**. 2009. *Algunos elementos para una educación matemática crítica en Venezuela: conocer y conocimiento. Integra Educativa*. Vol. 2, Nº 2. La Paz: III-CAB.

**Siede, I**. 2007. *La educación política. Ensayos sobre ética y ciudadanía en la escuela*. Buenos Aires: Paidós.

**Skovsmose, O**. 1994. T*owards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

**Skovsmose, O. y Valero, P**. 2007. *Educación matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información*. En: Giménez, J., Díez-Palomar, J. y Civil, M. *Educación matemática y exclusión*. Barcelona: Graó.

**Sotelo Valencia, A**. 2000. *Neoliberalismo y educación. La huelga de la UNAM a finales del siglo XX*. Disponible en: http://www.rebelion.org/ docs/9882.pdf.

**Steiner, H. G**. 1989. Philosophische und epistemologische Aspekte der Mathematik und ihr Einfluß auf den Mathematikunterricht. *Mathematische Semesterberichte*. 36 (1).

**Stenhouse, L**. 1984. *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.

**Stenhouse, L**. 1987. *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Morata.

**Tietze, U.-P., Klika, M. y Wolpers, H**. 1982. *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Braunschweig: Vieweg.

**Tietze, U.-P., Klika, M. y Wolpers, H**. 1997. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis*. Braunschweig: Vieweg.

**Torres, J**. 2001. *Educación en tiempos de neoliberalismo*. Madrid: Morata.

**Urton, G**. 2003. *La vida social de los números: una ontología de los números y la filosofía de la aritmética quechuas*. Cuzco: Centro de Estudio Regionales Andinos "Bartolomé de las Casas".

**Viaña, J**. 2009. Teoría crítica o positivismo en la práctica pedagógica. *Integra Educativa*. Vol. 2, Nº 2. La Paz: III-CAB.

**Vygotsky, L. S**. 1926. *Psicología pedagógica*. Buenos Aires: Aique.

**Wass, S**. 1992. *Salidas escolares y trabajo de campo en la educación primaria*. Madrid: Morata.

**Wenger, E**. 2001. *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

**Wille, R**. 1995. *Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept für die Schule*. En: Biehler, R. u.a. (eds.): *Mathematik allgemeinbildend unterrichten*. Aulis, Köln.

**Winter, H**. 1991. *Entdeckendes Lernen in Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig.

**Xie, X. y Carspecken, P. F**. 2008. *Philosophy, Learning and the Mathematics Curriculum. Dialectical Materialism and Pragmatism related to Chinese and U. S. Mathematics Curriculums*. Rotterdam y Taipei: Sense Publishers.

**Zabala, A**. 1999. *Enfoque globalizador y pensamiento complejo. Una respuesta para la comprensión e intervención en la realidad*. Barcelona: Graó.

# RELACIÓN ENTRE LENGUAJE, PENSAMIENTO, MATEMÁTICAS Y REALIDAD

*Dr. David Mora*
*Director Ejecutivo del Instituto Internacional de Investigación Educativa para la Integración del CAB.*
*dmora@iiicab.org.bo*

## INTRODUCCIÓN

La inquietud que tiene, con cierta frecuencia, la comunidad de educadoras matemáticas y educadores matemáticos, y demás personas interesadas en aspectos educativos, con respecto a la relación entre las matemáticas y el lenguaje, puede ser ampliada con la incorporación de los dos componentes, también importantes, de la didáctica: el aprendizaje y la enseñanza; es decir, el pensamiento y la realidad.

En este sentido, el aspecto fundamental que nos interesa en este trabajo, entre otros, consiste en discutir las siguientes componentes fundamentales: 1) ¿qué relación podríamos establecer, desde la perspectiva de la didáctica crítica-realista, entre matemáticas, lenguaje, pensamiento, realidad y el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza?, 2) ¿existirá cierta similitud, de acuerdo con los avances de la psicología sociocultural y las neurociencias, entre las representaciones lingüísticas y las representaciones matemáticas mentales de los seres humanos? y 3) ¿cómo podemos impulsar las actividades didácticas, dentro y fuera de los centros educativos, de tal manera que se considere la interacción interdisciplinaria entre el lenguaje y las matemáticas en los procesos de formación integral y el logro de capacidades múltiples de toda la gente?

Aunque no tenemos, de manera inmediata una respuesta completamente satisfactoria a estas interrogantes, consideramos importante iniciar, de acuerdo con las diversas investigaciones y reflexiones teóricas existentes sobre tales temáticas, un proceso reflexivo, teórico y crítico, el cual tendrá consecuencias relevantes para la didáctica de las matemáticas, en particular, y para la interdisciplinariedad didáctica en general. Sin embargo, es necesario el planteamiento de un conjunto de preguntas, algo más especificas, en torno a las cuales deseamos desarrollar el presente ensayo.

En consecuencia, intentaremos responder, aunque de manera teórica y en correspondencia con otros estudios sobre estas temáticas, lo siguiente: a) ¿qué relación podemos establecer entre el lenguaje, el pensamiento, las matemáticas y la realidad? b) ¿qué papel juegan el contexto y las interacciones socioculturales en la conformación de las estructuras mentales del ser humano en torno al lenguaje, el pensamiento y las matemáticas? c) cómo podríamos aprovechar el uso del lenguaje, tanto técnico como coloquial, en la comprensión de las matemáticas?, d) ¿qué importancia el tratamiento de las matemáticas social y naturalmente significativas para el desarrollo del pensamiento y el lenguaje?, e) ¿cómo podemos hacer usos de las matemáticas escolares para el desarrollo de capacidades lingüísticas, argumentativas y comunicativas?, f) ¿existe realmente una semejanza entre la idea sobre las estructuras lingüísticas universales y las estructuras matemáticas universales? y g) ¿Cómo podemos usar, desde el punto de vista didáctico, los avances científicos actuales sobre la comprensión del lenguaje para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y viceversa?

En este trabajo no nos ocuparemos sobre el concepto de inteligencia o las teorías actuales que se ocupan de la misma. Sí trataremos, con cierta profundidad, diversos aspectos sobre el lenguaje, tales como la estructura semántica convencional constituida por los tres signos básicos: *índice, ícono y símbolo*, insistiendo por supuesto en la importancia de cada uno en el desarrollo del pensamiento, especialmente matemático. Por supuesto que no pretendemos, por el momento, sumergirnos en el mundo de la lingüística, ya que éste no es nuestro campo específico de acción e investigación, aunque es de gran interés para comprender aún más aspectos vinculados con la construcción de significados socialmente compartidos. Además, el conocimiento sobre las representaciones lingüísticas nos ayudan, entre otras cosas, a la comprensión de las representaciones matemáticas, lo cual a su vez tendrá consecuencias importantes para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en los diversos ámbitos del sistema educativo.

También intentaremos adentrarnos en el mundo del pensamiento, particularmente en lo referido a los conceptos, los razonamientos, los juicios y las valoraciones. Consideramos, en este sentido, que es necesario comprender, de acuerdo con la psicología sociocultural y las neurociencias, cómo se pone de manifiesto la interacción entre pensamiento, lenguaje y matemáticas. En este sentido, podríamos considerar que el lenguaje es propio de los seres humanos con el cual pueden comunicarse, usando un conjunto muy diverso de signos tanto orales como escritos, cuyo significado es fundamentalmente cultural.

El lenguaje, además, podría ser parte de las capacidades humanas vinculadas directamente con el pensamiento y los contextos múltiples que conforman la realidad. Por esta razón, nos interesa estudiar, en el presente trabajo, algunos elementos vinculados con las teorías de la manifestación del lenguaje en las estructuras mentales de los seres humanos. Veremos aspectos tales como: la relación entre el lenguaje y el instinto; los planteamientos sobre el lenguaje universal o el innatismo; la tesis sobre el relativismo lingüístico o la influencia del contexto sociocultural en la conformación del lenguaje y del pensamiento, lo cual será trabajado con cierta amplitud, tomando en consideración los aportes de la psicología sociocultural de la Escuela Soviética. Insistiremos en la relación, en correspondencia con los conceptos sobre internalización y externalización, entre pensamiento, lenguaje, matemáticas y realidad, con lo cual nos atrevemos a lanzar una tesis sobre la posibilidad de *la existencia de un módulo mental matemático, como resultado de la herencia sociocultural, con cierto énfasis en la genética, y las relaciones dialécticas entre los sujetos y los contextos*. Finalmente, veremos algunas consecuencias didácticas importantes para el tratamiento del lenguaje y las matemáticas durante el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza según los avances científicos sobre la comprensión del lenguaje y las matemáticas, así como el desarrollo del pensamiento y su relación con concepción de las matemáticas realistas y sociocognitivamente significativas.

A partir del intercambio mutuo entre ideas sobre el aprendizaje especializado, por ejemplo las matemáticas, y el aprendizaje del lenguaje resultan algunas orientaciones didácticas básicas, las cuales están directamente relacionadas entre sí. Entre ellas, podemos mencionar las siguientes: función que cumplen las lenguas como medio de comunicación y rendimiento cognitivo en el proceso de aprendizaje y enseñanza; influencia del lenguaje, las matemáticas y el pensamiento para el desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades múltiples, sobre todo vinculadas con el estudio y el trabajo, el papel que juegan las formas del lenguaje en los procedimientos y métodos para el tratamiento de una variedad de situaciones problemáticas propias de los contextos socioculturales, el fomento del aprendizaje con la ayuda del lenguaje de acuerdo con tareas concretas y los niveles de comprensión; importancia de las representaciones lingüísticas y matemáticas para la solución e indagación de situaciones problemáticas complejas, etc.

Desde el punto de vista comunicativo, el lenguaje cumple la función social de exteriorizar los mensajes, es el medio apropiado para el aprendizaje y la enseñanza. Esta acción activa de los sujetos está simultáneamente acompañada por los procesos de interiorización individual de cada sujeto, activando con ello las diversas estructuras mentales de pensamiento. En este sentido, podríamos decir que el lenguaje se encargaría de poner en marcha el gran sistema neuronal, en correspondencia con el mundo exterior a la mente. El lenguaje hablado, escrito, mímico e iconográfico, se convierte en el medio apropiado para el tratamiento del conocimiento científico fuera y dentro de las aula. Los procesos comunicativos, básicamente dialogados, se sobreponen a cualquier otro medio didáctico, incluyendo los libros de texto, las presentaciones visuales mediante gráficas e imágenes, puesto que el lenguaje además de permitir el intercambio de información de manera instantánea, exige del sujeto altos niveles de pensamiento, produciéndose con ello una permanente interacción entre el exterior e interior a las estructuras mentales. Aquí estamos en presencia de la internalización y externalización del pensamiento, sirviendo como puente esencial el lenguaje.


*Figura 1: Recientemente se ha encontrado una de las escrituras más antiguas del continente Abya Yala, concretamente en México.*

La función comunicativa y cognitiva del lenguaje están claramente relacionadas de manera reconocible. Las dos influyen mutuamente entre sí. La función comunicativa fomenta la cognitiva, mientras que la cognitiva impulsa a la comunicativa. En ambos casos existen retroalimentación continua y permanente, aunque se den en espacios diferentes, una internamente en el cerebro y la otra fuera de él, visible y perceptible. También, el lenguaje y el pensamiento dependen uno del otro y, además, uno sigue al otro alternativamente. El lenguaje es componente básico del pensamiento y el pensamiento, de la misma manera, es condición para la comprensión del lenguaje. Esto significa que en el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza, individual colectivamente, se ponen de manifiesto dos posibilidades de funcionamiento de las estructuras mentales, por un lado el pensamiento y por el otro el lenguaje. La sociedad actual exige, con mayor fuerza que en cualquier tiempo de la historia del ser humano, amplias facultades de pensamiento y lenguaje. Es por ello que el cultivo del lenguaje y el pensamiento de manera permanente son indispensables para el desarrollo de estas habilidades y destrezas. Es por ello que la interdependencia entre el lenguaje, el pensamiento, la realidad y las matemáticas son fundamentales para la comprensión interdisciplinaria y para el desarrollo cognitivo de cada sujeto. El lenguaje permite el desarrollo de capacidades para la abstracción, la generalización, la categorización, y en general la conexión entre diversas actividades que fomentan y valoran los conceptos.

## FORMAS DEL LENGUAJE

### Lenguaje oral

Desde hace muchos años los seres humanos han desarrollado facultades altamente complejas, con las cuales pudieron interactuar con sus semejantes y resolver una gran cantidad de situaciones problemáticas propias de sus contextos, sociales y naturales, especialmente vinculadas con sus realidades inmediatas. Una de estas facultades es precisamente el lenguaje y sus diversas formas de manifestación: oral, escrita, iconográfica, convencional, mímico, etc. (Searle, 1980; Chomsky, 1992; Lemke, 1997; Van Dijk, 2000).

En cuanto al lenguaje oral, podríamos indicar que este es la forma predominante en los procesos de aprendizaje y enseñaza interactivos y comunicativos. Contribuye considerablemente con en el intercambio de informaciones, cuyo contenido está conformado por ideas, significados y, particularmente, sonidos. Este último aspecto constituye la característica principal del lenguaje oral. La producción de sonidos por parte de quienes intercambian sus ideas e informaciones tanto con la complejidad de sus propios mundos como con las de los sujetos con quienes interactúan; es decir, los sonidos proporcionan al emisor y al receptor, en su doble función, las ideas elaboradas en la mente por los participantes en la interacción comunicativa (Hierro y Pescador, 1986; Minick, 2001; Habermas, 1999). Ambos, emisores y receptores, tienen la capacidad, desarrollada socioculturalmente, de distinguir o decodificar los significados que acompañan tales sonidos. La característica principal del lenguaje oral consiste en que el mismo está estrechamente vinculado con los procesos de socialización-enculturación de las personas, así como con su educación integral. Quienes se ocupan de los aspectos lingüísticos indican que el sonido es, por esencia, el elemento que permite darle significado y coherencia conceptual a las formas orales del lenguaje (Jakobson, 1963; Aguilera, 1990; Fernández, 1999).

En este sentido, podríamos decir que, el lenguaje oral cumple el papel central de enviar y recibir, mediante el proceso comunicativo, entre dos o más sujetos mensajes en la mayoría de los casos elaborados en el momento cuando ocurre dicho proceso. Los sonidos que caracterizan al lenguaje oral, poseen obviamente un valor y significado lingüísticos, en particular para quienes los construyen y expresan. Es por ello que el receptor del mensaje, no solamente debe prestar la máxima atención al emisor, sino además conocer los significados lingüísticos de las palabras, los sonidos y las expresiones usadas por el emisor del mensaje, tal como lo indica Putnam (1995) y Pimm (1990).

De esta manera se producirá realmente un diálogo comprensible entre quienes actúan en el proceso comunicativo. Para ello es imprescindible, evidentemente, que tanto el codificador como el decodificador de los mensajes tengan dominio apropiado de los significados explícitos e implícitos de los sonidos lingüísticos, lo cual incluye aspectos tales como el pragmatismo lingüístico, la semántica, la morfología, el fonetismo y la gramática (Fernández, 1999; Romaine, 1996; Fitzgerald, 1995; entre otras y otros.[1] Parece que existe un acuerdo amplio en cuanto a que el lenguaje oral constituye la forma prioritaria que posibilita altos niveles de interacción dialogal (Fodor, 1984; Freire, 1971 y 1973; Luria, 1979). El habla permite rápidamente el establecimiento de relaciones interpersonales presénciales o virtuales.

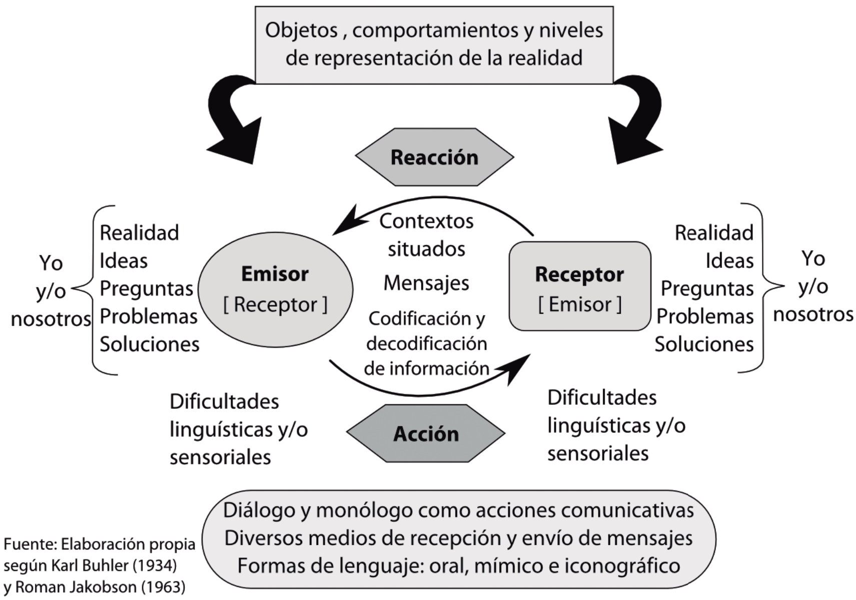



*Figura 2: esquema estructural complejo de comunicación*

Una de sus riquezas precisamente consiste en la improvisación y la innovación en el momento que ocurre el diálogo, lo cual exige altos niveles de concentración y elaboración conceptual por parte de los sujetos activos en el proceso comunicacional. Aquí encontramos una primera relación básica entre el lenguaje y pensamiento (Lemke, 1997; Luria, 2000

---

[1] Por supuesto que no es la intención del presente trabajo ampliar y profundizar en estos aspectos. Ello forma parte de la disciplina que se encarga de la comunicación, particularmente la lingüística (papel de la).

y Vygotsky, 1988 y 1998), lo cual trataremos más adelante. Por el momento consideramos importante *leer las palabras* de Paulo Freire (1970, 104 y 105) sobre la importancia del diálogo en los procesos de comunicación auténtica y como parte del derecho fundamental de todas las personas:

> *Más si decir la palabra verdadera que es trabajo, que es praxis, es transformar el mundo, decirla no es privilegio de algunos hombres sino derecho de todos los hombres. Precisamente por esto, nadie puede decir la palabra verdadera solo, o decirla para los otros, en un acto de prescripción con el cual quita a los demás el derecho de decirla. Decir la palabra, referida al mundo que se ha de transformar, implica un encuentro de los hombres para esta transformación.*
>
> *El diálogo es este encuentro de los hombres, mediatizados por el mundo, para* ***pronunciarlo*** *no agotándose, por lo tanto, en la mera relación yo-tú.*
>
> *Esta es la razón que imposibilita el diálogo entre aquellos que quieren pronunciar el mundo y los que no quieren hacerlo, entre los que niegan a los demás la del mundo, y los que no la quieren, entre los que niegan a los demás el derecho de decir la palabra y aquéllos a quienes se ha negado este derecho. Primero es necesario, que los que así se encuentran, negados del derecho primordial de decir la palabra, reconquisten ese derecho prohibiendo que continúe este asalto deshumanizante.*
>
> *Si diciendo la palabra con que pronunciando el mundo los hombres lo transforman, el diálogo se impone como el camino mediante el cual los hombres ganan significación en cuanto tales.*
>
> *Por esto, el diálogo es una exigencia existencial. Y siendo el encuentro que solidariza la reflexión y la acción de sus sujetos encauzados hacia el mundo que debe ser transformado y humanizado, no puede reducirse a un mero acto de depositar ideas de un sujeto en el otro, ni convertirse tampoco en un simple intercambio de ideas consumadas por sus permutantes.*

### Lenguaje escrito

Podríamos indicar, con cierta seguridad, que en la actualidad no podemos prescindir fácilmente del lenguaje escrito. Este es relativamente nuevo en los procesos comunicativos, puesto que su desarrollo definitivo es muy posterior con respecto a las otras formas del lenguaje. La escritura podría ser comparada con manifestaciones pictóricas, las cuales pretenden enviar mensajes a las y los espectadores, quienes a su vez interpretan o decodifican las mismas de acuerdo con sus propias enculturaciones. En el caso de la escritura, los y las lectores deben tener un dominio, no solamente de los códigos que conforman la estructura simbólica en la cual está expresado el mensaje, sino también de los significados que caracterizan a cada símbolo y su unidad conceptual. La escritura no compite con el lenguaje oral, sino que ellas se complementan. El lenguaje escrito permite, entre otras cosas, mantener intacto los mensajes a través del tiempo, sin que existan cambios, distorsiones, alteraciones, etc. de la intencionalidad del mensaje (Edwards, 1992; Bruner, 1984 y 1987; Cauty, 2001).

Mediante la escritura los seres humanos, tal como lo indica Paulo Freire (1969, 1973, 1997 y 1998) son más libres, independientes y seguros, puesto que tienen la potestad de apropiarse conscientemente del conocimiento y las manifestaciones culturales de su propio mundo y de otros mundos, disminuyendo la manipulación y dependencia. Por ello, los procesos de alfabetización son por esencia procesos emancipadores. La imagen gráfica, la cual imprime una primera diferencia con el sonido, tiene la propiedad de fijar el mensaje a través del tiempo y las circunstancias propias del cambio de la historia. No es que ella detiene los acontecimientos y los cambios permanentes del mundo social y natural, sino que fotografía las realidades, convirtiéndose en testigo perenne de las mismas, lo cual nos garantiza una mejor comprensión de las transformaciones, las cusas y las consecuencias de los hechos.

En la actualidad, observamos que la imagen gráfica, visual por excelencia, ha adquirido aparentemente mayor importancia que el sonido. Esto se debe, evidentemente, a la influencia de la tecnología de la información altamente sofisticada de los últimos tiempos. En el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, observamos la incorporación, cada vez con mayor énfasis, de la imagen, la escritura y la simbología en general, sin que exista claramente una sustitución definitiva del lenguaje oral. Éste seguirá siendo la herramienta básica de los procesos interactivos y comunicativos (Weinrich, 1968; Damasio, 2004; Devlin, 2004; Krummheuer, 1994; Lemke, 1997; Ricoeur, 1980; Fitzgerald, 1995; Eco, 1977; Bruner, 1988; Bernstein, 1993 y 1998; otras y otros).

No podemos concebir, evidentemente, la escritura sin un sistema de códigos socializados y con significados propios, ricos y, en algunos casos confusos. La escritura tiene sus reglas gramaticales compartidas y ortográficamente bien definidas, lo cual permite la disminución de falsas interpretaciones en momentos cuando ocurren los procesos de decodificación por parte de las y los lectores. Por ello, escribir y leer no son actos separados ni tampoco desprendidos del lenguaje oral, aunque éste último se pone de manifiesto en los seres humanos antes que la escritura. Ambas formas del lenguaje, al igual que las demás, están estrechamente unidas, aunque existen grupos sociales que, por cuestiones culturales y socioeconómicas, predomina una u otra forma del lenguaje. En unos casos el discurso es más oral, mientras que en otros es más escrito o visual. En el campo de las interacciones didácticas, lo cual constituye el motivo central de nuestras actividades educativas, es necesario conseguir un equilibrio entre las diversas formas del lenguaje, en especial entre el oral y el escrito, sin que uno domine o predomine, durante el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, sobre el otro. Sin embargo, se verá más delante la importancia de la simbología y el lenguaje escrito en la comprensión de las matemáticas. Es pertinente culminar estas palabras con una idea inicial sobre el papel de la lengua en los procesos interactivos didácticos (Medina Revilla (1989, 39):

> *El análisis de la interacción desde esta segunda perspectiva nos exige una amplia consideración de la misma como* ***realidad compleja****, tratada desde la aportación de varias disciplinas, que ofrecen su visión rigurosa y que el didacta ha de aprovechar para mejorar el conocimiento de la interacción en el aula; las perspectivas más cultivadas que analizan la comunicación son la lingüística, la psicolingüística y la sociolingüística y etnografía.*

## Lenguaje mímico

En los procesos comunicativos pueden estar presentes, con mucha frecuencia, tres situaciones interactivas que requieren una forma de lenguaje totalmente diferente al lenguaje oral y al lenguaje escrito. En primer lugar, existen muchas personas que, debido a ciertas circunstancias, no pueden comunicarse escrita u oralmente con los demás sujetos; en segundo lugar, existen, sobre todo en la actualidad, grandes grupos sociales que por su procedencia sociocultural conocen y dominan una o más lenguas no comunes con las respectivas lenguas de los sujetos con quienes interactúan; en tercer lugar, el lenguaje oral y escrito no son suficientes para comunicar apropiadamente los mensajes en determinadas situaciones (Weinrich, 1968; Chomsky, 1989; Aguilera, 1990; Postigo y Pozo, 2000; entre otras y otros).

Esto trae como consecuencia que se empleen signos o gestos con diversas características, conformándose una forma de lenguaje mímico. Un ejemplo ampliamente conocido constituye el conjunto de signos y símbolos pintados en los cuerpos de las personas pertenecientes a grupos culturales, quienes no dominaban las lenguas de otros grupos culturales, existiendo, sin embargo, la necesidad de comunicarse entre sí. Diversas partes del cuerpo humano, como las manos, la cara, la cabeza, etc. han sido utilizados comúnmente para mejorar o posibilitar los procesos comunicativos entre las personas, aún entre quienes dominan la misma lengua oral y escrita. Algunos grupos sociales lograron, en tiempos iniciales y posteriores de la expansión humana por el planeta, construir sistemas mímicos de comunicación altamente sofisticados, con los cuales podían compartir informaciones o establecer dominios de unas culturas sobre otras. Un ejemplo característico podría ser el proceso de colonización y evangelización impuesto por los europeos a las culturas precolombinas. Estos grupos invasores utilizaron medios bárbaros y sutiles, con la ayudada de las imágenes y la mímica, para imponer creencias, obediencia y un sistema inhumano de explotación y esclavitud. Los invasores europeos colonizaron este continente, también con la ayuda del lenguaje mímico e iconográfico, puesto que las formas de lenguaje oral y escrito no pudieron ser usadas inicialmente y, además, fueron empleadas como medio para la dominación.

El lenguaje mímico no es una forma de lenguaje exclusiva de los sordos, mudos o sordomudos, tampoco podríamos afirmar que él tuvo su importancia y utilidad solamente en el pasado. Por el contrario, sigue formando parte fundamental de la comunicación entre los seres humanos, especialmente durante el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, también en el campo de las ciencias naturales (Harlen, 1989; Bruer, 1995; Zech, 1995; Lorenz, 1997; Lemke, 1997; Pinto, 1998; Köhler, 1992; Minick, 2001; Damasio, 2004; Devlin, 2004; Spitzer, 2005). Las y los docentes u otras personas cuando exponen sus ideas o intercambian con otras personas sus puntos de vista, sobre todo mediante el diálogo, usan con mucha frecuencia la mímica como una forma de lenguaje complementario a los lenguajes oral y escrito.

El lenguaje mímico tiene gran utilidad en diversas situaciones complejas, la ejemplificación didáctica en los procesos interactivos educativos incorpora diferentes elementos del lenguaje mímico. En el ámbito de la didáctica de las matemáticas, existe un campo rico de investigación, el cual cosiste en determinar la influencia e importancia de la mímica en la comprensión de algunos conceptos matemáticos (Zech, 1996; Spitzer, 2005; Pimm, 1990; Nesher, 2000; Lauter, 1997; Carraher y Schliemann, 1991). Muchas y muchos docentes, por ejemplo, muestran con sus manos el comportamiento de ciertas funciones, sus características, continuidad, crecimiento o decrecimiento. Cuando tenemos la oportunidad de observar clases de matemáticas podemos percibir claramente la incorporación, por parte de las y los docentes sobre todo, de una variedad importante de gestos, con los cuales se pretende fortalecer o aclarar los respectivos mensajes. Vygotsky (1995, 91), en una de sus múltiples reflexiones sobre la construcción del lenguaje por parte de la/el niña/o indica lo siguiente:

> *En la educación preescolar en el círculo infantil, radica el fundamento de todo el trabajo educativo futuro, en particular, de la enseñanza del lenguaje. Precisamente en esta cuestión central trataré de demostrar la importancia de principio de la educación preescolar, la cual consideramos fundamental en todo el sistema. Aquí comienza la enseñanza del lenguaje por sus aptitudes naturales: el balbuceo, la mímica natural, los gestos constituyen la base de la formación de los hábitos articulatorios.*

*El lenguaje se considera una parte de la vida social del niño. Generalmente para la enseñanza tradicional del lenguaje a los sordomudos estas aptitudes naturales se han atrofiado, han desaparecido, como si se paralizaran y se desprendieran bajo la influencia de las condiciones externas desfavorables. Luego siguió la época del desarrollo mudo, cuando el lenguaje y la conciencia del niño se han separado definitivamente en el desarrollo y sólo al inicio de la edad escolar del niño se ha comenzado a enseñarlo especialmente a hablar a instaurarle los sonidos. Para este tiempo el desarrollo del niño avanza generalmente tanto que el enseñarlo lentamente a hablar se convierte en una carga y en un trabajo que no tiene ninguna aplicación práctica. Esto por una parte. Por otra, los hábitos de la mímica y de los gestos ya resultan ser tan arraigados que el lenguaje oral no puede luchar contra ellos. Cualquier interés vivo por el lenguaje se ha eliminado y sólo con medidas artificiales, con una rigurosidad excepcional y a veces con severidad, recurriendo a la conciencia del alumno, se logra enseñarlo a hablar. Pero todos sabemos bien, de igual manera, qué frágil es eso, es decir, apoyarse en la educación sólo mediante los esfuerzos conscientes del alumno que van en contra de sus intereses fundamentales y de sus costumbres.*

### Lenguaje iconográfico

El ser humano, mucho antes de desarrollar el lenguaje oral, ha usado elementos gráficos como ayuda para comunicarse con otros seres humanos. Las imágenes han estado presentes en las diversas formas de interacción social dentro de una cultura o entre culturas diversas. En la actualidad, por supuesto, las imágenes se convierten en partes fundamentales del intercambio de ideas e informaciones. Las imágenes transmiten, junto con sonidos, un conjunto de significados altamente condensados, explícitos e implícitos, cuya decodificación requiere obviamente procedimientos también complejos. El alfabetismo gráfico se ha convertido actualmente en una segunda forma de alfabetización, estrechamente vinculada con el análisis de contenido gráfico, lo cual consiste en la destreza alcanzada por una persona para interpretar correctamente las imágenes, cuyo significado queda, en la mayoría de los casos, subyacente en la complejidad de las realidades o en la mente del emisor. La intención de la visualización consiste en que el receptor se aproxime muy de cerca al verdadero significado de la realidad expresada mediante la imagen (Ricoeur, 1980; Chomsky, 1973 y 1989; Davis y Hersh, 1989; Cooper, 1990; Wertsch, 1993; Maza, 1995; Mayer, 1997; Khisty Licon, 1997; Cole, 1999; Perkins, 2003; Hußmann, 2003; Devlin, 2004; Spitzer, 2002 y 2005; etc.)

Una de las desventajas que observamos actualmente del auge rasante de los mensajes gráficos es precisamente que las personas están muy interesadas en obtener la mayor cantidad de información, en menos tiempo, con un mínimo de esfuerzo intelectual. El puro lenguaje gráfico, sin una adecuada regulación, impide, contrariamente a la intencionalidad del lenguaje en su sentido amplio, la profundización sobre los objetos y los hechos. La complejidad tiende a simplificarse, no en el sentido de la comprensión, sino en el de la trivialidad del mensaje mismo, perdiéndose con ello la fuerza transmisora y comunicativa de la imagen. El análisis de contenido insiste en la necesidad de tomar en cuenta la combinación de los diversos tipos de lenguaje tanto en la transmisión de los mensajes como en su decodificación, aunque hay momentos en los cuales es necesario separarlos para poder ver las menudencias latentes o subyacentes representadas en la imagen, la palabra, el gesto o el sonido (Habermas, 1966; Pérez Serrano, 1984; Krippendorf, 1990).

El lenguaje gráfico podría estar subdividido en dos grandes categorías; por una parte, las imágenes construidas, como en el caso del pintor, por el emisor para enviar a través de ellas un determinado mensaje o como complemento del mismo; en segundo lugar, tendríamos las imágenes que muestran, aunque en un segundo nivel de abstracción, las realidades tal como ellas se ponen de manifiesto en el mundo y los contextos. Este es el caso, por ejemplo, de la fotografía. Con el avance y uso de la tecnología, sobre todo computarizada, la fuerza de la imagen ha crecido exponencialmente, percibiéndose inclusive una cierta manipulación de la realidad, lo cual hace prácticamente imposible la interpretación objetiva de sus manifestaciones.

Una foto de una persona puede ser altamente modificada, con la ayuda de esta tecnología, y no reflejar las verdaderas características: reales y originales de aquélla. Esta circunstancia tiene consecuencias directas en procesos de modelación matemática, por ejemplo, para los cuales es necesario, en muchos casos, hacer uso de la visualización. Un mapa de un pueblo, una calle, una casa, una figura de un puente, una pista de carrera, etc., sirven actualmente como ayuda para la generación de actividades matemáticas, la comprensión de conceptos matemáticos y la producción de conocimiento matemático (Cauty, 2001; Devlin, 2004; Echeverría, 1998; Jaulin-Mannoni, 1980; Krummheuer, 1994; Lauter, 1997; etc.). Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, las imágenes como parte fundamental del lenguaje iconográfico no deberían ser tratadas de manera aislada a las condiciones y características complejas de las realidades, puesto que la imagen en sí misma no refleja la totalidad de los componentes necesarios para el logro de un adecuado proceso de matematización de la realidad.

Lo importante de la iconografía es precisamente encontrar, mediante el concepto de ícono, una relación entre la imagen en sí misma y lo que ella desea representar. La iconografía tiene la función, entonces, de incorporar aspectos interpretativos con la finalidad de ver los significados explícitos o implícitos del contenido de las imágenes. En el campo de la didáctica de las matemáticas, la iconografía juega un papel fundamental puesto que en matemáticas, especialmente en cuanto a su aprendizaje y enseñanza, se usan con mucha frecuencia las gráficas y las imágenes. La fuerza de la imagen para la comprensión de las matemáticas, tiene que ver con la potencialidad visual que ella ejerce en las estructuras mentales de los seres humanos. Es mucho más sencillo, por ejemplo, explicar las ideas de función, conjunto o límite con la ayuda de imágenes que hacer uso solamente de la palabra y la descripción puramente discursiva (Skemp, 1980; Resnick y Ford, 1990; Zech, 1995; Resnick, 1999; Devlin, 2004).

Los seres humanos representan a través de imágenes significados de cosas, ideas o conceptos, cuya comprensión trasciende inclusive los limites de las culturas y las lenguas. Cuando le pedimos a una persona que dibuje una casa, evidentemente mostrará la forma de la casa que conoce mediante su proceso de enculturación, sea real o imaginaria (Bishop, 1999; Cole y Means, 1986; Cole y Scribner, 1977). La idea de casa consiste, entonces, en la mayor parte de las culturas, en un espacio cerrado, en forma de cilindro, paralelepípedo, etc., con un techo también caracterizado por cierta forma geométrica. La imagen se convierte, consecuentemente, en una representación de la realidad, sea ésta imaginaria u objetiva. Lo importante, en este caso es que la palabra casa implica una imagen, ésta obedece a ciertas características socioculturales y expresa una idea compartida inclusive internacionalmente por buena parte de la humanidad. En este sentido, podríamos decir que las representaciones de la realidad iconográficas traspasan el mundo de las lenguas, imponiéndose ante las barreras y fronteras artificialmente impuestas por los grupos y estructuras de poder nacionales e internacionales (Freire, 1969 y 1971; Apple, 1996 y 1997; Adorno, 1998).

Es importante resaltar, tal como lo hemos indicado en otras oportunidades (Mora, 2006a), que las imágenes constituyen el medio apropiado para la abstracción representacional de la realidad. Mediante ellas podemos mostrar, por una parte, y analizar, por la otra, los niveles en los cuales intentamos representar el mundo, los hechos y las cosas. Es por ello, que la visualización, como estrategia didáctica, se ha convertido durante los últimos años en un medio apropiado para el desarrollo de procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva crítica y realista (Mora, 2005a y 2005b).

Hemos insistido en varias oportunidades que mediante el proceso de internalización y externalización los seres humanos establecen una relación directa entre el mundo exterior a su pensamiento y la conceptualización de su pensamiento, produciéndose de esta manera importantes niveles de abstracción, los cuales quedan reflejados mediante el lenguaje. La relación entre los *sentidos internos*, tales como la imaginación, memoria, atención e intuición, con los *sentidos externos*, los que están directamente en contacto con el mundo exterior a la mente; permite la conformación de puentes con las realidades. Esta relación entre las realidades, sus representaciones y las marcas sensibles existentes a través del tiempo en las estructurales mentales, son posibles gracias a las diversas formas del lenguaje, en particular el lenguaje iconográfico, así como a las relaciones reflexivas y críticas que tienen lugar cuando se comparte, no necesariamente de manera convergente, opiniones sobre el mundo y las cosas.

El lenguaje iconográfico contribuye considerablemente con esta relación entre lo particular y lo general, ayuda a realizar abstracciones y, evidentemente, a simplificar ideas y la complejidad de nuestro pensamiento, independientemente si los objetos son estrictamente naturales o realizaciones humanas. En el primer caso, tenemos la representación de la realidad a través de pinturas realistas, por ejemplo, o la fotografía, y en el segundo caso, tenemos la representación de la realidad a partir de la imaginación del pintor. En este último caso, la iconografía obedece más a un proceso de abstracción complejo, donde el mensaje refleja, además de la socialización histórica de la persona, su producción imaginativa, intelectual, abstracta, creativa y crítica (Bernstein, 1993 y 1998), contribuyendo además con el aumento de la capacidad para el análisis crítico de la realidad. Aquí encontramos una relación importante entre la teoría crítica y el lenguaje, la cual explica en gran medida el vínculo entre la intuición, como manifestación mental humana directa y el pensamiento intelectual, racionalmente elaborado por los seres humanos. Estos dos conocimientos, el intuitivo y el intelectual, unidos a la crítica, permiten al ser humano la creación de generalidades conceptuales (abstracciones) a partir de la acumulación de experiencias diversas y, de la misma manera, nos ayuda a hacer simplificaciones y aplicaciones de conocimientos genéricos a situaciones particulares concretas, siempre en correspondencia con las prácticas específicas particulares o colectivas; este sería, en cierta forma, el papel básico de la lingüística crítica (Young, 1993, 79). Es decir:

> *Ha llegado el momento de pasar, del plano de la teoría general, al análisis del habla concreta, lo cual es pasar del plano de la teoría crítica a la crítica real. La teoría crítica reconstruye las competencias generales de los actores en un nivel elevado de abstracción y no tiene en cuenta las circunstancias particulares. Considera el efecto general de tipos de circunstancias, pero no conjuntos particulares de circunstancias. Se llama reconstructiva porque trata de reconstruir el conjunto de normas o el conocimiento que han debido tener los participantes reales para haber hecho lo que se ha observado que hacían. Esta reconstrucción puede lograrse a partir de unos cuantos casos, como los etnolingüísticas al documentar una nueva lengua, sin que haga falta siempre una muestra representativa. La teoría crítica puede reconstruir, por decido así, en una conversación de café, pero la crítica real es más segura cuando la hacen unos participantes en situaciones reales. Por dos motivos. En primer*

*lugar, porque la misma realización de tal crítica inmanente en las situaciones en que las prácticas lingüísticas tienden a convertir las personas en cosas, o a representar sus opciones como si fuesen ya hechos fijos de la naturaleza, priva a estas prácticas de su fuerza ideológica. Cuando esto lo hagan unos extraños, probablemente será menos eficaz que en el caso de aquellos cuyos intereses estén implicados directamente. En segundo lugar, la crítica se hace mejor dentro de las situaciones, porque sólo los que participan desde dentro pueden comprender realmente sus intereses. Cierto que todos podemos fallar, pero, hablando en general, los extraños, por muy benevolentes que sean, no pueden comprender tanto nuestras «cosas» como nosotros mismos.*

Como podemos ver, entonces, en la relación dialéctica entre abstracción y concreción o, en otras palabras, imaginación y realidad, intervienen dos momentos, el de la interiorización y el de la exteriorización; uno unido al otro por las dos formas de sentido, convencional-externo, que vincula al ser directamente con la realidad y el intuitivo encargado de elaborar conceptos altamente abstractos e imaginativos sobre esa realidad (Vygotsky, 1992, 1995, 2001; Wertsch, 1981, 1988, 1993 y 1998). En este caso, los códigos visuales juegan un papel muy importante, puesto que ellos se convierten en el medio para la transmisión del mensaje y, sobre todo, para la elaboración de las ideas en las estructuras mentales de los sujetos (Bruner, 1988; García-Carpintero, 1996; Cole, 1999; otras y otros). Con la ayuda de la creatividad y la imaginación, tomando en cuenta las experiencias y la memoria, los seres humanos pueden organizar en su mente las situaciones externas y darle su propio significado, moldearlas para producir nuevas ideas con nuevos significados, las cuales quedarán reflejadas en las representaciones icnográficas. En este caso particular, el signo iconográfico cumple una función básica, puesto que él resume tanto la elaboración mental del sujeto como la representación abstracta de la realidad. El lenguaje iconográfico, en este sentido, está determinado por *la abstracción, la concreción, la simbología y la interpretación*. Estos cuatro componentes se relacionan entre sí. El emisor de un mensaje visual, usa diversas estrategias simbólicas, muestra elaboraciones abstractas que son producto de su relación material e histórica con la realidad, la cual refleja claramente su interpretación del mundo, de esa realidad. De la misma manera, el receptor de ese mensaje iconográfico también pone de manifiesto, tal vez con mayor énfasis en la interpretación, estos cuatro elementos. Para ver con mayor claridad lo que deseamos indicar sobre la información gráfica, mencionemos, por ejemplo, lo que indican Postigo y Pozo (2000, 251):

> *¿Qué es la información gráfica? LIBEN y DOWNS (1992) defi nen una representación gráfica como algo compuesto de marcas (puntos, líneas, sombras, colores...) sobre una superficie bidimensional de tal manera que las marcas conllevan un significado a través de las propiedades de su disposición espacial en la superficie (tamaño, densidad y distribución). El dispositivo espacial está diseñado para representar algún referente, sea real, construido o imaginado por ejemplo, mi perro, los perros en general, el producto nacional bruto, unicornios, Boston o la Tierra Media de Tolkien (LIBEN y DOWNS, 1992, 332).*

Uno de los aspectos muy importantes sobre el lenguaje iconográfico, particularmente el imaginativo, consiste en los acuerdos, más que convenciones, históricos y culturales que se han constituido en los diversos pueblos, independientemente del lugar del planeta. Estos acuerdos iconográficos son producto de una necesidad comunicativa entre las y los miembros de una sociedad particular. Tales íconos visuales abstractos obedecen, en la mayoría de los casos, a la necesidad que ha tenido el ser humano para interpretar, comprender y transformar la realidad. Las disciplinas científicas convencionales como las matemáticas, por ejemplo, han desarrollado, a lo largo de su historia particular, una amplia gama de íconos visuales, unos producto de la abstracción del pensamiento humano y otros muy cercanos a la realidad. Las matemáticas son tal vez, la creación humana que con mayor frecuencia usa el lenguaje iconográfico. Podríamos decir, sin temor a equivocarnos, que el mismo es semejante al denominado *lenguaje matemático*, el cual no discutiremos en el presente trabajo, aunque sí haremos referencia a algunos aspectos vinculados con su concepción (Orton, 1990; Pimm, 1990; Lorenz, 1997; Maier y Schweiger, 1999; Mayer, 1986; Maza, 1995; Nesher, 2000; Panizza, 2005). Uno de los aspectos importantes que caracteriza al denominado lenguaje matemático es precisamente la incorporación, por lo menos, de dos formas de lenguaje: el lenguaje lingüístico fonético y el lenguaje iconográfico. Este último está compuesto por una variedad muy amplia de signos y símbolos, por construcciones visuales acordadas por la comunidad de matemáticos y educadoras y educadores en el campo de esta disciplina, construcciones creativas particulares y representaciones de la realidad como las imágenes y las fotografías. Para ejemplificar la idea que manejan muchas personas sobre el posible lenguaje matemático, coloquemos a continuación una cita de Perero (1994, 84):

> *Hay semejanzas entre el idioma de las matemáticas y los idiomas naturales; si miramos algunas **oraciones matemáticas** tales como: x> 3, Y + 5 = 7, m //n, A n B = Φ, P*Q = Q*P, ... vemos en ellas **objetos matemáticos**: números, conjuntos, rectas, matrices, ...*
>
> *Algunos de estos objetos son específicos (3, 7, 0) y pueden ser considerados como los sustantivos del idioma. Otros objetos representan rectas (m, n), conjuntos (A, B), matrices (P, Q) y se pueden interpretar como nombres colectivos.*
>
> *También, hay incógnitas (x, y) que se pueden asociar con los pronombres del idioma. Los verbos de las matemáticas estarían representados por las relaciones entre los objetos (>, =, //). El estudio de estas relaciones es una parte importante de las matemáticas.*
>
> *Otros símbolos (+, *, ∩) representan operaciones que se realizan con los **objetos**, asociando dos o más objetos de la misma clase para crear un **nuevo objeto**. El estudio de las operaciones y sus propiedades es otra parte importante del estudio de las matemáticas.*
>
> *Todo idioma tiene un sistema de puntuación que indica cómo se deben agrupar las palabras para evitar ambigüedades. En matemáticas se usan los paréntesis para indicar qué operación se hace primero, 40/(10/2) no es lo mismo que (40/10)/2.*
>
> *Al igual que cualquier otro idioma, las matemáticas van cambiando constantemente y se adaptan a las nuevas situaciones y a las nuevas exigencias del mundo que nos rodea. Según decía*

*Pedro Puig Adam (1900-1960), el gran pedagogo y matemático español:* ***La primera raya que el pastor primitivo trazara para representar su primera oveja fue el primer símbolo matemático de la Historia. Símbolos o representaciones matemáticas han sido, asimismo, desde el primer tosco diseño de un campo en el papiro hasta la moderna descripción tensorial de la curvatura del Universo****.*

En vista de que éste no es el propósito del presente trabajo,[2] ya que deseamos ocuparnos más bien de la importancia, siempre desde una perspectiva crítica, de la relación entre el lenguaje, el pensamiento y la comunicación para el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, nos ocuparemos a continuación de la idea sobre el pensamiento y el lenguaje, lo cual trabajaremos a la luz de la psicología y la pedagogía desarrollada por la ampliamente conocida Escuela Soviética en estos dos campos.

*Figura 3: Signos que combinan el lenguaje y las matemáticas*

## DESARROLLO DEL LENGUAJE Y EL PENSAMIENTO

Tal como lo hemos indicado en 2.1, el lenguaje oral, entonces, se convierte, en este caso, en una de las formas apropiadas del desarrollo del pensamiento y, en consecuencia, de la conformación de las estructuras

---

[2] **Recomendamos, para profundizar sobre la idea relacionada con la controversia sobre el lenguaje matemático, los trabajos de Walter Beyer (1994 y 2003), Wladimir Serrano (2005a y 2005b) y Ole Skovsmose (1994, David Pimm (1990) quienes han venido trabajando ampliamente sobre esta temática.**

mentales superiores de las personas, especialmente en la infancia (Cole y Scribner, 1977; Luria, 1979, 1987 y 2000; Cole y Means, 1986; Chomsky, 1992; Lemke, 1997; Vygotsky, 1998 y 2001; entre otras/os). Cuando dos o más sujetos dialogan, se producen simultáneamente múltiples acciones en el cerebro de las personas y esto ocurre, según Pinker (2001) en cada sociedad, cultura y momento histórico. Por ello, se considera que el lenguaje obedece a cierta universalidad, ya que en cualquier cultura, independientemente de sus características técnicas y sociales se encuentra una alta complejidad lingüística en cinco componentes indicadas anteriormente;[3] parece ser, igualmente, que todas las personas, sin excepción tal como lo indica Spitzer (2002 y 2005, 125), desarrollan capacidades lingüísticas siguiendo en cierta forma unos procedimientos mentales similares, con lo cual podríamos indicar que existe universalidad en la conformación del lenguaje, determinada por las mismas estructuras del cerebro humano, producto de los componentes genéticos y de las interacciones socioculturales; en tercer lugar, se considera que el lenguaje obedece a un desarrollo similar en todas las sociedades y culturas, para lo cual es necesario procesos de interacción de las personas con otras personas y con el medio inmediato; por último, el lenguaje, a pesar de obedecer a condiciones sociales y contextuales, ocurre en el mundo de la complejidad cerebral, estando determinada por su constitución neurobiológica (Titote, 1986; Chomsky, 1989; Zavaleta, 1991; Pinto, 1998; Damasio, 2004; etc.)

*Permanentemente las personas hacen uso de las formas de lenguaje para expresar sus ideas, angustias y sentimientos*

[3] Más adelante tomaremos en cuenta algunos aspectos sobre la discusión referida a la posible existencia de una gramática universal.

Por esta razón existe, de acuerdo con el avance de las neurociencias, una relación muy estrecha entre pensamiento y lenguaje, adquiriendo las teorías sobre el origen del lenguaje basadas en los planteamientos originales de Vygotsky (1992, 1995, 1998 y 2001), una alta relevancia en correspondencia con los aportes de otras teorías (Pinker, 2001; Chomsky, 1989 y 1992;  Piaget, 1961 1971 y 1978; Sapir (1962) y Whorf (1971); entre otras y otros). [4] El consenso que podríamos encontrar en las diversas teorías sobre el origen del lenguaje, gracias evidentemente al avance del conocimiento actual sobre el cerebro (Spitzer, 2002 y 2005), es en que el lenguaje y el pensamiento están asociados a las formas de interpretación del mundo, a aspectos genéticos también vinculados con las experiencias e influencias contextuales; las relaciones con la cultura y la sociedad y, muy particularmente, sobre las relaciones interpersonales de la gente en comunidades que tienen lugar en espacios, contextos y tiempos específicos durante la historia del ser humano en cada cultura. El Colectivo de Autores (1995, 241-242), al referirse a la importancia que tiene el lenguaje en las relaciones humanas, como principal característica de la diferencia entre los seres humanos y los animales, indican lo siguiente:

> *La transmisión racional, intencional, de la experiencia y el pensamiento a los demás requiere un sistema mediador y el prototipo de este es el lenguaje humano nacido de la necesidad de comunicación durante el trabajo.*
>
> *El lenguaje, la palabra, es la unidad específica del contenido sensible y racional con que se comunican los hombres entre sí. El proceso de comunicación representa quizás la expresión más compleja de las relaciones humanas. Es a través de la comunicación esencialmente que el hombre sintetiza, organiza y elabora de forma cada vez más intensa toda la experiencia y el conocimiento humano que le llega como individuo, a través de su lenguaje.*

---

[4] **Teorías sobre el origen del lenguaje: Steven Pinker (2001): el lenguaje es un instinto; Noam Chomsky (1989): el innatismo o la gramática universal; Piaget (1961): el funcionalismo o la identifi cación del lenguaje con el simbolismo; Edward Sapir (1962) y Benjamín Lee Whorf (1971): la hipótesis de Sapir-Whorf sobre el relativismo.**

*El animal no está capacitado en principio para trasmitir y comunicar sus experiencias individuales a otros representantes de su especie; además, no está capacitado para asimilar la experiencia de la generación de animales de su especie que le antecedieron. Lo que distingue fundamentalmente al hombre del resto de los animales y que le ha permitido el conocimiento y dominio de la naturaleza, es que su personalidad, su experiencia individual está constantemente relacionada con la experiencia de la humanidad, gracias a la existencia de su lenguaje articulado, ya que los animales no poseen idioma para hacerse entender, ni palabras para designar, nombrar, categorizar, conceptualizar objetos.*

*El idioma y el lenguaje son un fenómeno social, surgido en tiempos remotos, cuando uniéndose para su actividad laboral propia, los hombres primitivos sintieron la necesidad de decirse algo unos a otros.*

Una de las preocupaciones fundamentales de la psicología, sobre todo de aquélla vinculada con el lenguaje, la psicolingüística, consiste en estudiar la relación existente entre lenguaje y pensamiento (Titote, 1986; Putnam, 1995; Romaine, 1996; Fernández, 1999; etc.). Las preguntas fundamentales de esta relación, en concordancia con nuestra percepción, podrían ser las siguientes: *a) ¿Cómo se manifiesta en la mente humana el lenguaje y el pensamiento?, b) ¿El pensamiento determina al lenguaje, el lenguaje determina al pensamiento o ambos están dialécticamente vinculados?* No intentaremos buscar respuestas defi nitivas y contundentes a estas interrogantes.[5] Trataremos de analizarlas a partir de los planteamientos desarrollados por la Escuela de Psicología Sociocultural Soviética y los aportes de otras corrientes, recientes, en el campo de la psicología y la lingüística que se encargan de estudiar el vínculo entre lenguaje y pensamiento, más desde la perspectiva psicológica y neurológica (Cole y Scribner, 1977; Titote, 1986; Cole y Means, 1986;

---

[5] Existen investigadores e investigadoras especializados en esta temática, quienes tal vez han llegado a resultados esclarecedores tal como lo indica Milagros Fernández (1999, 137 y ss.) en su importante obra Introducción a la Lingüística, especialmente en el cuarto capítulo, cuyo título es: el lenguaje y su naturaleza neuropsicológica.

Chomsky, 1989; Zavaleta, 1991; French, 1992; Chomsky, 1992; Lemke, 1997; Greeno, 1998; Pinto, 1998; Luria, 1979, 1987 y 2000; Spitzer, 2002 y 2005; Vygotsky, 1998 y 2001; Damasio, 2004; Lave, 1991b, 1997 y 1991a, entre otras y otros).

Una *primera* aproximación consiste en ver si el l*enguaje determina al pensamiento*; es decir, si éste depende del lenguaje. Algunos de las y los autores que han trabajado ampliamente este tema son Chomsky (1989 y 1992) Sapir (1962), Bernstein (1990, 1993 y 1998); entre otras/os, quienes consideran que el lenguaje es básicamente anterior al pensamiento, el cual depende, en gran medida, de la mentalidad compartida de la sociedad donde viven. El pensamiento común inherente a una sociedad es producto de la acumulación histórica del conocimiento, el cual está basado precisamente en el lenguaje de esa sociedad. La lengua de una determinada cultura posibilita o impide que exista un desarrollo del pensamiento y, con ello, del conjunto de la sociedad, lo cual a su vez puede permitir o impedir la estructuración del pensamiento de todas las personas que participan directa o indirectamente en las relaciones e interacciones sociales de ese conglomerado social, cuya red interactiva está basada fundamentalmente en el lenguaje.

Esta posición, aunque toma en cuenta ampliamente la reciprocidad entre lenguaje y pensamiento, no asume una postura dialéctica, al estilo de los planteamientos de Lev Vygotsky (1934/1998), sino que es determinista; es decir, para que ocurra el pensamiento, primeramente debe existir el lenguaje, colectivo o individual, con el cual se van conformando en las estructuras mentales de las personas las diferentes ideas y la red semántica que constituirá finalmente el pensamiento, expresado posteriormente a través del lenguaje. De esta manera se produce un proceso cíclico donde el activador de cada vuelta es precisamente el lenguaje y no el pensamiento.

La *segunda* postura, también defendida por autores tales como Bergson (1972), Piaget (1961, 1971 y 1978), etc. indica que el *pensamiento es quien determina al lenguaje*. El argumento central de esta postura consiste en señalar que en la mente humana ocurren diversas ideas, imaginaciones, fantasías, etc., cuya manifestación concreta a través del lenguaje no es posible. Es decir, todo pensamiento no puede ser expresado en formas de lenguaje, ni siquiera mediante el iconográfico. Esta dificultad tiene que ver con las limitaciones, convencionales en cuanto a la decodificación de los mensajes, que caracteriza a las lenguas y sus respectivas formas. A veces, las personas indican que en sus mentes fluyen muchas ideas y pensamientos, pero que lamentablemente no pueden expresarlas claramente mediante el lenguaje oral, escrito, mímico e iconográfico, quedando los pensamientos escondidos en las entrañas de las mentes que los han construido, sin posibilidad de ser socializados o conocidos por las y los integrantes de la sociedad.

Una de las críticas que podemos hacer a esta teoría sobre la relación entre pensamiento y lenguaje, es que en suministrarle una alta relevancia e importancia al lenguaje oral y escrito. Es por ello que Jean Piaget (1961) considera que la niña y el niño desarrolla su pensamiento abstracto en la medida que va expresando sus ideas mediante palabras y esto está determinado, genéticamente en la mayoría de los casos, por la madurez física e intelectual que va adquiriendo con el tiempo, es decir con la edad. Esta concepción insiste en que el lenguaje está precedido por el pensamiento, el cual va generando ideas, de acuerdo con ciertos niveles de abstracción, cuya manifestación tangible está dada por el lenguaje. Es decir, las personas, especialmente las niñas y los niños, expresan sonidos con significado sólo cuando han elaborado en sus mentes la noción de los conceptos e ideas que desean expresar explícitamente. Aquí nos encontramos nuevamente con una noción muy restringida del lenguaje; o sea, con la idea que las únicas formas con las cuales se puede expresar el pensamiento son la oral y la escrita, descuidando con ello las demás formas de lenguaje, tal como lo hemos indicado al inicio del presente trabajo.

Esta posición contradice, en muchos casos, el desarrollo mismo del intelecto humano, el cual tuvo lugar también en momentos en los cuales no había dominio de ninguna de estas dos formas de lenguaje, tal como las conocemos en la actualidad. El ser humano compartió muchos pensamientos con los demás, durante muchos siglos, sin el uso del lenguaje oral y escrito. En la actualidad existen aún grandes grupos sociales en diversas partes del mundo, quienes no saben leer y escribir; sin embargo, desarrollan y comparten pensamientos e ideas, con la ayuda exclusivamente de las otras formas de lenguaje. Existen muchas personas, además, que no pueden ver, oír y/o hablar, pero que obviamente usan el lenguaje mímico o iconográfico para poder comunicar sus pensamientos y comprender los de los demás. Aquí volvemos nuevamente a encontrar la relevancia e importancia de una concepción amplia sobre el lenguaje, donde se incorporen las otras formas de lenguaje, especialmente el iconográfico.

Aunque se considera que Manturana y Varela (1996, 200-201) están orientados en cierta forma por la concepción radical sobre la construcción del conocimiento, la presente cita refleja claramente la importancia que ellos le dan a la influencia de los contextos socioculturales y a las relaciones entre los sujetos para la conformación del lenguaje, y su vínculo con el pensamiento. Con estas palabras de ambos autores queremos mostrar que, independientemente de la influencia genética y del innatismo lingüístico, la realidad donde actúa cada persona influye determinantemente en la conformación del lenguaje y este a su vez permite la conformación del pensamiento, produciéndose un proceso dialéctico entre pensamiento y lenguaje, ambos vinculados con la realidad.

> *Las palabras, ya sabemos, son acciones, no son cosas que se pasan de aquí para allá. Es nuestra historia de interacciones recurrentes la que nos permite un acoplamiento estructural interpersonal efectivo, y encontrar que compartimos un mundo que estamos especificando en conjunto a través de nuestras acciones. Esto es tan evidentemente así que no es literalmente invisible. Es sólo cuando nuestro acoplamiento estructural fracasa en alguna dimensión de nuestro existir cuando, si reflexionamos, nos damos cuenta de hasta qué punto la trama de nuestras coordinaciones conductuales en la manipulación de nuestro mundo y la comunicación son inseparables de nuestra experiencia. Estos fracasos circunstanciales en alguna dimensión de nuestro acoplamiento estructural son comunes en nuestra vida cotidiana, desde comprar el pan hasta educar a un niño.*
>
> *Son la motivación para nuevas maneras de acoplamiento y nuevas descripciones. Y así, ad infi nitum. La vida humana cotidiana, el acoplamiento social más corriente, está tan lleno de textura y estructura, que cuando se lo examina, asombra. Por ejemplo, ¿ha puesto atención el lector en la increíble textura que subyace a la conversación más banal, en cuanto a tonos*

*de voz, en secuencias de uso de la palabra, en superposiciones de acciones entre los interlocutores? Nos hemos acoplado así por tanto tiempo en nuestra ontogenia que nos parece simple y directa. En verdad, la vida ordinaria, la vida de todos los días, es una filigrana de especificidad en la coordinación conductual (…) La estructura obliga. Los humanos somos inseparables de la trama de acoplamientos estructurales tejida por la «trofolaxis» lingüística permanente. El lenguaje no fue nunca inventado por un sujeto sólo en la aprehensión de un mundo externo, y no puede, por tanto, ser usado como herramienta para revelar un tal mundo. Por el contrario, es dentro del lenguaje mismo que el acto de conocer, en la coordinación conductual que el lenguaje es, trae un mundo a la mano. Nos realizamos en un mutuo acoplamiento lingüístico, no porque el lenguaje nos permita decir lo que somos, sino porque somos en el lenguaje, en un continuo ser en los mundos lingüísticos y semánticos que traemos a la mano con otros. Nos encontramos a nosotros mismos en este acoplamiento, no como el origen de una referencia ni en referencia a un origen, sino como un modo de continua transformación en el devenir del mundo lingüístico que construimos con los otros seres humanos.*

La *tercera* tendencia, con la cual nos identificamos, tiene que ver con la relación dialéctica entre pensamiento y lenguaje, tal como lo hemos indicado en varias oportunidades. Para la Escuela Soviética de Psicología (Luria, 1993; Leontiev, 1978 y Vygotsky, 1934/1998), cuyo objetivo básico era conocer la conciencia a la luz de la influencia de la cultura, la historia y la sociedad en las cuales viven y actúan los seres humanos desde antes de nacer, el pensamiento y el lenguaje no son producto de la existencia de un algoritmo genéticamente programado, sino que lo más importante es el mundo sociocultural donde interactúan los seres humanos. Aquí entra a jugar un papel básico el concepto sobre la internalización y externalización, trabajado por esta importante Escuela (Mora, 2006d). Cada cultura tiene su propia cosmovisión y por ende desarrolla sus propias formas lingüísticas para conocer, interpretar y transformar el mundo, lo cual está estrechamente unido con el desarrollo social, científico y tecnológico de cada sociedad, en su sentido amplio.

Cada vez que analizamos una determinada lengua, independientemente del espacio y el tiempo, vemos cómo su conformación *pragmática, fonética, morfológica, gramatical, lingüística y semántica* está directamente vinculada con las condiciones, características y formas de percibir el mundo (cosmovisión) de esa cultura. Así, observamos, por ejemplo, que unas culturas poseen dobles nombres y significados para un mismo objeto de acuerdo con su estado momentáneo (movimiento o reposo); ciertas cosas de la naturaleza adquieren connotaciones en correspondencia con su uso u utilidad; mientras que unas lenguas tienen que apropiarse de significados y sonidos ajenos para describir situaciones u objetos externos a su cultura, lo cual observamos actualmente a raíz de los procesos de mundialización y los avances técnico científicos. Cuando una cultura invade a otra, no solamente trunca su desarrollo tecnológico natural, por ejemplo, sino que corta de la misma manera, el avance de la conformación del sistema lingüístico. Esto ha sucedido frecuentemente a lo largo de la historia de la humanidad. Un ejemplo característico es el de la llegada de los europeos a *Abya Yala*.

Contrario a los planteamientos realizados por Jean Piaget (1961) en cuanto a la individualidad del lenguaje, Vygotsky (1934/2001) indica que el lenguaje es esencialmente social, cultural e interactivo. Los seres humanos, y especialmente las niñas y los niños, hablan con el mundo, de manera interiorizada o exteriorizada, haciendo referencia a aspectos del mundo, de sus propios mundos, independientemente de que sus componentes sean reales o imaginarios. Así que, para esta corriente psicológica, el pensamiento verbal en su sentido amplio es la fusión dialéctica, desde el punto de vista cognitivo, del lenguaje y el pensamiento (Vygotsky, 1998, 1995 y 1926/2001). En este sentido, la comunicación, fin último de esta relación, en sus diversas manifestaciones, no tiene lugar de manera egocéntrica, sino que ella siempre se pone de manifiesto en correspondencia con otros sujetos. Tanto el pensamiento como el lenguaje, de acuerdo con esta escuela, no están separados o supeditados uno al otro, sino que ambos se encuentran estrechamente vinculados, dialécticamente determinados. No existe el pensamiento antes que el lenguaje y tampoco el lenguaje antes que el pensamiento, lo que existe es una retroalimentación simultánea entre ambos. La mayor parte de las autoras y los autores, en este sentido, están de acuerdo en cuanto a que el ser humano ha desarrollado una gran capacidad mental para representar el mundo real, su naturaleza, sus vivencias y las relaciones complejas entre los sujetos mediante la estructura dual lenguaje y pensamiento. Michael Cole (1999, 141-142), por ejemplo, nos muestra, mediante sus palabras, la necesidad real que ha tenido el ser humano de desarrollar el lenguaje en correspondencia con la evolución del pensamiento.

> *Las inferencias sobre la antropogénesis basadas en datos sobre el uso de herramientas y el desarrollo del cerebro son fragmentarios, pero al menos hay objetos materiales con los que trabajar. Cuando consideramos las preguntas sobre cómo se relaciona el desarrollo del cerebro y el uso de herramientas con los cambios en el pensamiento y el lenguaje, las explicaciones ya dudosas y discutibles se hacen incluso más problemáticas, por la razón obvia de que el lenguaje y el pensamiento no se inscriben materialmente en la naturaleza. Existen datos físicos respecto a los fundamentos anatómicos de la capacidad de producción del lenguaje oral (LIBERMAN, 1991), pero la principal explicación dada para la evolución del lenguaje y las formas avanzadas de pensamiento es que los aumentos en la complejidad del uso de herramientas y la organización social las requieren. Una reconstrucción plausible de la evolución cognitiva basada en la fabricación de herramientas y la organización social asocia los puntos de transición, principales (la aparición del* ***homo erectus****, el* ***homo sapiens*** *y el* ***homo sapiens sapiens****) con la aparición correspondiente de nuevas capacidades cognitivas y comunicativas que, a su vez, se asocian con nuevas formas de organización cultural (DONALD, 1991; RAEITHEL, 1994). En la explicación de Merlin DONALD, el punto de partida para la evolución cognitiva es lo que él califica de* ***cultura episódica****, basada en la capacidad para representar la naturaleza concreta, perceptiva de los acontecimientos vividos.*

Los seres humanos, especialmente las niñas y los niños, ponen en funcionamiento, permanentemente, sus estructuras mentales en relación con: a) los demás sujetos, b) su imaginación y fantasía, c) la realidad social y natural y, sobre todo, d) la explicación y solución *racional* de los fenómenos. El pensamiento consiste en un intercambio de informaciones dadas en el cerebro mediante la conectividad sináptica en correspondencia con los procesos comunicativos entre los sujetos. Al mismo tiempo, mediante el uso de cualquier forma de lenguaje, las personas manifiestan sus ideas al exterior de su mente, generando entonces reacciones en los sujetos receptores de esas informaciones. En este caso, se ponen de manifiesto formas de lenguaje especialmente gestual (mímico) e iconográfico.

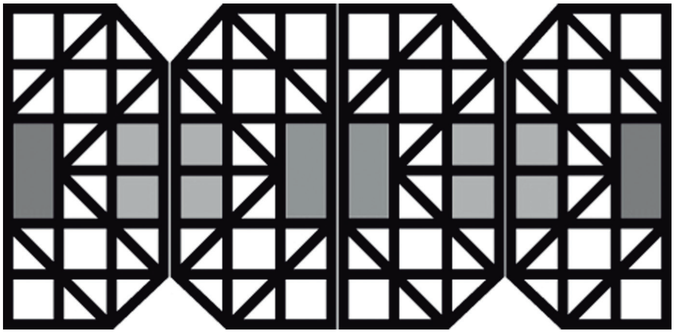
La percepción del mundo mediante los cinco sentidos básicos hace, igualmente, que los seres humanos sigan produciendo pensamientos en sus *sentidos interiores*, en la mente. Ambas relaciones están autodeterminadas y son dependientes una de la otra y se retroalimentan mutuamente, lo cual se convierte precisamente en la característica básica que diferencia a las personas de los animales *inferiores*, tal como lo hemos visto anteriormente, de acuerdo con el punto de vista del colectivo de autores (1995, 241). Es muy probable que el ser humano sea el único animal que posee la facultad de expresar sus pensamientos mediante un lenguaje sistemático y concientemente elaborado, no instintivo como en el caso de los demás animales, y al mismo tiempo posee la capacidad de elaborar pensamientos a partir de la percepción del mundo a través de las diversas formas del lenguaje. Además, los seres humanos tienen la potestad de pensar y reflexionar sobre el pensamiento; es decir, en la mente de las personas ocurren procesos, llamados metacognitivos, que se encargan precisamente de discernir entre el pensamiento intuitivo, espontáneo e improvisado, necesario para la supervivencia inmediata y el pensamiento altamente racionalizado y sistemático, orientado hacia la explicación, argumentación, aclaración y sistematización de los elementos que intervienen normalmente en la solución de situaciones problemáticas complejas. En este sentido, Philippe Perrenoud (2004, 84) expresa lo siguiente:

> *A los saberes lógico-matemáticos, se pueden añadir los saberes relativos a la heurística, la hermenéutica y el pensamiento complejo, surgidos, ya sea de la tradición filosófica o de las ciencias humanas. Todas las ciencias de la mente iluminan una parte de su funcionamiento y pueden, en última instancia, guiarlo o, por lo menos, permitir expresar con palabras los funcionamientos espontáneos y estabilizarlos. Los trabajos sobre la metacognición, la decisión o la memoria pueden ayudarnos a adquirir conciencia de nuestra forma de pensar y, por consiguiente, a disciplinarla.*

Por supuesto que la metacognición y, especialmente su manifestación exteriorizada mediante la palabra, el lenguaje en su sentido amplio, no tiene lugar de manera aislada del mundo donde ocurren los acontecimientos; es decir, la realidad determina, en gran medida, el pensamiento, y, al mismo tiempo, el pensamiento influyen en la realidad, usando como puente fundamental las diversas manifestaciones del lenguaje. Por esta razón, consideramos que debemos seguir trabajando el tema de la relación entre pensamiento y realidad, en correspondencia con el lenguaje.

## IMPORTANCIA DE LOS SIGNOS PARA EL PROCESO REPRESENTACIÓN

Hemos indicado anteriormente que el conocimiento, cualquiera que sea, está directamente vinculado con los estímulos sensibles que perciben los sentidos exteriores del ser humano. Mediante ellos se logra captar las características de la realidad, de los objetos (Mora, 2006d). Luego, construimos conceptos a partir de elaboraciones abstractas, lo cual nos permite la formación de generalizaciones mucho más complejas e imaginariamente representativas de la realidad, dando paso evidentemente a la creatividad (Bruer, 1995; Lave, 1997; Lemke, 1997; Damasio, 2004; Spitzser, 2002 y 2005; Devlin, 2004; etc.). Para ello, las personas en su relación con la realidad y con la ayuda de la comunicación toman algunos elementos representativos de esa realidad, suficientes para la representación conceptual compleja. Desde esta perspectiva, la construcción del conocimiento tiene que ver con la combinación de dos componentes fundamentales: a) Selección de características determinadas de un objeto cualquiera, previamente inspeccionado y b) Activación de las estructuras mentales que, por analogía, tienen ciertas características similares al objeto percibido. La combinación dialéctica de ambos elementos permite al ser humano construir, mediante procesos creativos, un objeto o una imagen diferente a las dos representaciones iniciales. Aquí está la fuerza de la imaginación, la memoria, la creatividad y la innovación, las cuales tienen lugar realmente en la mente del sujeto, siempre en relación univoca con los contextos exteriores a ellas. Este sería un proceso de simbolización complejo, propio de los seres humanos. Muy diferente, por supuesto, a la simplicidad de las acciones que caracterizan a los demás animales (Skemp, 1980, 97; Dennett, 1995).



*Obra de Mateo Manaure*

El ser humano, a diferencia de los demás homínidos, ha desarrollado la potestad intelectual de generar significados abstractos sobre las cosas, sustituyendo la realidad directa y concreta por algún significante, el cual remplaza al objeto, la cosa o al hecho. Evidentemente, sin significantes no podríamos construir diversos niveles de abstracción de la realidad ni tampoco podríamos desarrollar procesos de comunicación usando las formas del lenguaje oral y escrito, las cuales están altamente determinadas por significantes y significados (Fernández, 1999, 113-115 y ss; Beuchot, 2004; Pinker, 2001).

## La interacción sociocomunicativa mediante los índices, los íconos y los símbolos

Los seres humanos somos seres fundamentalmente sociales. Normalmente queremos compartir con otras y otros, o por lo menos mostrar, lo que sucede en nuestros pensamientos, lo que vemos, oímos, sentimos, creemos, sabemos, queremos, deseamos o lo que estamos realizando en un momento determinado. Este objetivo lo podemos conseguir de diversas formas y maneras. Lo logramos mediante ciertos gestos, cuya comprensión puede ser limitada para quienes ven el relato. Con nuestras manos podemos señalizar figuras y formas, por ejemplo: hacer dibujos en el aire de figuras que pueden ser reconocidas inmediatamente por las personas interlocutoras. De la misma manera, podemos mostrar nuestros pensamientos a través de las diversas formas del lenguaje, tal como lo hemos discutido anteriormente. Podemos hacer uso de esta gran variedad de posibilidades de expresión porque los seres humanos tenemos la facultad de hablar, ver, oír, sentir, tocar, oler y, sobre todo, de comprender (Perkins, 1995; Vygotsky, 2001; Luria, 1993; Mora, 2006d; Colectivo de Autores, 1995). Es decir, nos movemos entre el mundo del contacto directo con la realidad y el mundo de nuestra interioridad mental, intelectual. A través de una señal podemos fácilmente establecer una relación entre una situación y un significado (Fernández, 1999, 114). Si movemos la nariz, y simultáneamente hacemos un gesto facial, entonces estaremos indicando un determinado mensaje y si el gesto fácil es diferente, también será diferente lo que queremos decir o saber con la ayuda del movimiento de la nariz (Beuchot, 2004). Es muy probable que no todas y todos los que ven estos dos gestos perciban inmediata y diferenciadamente el mensaje, pero seguramente la gran mayoría se dará cuenta que en efecto ha tenido lugar un proceso comunicativo entre dos o más participantes. Todas y todos podemos ilustrar estas formas comunicativas con variados ejemplos, producto de nuestras experiencias cotidianas. Cada persona, diariamente, vive procesos de envío y recepción de informaciones usando estos mecanismos y medios comunicativos. Sin embargo, no podría ser posible la comunicación, mediante cualquiera de las formas manifiestas del lenguaje, si no existieran significados compartidos, aunque los mismos formen parte del conjunto de ideas, palabras, constructos, etc. de cada sujeto individualmente. Al respecto, Moisés (2004, 39) indica, refiriéndose especialmente al campo de la educación matemática, lo siguiente:

> *Significado e sentido foram conceitos introduzidos por Vygotsky (1987) ao tratar das relações entre linguagem e pensamento. Posteriormente, Luria (1979d, 1987) trouxe maiores esclarecimentos, apoiado em dos lingüísticos mais recentes. É ele quem chama a atenção para o de ser o significado um sistema de relações formado objetivamente durante o processo histórico, e que se encontra contido na palavra (id., 1987, p.45). Ao assimilar o significado de uma palavra o homem está dominando experiência social. No entanto, essa depende da individualidade de um. É essa individualidade que faz com que uma mesma palavra conserve, ao mesmo tempo, um signifi cado -desenvolvido historicamente- compartilhado por diferentes pessoas e um sentido todo próprio e pessoal para cada um. O sentido de uma palavra depende da forma com que está sendo regada, isto é, do contexto em que ela surge. O seu significado,*

*no to, permanece relativamente estável. É formado por enlaces que sendo associados à palavra ao longo do tempo, o que faz com que considere o significado um sistema estável de generalizações, compartilhado por diferentes pessoas, embora com níveis de profundidade e amplitude diferentes. Na vida cotidiana, tanto quanto na escolar, percebe-se com clareza diferentes níveis de profundidade e de amplitude que os significados passam a ter para a criança.*

Lo interesante en esta interacción comunicativa consiste en la existencia de un acuerdo implícito, tácito, social, cultural e, inclusive, intelectual entre quienes actúan en su juego. Sin embargo, para que pueda existir tal comunicación, es necesario, evidentemente, un sistema lingüístico, en torno al cual nos podamos relacionar (Beyer, 1994 y 2003; Serrano, 2002, 2005a y 2005b). Mientras que las persona receptora de la información, que al responder a tales señales también se convierten en persona emisora, en la relación, recíproca, comunicativa. Estos ejemplos de envío y recepción de señales, mediante la mímica y la gesticulación, tienen lugar a través de la incorporación de tres elementos básicos: *índices, íconos y símbolos*, los cuales permiten darle significado/s a las señales respectivas (Morris, 1994; Beuchot, 2004).

Consideramos importante discutir, aunque sea brevemente, estos tres componentes. En primer lugar tenemos el concepto de *índice*. Desde el punto de vista de su etimología latina, esta palabra indica *dedo que señala*. Un ejemplo unívoco podría ser una señal de desviación o de dirección de una

---

Significado e sentido foram conceitos introduzidos por Vygotsky (1987) ao tratar das relações entre linguagem e pensamento. Posteriormente, Luria (1979d, 1987) trouxe maiores esclarecimentos, apoiado em dos lingüísticos mais recentes. É ele quem chama a atenção para o de ser o significado um sistema de relações formado objetivamente durante o processo histórico, e que se encontra contido na palavra (id., 1987, p.45). Ao assimilar o significado de uma palavra o homem está dominando experiência social. No entanto, essa depende da individualidade de um. É essa individualidade que faz com que uma mesma palavra conserve, ao mesmo tempo, um signifi cado -desenvolvido historicamente- compartilhado por diferentes pessoas e um sentido todo próprio e pessoal para cada um. O sentido de uma palavra depende da forma com que está sendo regada, isto é, do contexto em que ela surge. O seu significado, no to, sigue siendo relativamente estable. Está formado por los enlaces que están asociados con la palabra a lo largo del tiempo, lo que hace que considere el significado en un sistema estable de las generalizaciones, compartido por diferentes personas, aunque con niveles de profundidad y magnitud diferentes. En la vida diaria, tanto como en la escuela, nos damos cuenta claramente de los diferentes niveles de profundidad y amplitud que tienen los significados para la niña y el niño.

calle. Las señales tienen, en general, para todas las personas un significado común, compartido y adquirido mediante los procesos de socialización. Ellas quieren decir, de acuerdo con el ejemplo de la señal que permite informar tanto a los chóferes como a los peatones, que debe irse en una determinada dirección o indican que en esa dirección está el lugar a donde queremos dirigirnos. En la señalización la forma (acción o figura) y el significado están directamente relacionados (Sapir, 1962; Whorf, 1971, entre otras/os). Las personas, inclusive, desarrollan habilidades comprensivas para leer rápidamente los mensajes que transmiten las figuras y/o las acciones, antes de presentarse la situación informativa, conformándose con ello una forma de lenguaje, y por ende de comunicación, a partir de las figuras y/o las acciones. En el caso de las partes del cuerpo, en el lenguaje mímico, ya existen acuerdos establecidos y compartidos en las culturas y grupos sociales (Whoef, 1971; Pinker, 2001). Los índices nos permiten percibir rápidamente informaciones importantes, desde la distancia, lo cual nos ayuda a preparar, en lo inmediato, las acciones pertinentes necesarias. Así, por ejemplo, podemos ver cuando un transeúnte está caminando ebrio por las calles o cuando se le ha agotado el tiempo a un expositor durante un panel de conferencistas.

En segundo lugar tenemos el *ícono*, el cual proviene del griego *eikon* y cuyo significado es réplica e imagen. El ícono es lo visible, audible o perceptible, la imagen que podemos percibir claramente, estática o en movimiento (Morris, 1994; Beuchot, 2004). El mundo real está lleno de imágenes, unas naturales y otras creadas con la intención de informar o establecer relaciones comunicativas. En el campo de la didáctica, y muy particularmente de la didáctica de las matemáticas, las imágenes juegan un papel básico, puesto que su capacidad informativa y comunicativa es mucho más fuerte y efectiva que las palabras (Orton, 1999; Skemp, 1980).

El signo icónico muestra más de lo mostrado en lugares y momentos determinados. Así, por ejemplo, al ver una señal amarilla o roja que deja ver a niños cruzando la calle, nos indica rápidamente que allí se encuentra una escuela, que la velocidad tiene que ser disminuida rápidamente, que se debe tener mucho cuidado y, entre otras cosas, que esa escuela podría ser privada o pública o la escuela de nuestros hijos. Es decir, los íconos, además de proporcionar una información clara y específica para lo cual han sido creados y colocados en un determinado lugar, ayudan a establecer relaciones mucho más complejas, abstractas, particulares e individuales. Permiten poner en práctica y desarrollar ideas, pensamientos, siempre en contacto directo con las necesidades reales de los sujetos (Pinker, 2001; Lemke, 1997; Spitzer, 2002 y 2005).

Las imágenes y, muy concretamente las señalizaciones, muestran situaciones potenciales que pueden suceder o no en un momento determinado. Esto significa que las señalizaciones adquieren dinamismo, cierta vida, tal como ocurre con todo proceso comunicativo. La señal que indica *niñas y niños cruzando la calle* es relativa, comunicativa, puesto que muestra temporalidad y dinamismo, siempre de acuerdo con el momento, las circunstancias y, especialmente, la interpretación del observador, quien la tomará en cuenta en correspondencia con su situación educativa particular. El ícono constituye, entonces, el elemento interactivo básico entre emisores y receptores presenciales, virtuales o circunstanciales. Por ello es muy importantes en los procesos comunicativos didácticos, esencialmente cuando se trata del estudio de las matemáticas. Quienes aprenden y enseñan matemáticas hacen uso frecuente de los íconos, como ayuda para la argumentación, explicación y aclaración de conceptos que obligatoriamente requieren más de las imágenes que de las palabras o las fórmulas u otras representaciones matemáticas convencionales (Krummheuer, 1994, 21; Leuter, 1997, 253).

La tercera forma de señalización es el símbolo. A diferencia del índice y del ícono, el símbolo no establece una clara diferencia entre la imagen y su significado. La asignación de una figura no se basa en la contigüidad, como ocurre con el índice, o el parecido, como sucede con el ícono, sino en el acuerdo o convencionalidad (Saussure, 1977; Morris, 1994; Lemke, 1997; Wenger, 2001; Pinker, 2001; Spitzer, 2002 y 2005). Así, por ejemplo, un signo simbólico muy representativo podría ser la bandera de un país, la cual solamente muestra un(os) color(es), una forma y, tal vez otras imágenes como estrellas o rayas verticales, etc. Se ha acordado, sin embargo, que ese símbolo, simple o complejo, pueda reflejar toda una gama de informaciones sobre ese país. Quien ve la bandera inmediatamente desarrollará en su mente un proceso asociativo, el cual estará determinado obviamente por el interés y la información que tenga esa persona sobre el país. En matemáticas, y particularmente en su didáctica, existe una inmensidad de simbologías, convencionalmente acordadas, sobre las cuales es necesario tener dominio informativo y operativo. Los símbolos, matemáticos o de cualquier naturaleza, no muestran claramente la realidad a la cual se refieren caso contrario al que ocurre con el aviso sobre niñas y niños cruzando la calle (Beyer, 1994 y 2003; Serrano, 2002, 2005a y 2005b). Los símbolos no siempre son intuitivos o sobreentendidos para todas las personas. Para su dominio es necesario, obviamente, una preparación previa, donde se comprenda y acepte definitivamente la convencionalidad que los caracteriza, lo cual permitirá que las personas les asocien el significado convencional local o globalmente aceptado. En el caso de las matemáticas se ha aceptado un conjunto de símbolos, cuyo significado es internacionalmente compartido y con el cual se pueden comunicar tanto las y los matemáticos como demás personas que estén relacionadas con las mismas. Jaulin-Mannoni (1980, 135-136) muestra, mediante la presente cita, la importancia del símbolo en el campo del razonamiento matemático:

> *Se olvida con demasiada frecuencia que enseñar es construir sistemas de significación. Ahora bien, para que se dé auténtica significación se precisa como hemos visto:*
>
> 1. *un objeto significado;*
> 2. *un signo que lo exprese;*
> 3. *paso consciente y recíproco de uno a otro por lo que la reeducación debe hacer hincapié, alternativa o simultáneamente, en tres puntos.*
>
> 1. *Un símbolo expresa una noción cuya existencia hay que verificar o construir. Los capítulos anteriores contienen numerosos ejemplos que podrían servir de ilustración aquí (conceptos de número, distancia, dirección, tiempo, etc.).*
>
>    *Estas nociones son esencialmente intuitivas. «Escribe Descartes que el individuo puede llegar a saber por intuición, no solamente qué piensa, sino también que un triángulo se cierra con tres líneas, que un globo tiene una única superficie ...» (59).*
>
>    *Pero no siempre es fácil llevar al niño a descubrir estas intuiciones en las que rara vez sospechamos las complejas construcciones que a su vez las sustentan; de ahí,*

*la necesidad de crear eventualmente simbolismos suplementarios inventados para las necesidades del momento, de los que ya vimos un ejemplo a propósito del aprendizaje de la hora (60).*

2. *Todo símbolo debe ser objeto de un detenido estudio y de un análisis mi nucioso. Los símbolos empleados ordinariamente suelen ser el resultado de una lenta evolución histórica, y se tiene tendencia a olvidar que, aunque de uso corriente, pueden ser muy complejos.*

   *Por ello, también aquí es interesante crear simbolismos suplementarios que, elaborados a partir de los ya existentes, sirvan de introducción y simplificación a estos últimos. Sin embargo, una vez que el símbolo ha alcanzado su forma definitiva, no debe ser alterado, porque, como por lo general entiende muy bien el niño, «entonces nadie comprendería nada».*

   *Acaso sería criticable el empleo de estos simbolismos suplementarios para niños que con los ya existentes tienen tantas dificultades. Tal crítica tendría fundamento si dichos sistemas suplementarios se incorporasen a los sistemas corrientes, pero nunca pasan de ser un recurso para de forma simplificada dejar al descubierto sus mecanismos, debiendo olvidarse una vez superados (61).* ***El peligro para quien operara con ellos sería creer que estos ejercicios constituyen por sí mismos un fin, cuando no son más que un medio****.*

3. *El paso de uno a otro debe ser, como hemos visto, consciente. En este aspecto hay que señalar el deplorable planteamiento de un sistema pedagógico que promociona en «matemáticas elementales» a un alumno incapaz de distinguir el número de la cifra (62), cuando entre ambos existe la misma diferencia que entre Pablo y el dibujo que lo representa, entre París y el punto del mapa, entre el concepto y el signo que lo expresa.*

Existe una gran cantidad de símbolos, inclusive la mayor parte de las letras de una lengua, han sido convenidas, a través de la historia y las condiciones materiales, por las y los integrantes de cada cultura y grupo social. No han surgido de la naturaleza y de la nada, sino que son producto del desarrollo cultural de cada pueblo, siempre en correspondencia con sus necesidades, intereses y capacidades (Bishop, 1999; Ifrah, 1997; Mora, 2006d).

Entre la forma de la palabra *conciencia*, con cinco vocales no todas diferentes y cinco consonantes iguales tres a dos, y su alto significado, profundamente político y altamente cognitivo, no hay una relación reconocible con la naturaleza; sí, existe, sin embargo, un profundo significado intelectual, el cual pone de manifiesto una elevada abstracción, puesto que relaciona el pensamiento, las acciones y las realidades, cuyo significado refleja inclusive la posición político-ideológica de la persona que la usa en el momento y circunstancia empleada. Mediante el largo proceso de desarrollo de las lenguas se ha llegado, convencionalmente, a la conformación de esta palabra. La misma ha sido creada, no por simple casualidad o capricho personal de alguien, sino fundamentalmente por necesidad cultural (Bruner, 1984; Cole, 1999; Colectivo de Autores, 1995; Fernández, 1999; Freire, 1973; Hußmann, 2003; etc.).

Las palabras, desde esta perspectiva, obedecen a realidades e intereses especialmente compartidos, puesto que su uso no es particular, sino colectivo. La palabra *email*, por ejemplo, no ha sido creada ni expandida en función de una necesidad intelectual particular, sino por la necesidad comunicativa compartida; esta expansión desaparecería o sencillamente no existiría si no hubiese la necesidad de ser usada por varias personas como parte de sus procesos comunicativos. Desde esta concepción del símbolo, podríamos indicar que la simbología matemática permanecerá en el tiempo, no morirá, si la misma es compartida por varias personas. Además, ella obedece a una necesidad pragmática e intelectual del ser humano, la cual forma parte de la vida y la cultura de cada pueblo (Gerdes, 1997; Bishop, 1999; Mora, 2006d).

En el campo de la didáctica de las matemáticas, podríamos decir que el conocimiento colectivo de la simbología contribuirá considerablemente con la comprensión matemática, puesto que sería de conocimiento común el uso de términos matemáticos en las interacciones comunicativas no necesariamente matemáticas. Tanto el símbolo como la combinación de dos o más símbolos tienen la particularidad de mostrar gran cantidad de información, estando la misma directamente vinculada con la realidad y sus representaciones abstractas. Así, por ejemplo, la fórmula sobre la energía, creada por Albert Einstein muestra un conjunto muy importante de teorías físicas y matemáticas, solamente con tres letras y un número, que incluye una controversia histórica sobre el tiempo, el espacio, el movimiento y el concepto de relatividad. Ahora bien, sólo la existencia de esta fórmula, con su gran cantidad de mensajes, información y significados o la conciencia teórica de quien la ha creado o de quien la usa, dentro de su especialidad, no es suficiente para que exista una verdadera comunicación con los lectores de la misma. Es necesario, además, que éstos también tengan un dominio básico; y a veces profundo del área respectiva, dependiendo de sus niveles de abstracción; sobre el significado de la combinación de estos símbolos (Skemp, 1980; Lorenz, 1997; Olson, 1998; Orton, 1999; Spitzer, 2005; etc.).

En el caso concreto de la educación matemática, la interacción entre las y los participantes del proceso de aprendizaje y enseñanza tendrá éxito, en cuanto a la comprensión conceptual, si ambos sujetos o grupos de sujetos tienen dominio del significado de la simbología con la cual están trabajando )Cobb y Bauersfeld, 1995; Fischer, 1986; Gallin y Ruf, 1993; Krummheuer, 1982). Puede suceder que una de las dificultades con las cuales se enfrenta la didáctica y a la cual no se le había prestado mucha atención en el pasado tiene que ver precisamente con el dominio de los significados de la simbología matemática, con la cual se está trabajando (Beyer, 1994; Serrano, 2002; Nesher, 2000; Cauty, 2001; entre otras/os).

En el campo de la lingüística se asume al símbolo como un signo, para el cual los seres humanos se han puesto de acuerdo en cuanto a su forma, característica y significado. Esta concepción sobre símbolo se inspira en el significado de la idea representacional simbólica existente en muchas culturas en diversas partes del mundo. Ellas usaron en la antigüedad la noción de símbolo para fijar y documentar, en los diversos medios disponibles, informaciones importantes, huellas de su existencia y avance social, económico y técnico; es decir, el símbolo ha sido parte fundamental de cada cultura. Una de las cosas, a veces inadvertidas, muy importantes en la teoría didáctica (Mora, 2005a, 2006ª y 2006d) consiste en la utilidad del símbolo para representar los diversos niveles de abstracción de la realidad.

Así, por ejemplo, cuando se construye un objeto material concreto, el cual puede reflejar parte de la naturaleza y/o la creatividad del constructor, éste tiende a la elaboración de una representación simbólica abstracta, lo cual tiene por finalidad comunicar, no solamente sobre la existencia física del mismo, sino fundamentalmente mostrar sus características, cualidades e importancia (Leontiev, 1968; Fodor, 1984; Bruner, 1984; Aguilera, 1990; Chomsky, 1992; García-Carpintero, 1996; Bernstein, 1998; Olson, 1998).

La semiótica, como teoría de los signos y de los sistemas de signos, se encarga precisamente de estudiar su significado más allá de la simple representación simbólica, ella pretende profundizar en el campo de la relación que existe entre el símbolo propiamente dicho y el contexto socio histórico y las circunstancias materiales particulares. Uno de los sistemas de signos altamente elaborados, el cual forma parte fundamental del objeto de la semiótica, es la complejidad de la lengua. Su interés no está dirigido única y exclusivamente al estudio de los signos lingüísticos que conforman una lengua, sino también a los diversos comportamientos de comunicación humana, tales como la gesticulación, el vestuario, la iconografía, etc. que caracterizan las formas representacionales e interactivas de cada cultura y grupo social. Nuestro interés didáctico, pedagógico y político se orienta por la corriente de la semiótica social, ya que ésta toma en consideración las lenguas desde su perspectiva realista; ajustada al/los contexto/s socio-culturales donde ocurren los acontecimientos lingüísticos complejos de los sujetos interactuantes mediante las diversas formas del lenguaje. Para aclarara este aspecto de la semiótica social, consideramos necesario incorporar, en este apartado, las palabras de Lemke (1997, 195 y 196):

> *La semiótica social constituye una síntesis de varias aproximaciones modernas al estudio del significado social y de la acción social. Una de ellas, obviamente, es la semiótica misma: el estudio de nuestros recursos sociales para comunicar significados. Históricamente, la semiótica (también llamada semiología) fue desarrollada como parte de los esfuerzos para sentar las bases científicas de la lingüística (de Saussure, 1915; Bakhtin-Voloshinov, 1929; Hjelmslev, 1943). La semiótica se refiere al estudio de todos los sistemas de signos y símbolos (incluyendo gestos, imágenes, etc.) y de cómo estos son empleados para comunicar y expresar significados.*

> *La lingüística abarca el campo específico del lenguaje y también es parte de la semiótica. El nombre de semiótica social tiene por objeto distinguir la nueva teoría integradora de aquellas otras aproximaciones más tradicionales de la semiótica (véanse Peirce, 1908/1958; Eco, 1976), las cuales pueden incluirse en la llamada semiótica formal. Mientras que la semiótica formal se interesa principalmente por el estudio sistemático de los sistemas de significados por sí mismos, la semiótica social (que por cierto incluye a la semiótica formal) se interroga sobre cómo la gente elabora y utiliza los signos para construir la vida de una comunidad. La idea de la semiótica social para tratar de integrar el estudio del comportamiento humano, especialmente en lo que se refiere a la actividad de elaborar o hacer significados (hablar, escribir, razonar, describir, gesticular, etc.), con el estudio de la sociedad, no es nueva. Hay una amplia tradición al respecto en la cultura antropológica y etnográfica. Muchos antropólogos y etnógrafos han otorgado un papel relevante al lenguaje y han hecho valiosas contribuciones al estudio de los símbolos y de las acciones simbólicas. Uno de los fundadores de la moderna antropología, Bronislav Malinowsky (1923,1935), formuló algunos de los principios de la lingüística social incorporados en la actual teoría de la semiótica social. Y los semióticos sociales también han construido sus ideas retornando el trabajo del antropólogo Gregory Bateson (1972).*

Los sistemas de signos permiten, aunque de manera muy sencilla y limitada, la comunicación entre los animales e inclusive entre los seres humanos y los animales. Los primeros de la última relación establecen unos criterios, en la mayoría de los casos, básicos y particulares para comunicar ideas, sobre todo órdenes, a los animales, conformando una relación comunicacional trivial, basada en un sistema elemental de signos. Este hecho nos muestra que el ser humano tiene la facultad, producto de su capacidad intelectual, de establecer sistemas de signos comunicativos de acuerdo con diversos grados de abstracción y complejidad. En el caso de la didáctica, y particularmente de la didáctica de las matemáticas, esta capacidad humana juega un papel muy importante en los procesos interactivos y, obviamente, en la comprensión conceptual matemática (Titone, 1986; Skemp, 1980; Orton, 1990; Resnick y Ford, 1990; Beyer, 1994; Panizza, 2005). El sistema de signos de los animales ha sido desarrollo y es aplicado, en la mayoría de los casos, por grupos de la misma especie como mecanismo de sobre vivencia, bien sea indicando situaciones de peligro o señalizando la existencia de alimentos. Dos aspectos vinculados directamente en su relación con el medio. En el caso de los seres humanos, el uso de su sistema complejo de signos, también ha estado determinado por su relación con el mundo social y natural, así como por necesidades de otro tipo, especialmente intelectuales, cuya manifestación inmediata es la creatividad, la cual es necesario comunicarla mediante el lenguaje en sus diversas manifestaciones (Halliday, 1986; Luria, 1993; Morris, 1985; Serrano, 2005a; Ullmann, 1976).

Una diferencia básica, evidente y explicada en el marco del desarrollo del sistema cognitivo de los seres humanos, con respecto al sistema de signos de los animales, consiste en la noción de tiempo, cantidad, espacio e importancia. Aunque grupos de animales con alto grado de desarrollo de sus sistemas de signos, como las abejas, las hormigas, los monos o los delfines, podrían poseer una noción de cantidad, espacio e importancia, no pueden seguramente percibir el peligro más allá de su relación concreta, con la ayuda de algunos de sus sentidos altamente desarrollados, con la realidad. No tienen la noción de tiempo en sus tres grandes momentos: pasado, presente y futuro. Tampoco pueden fácilmente, como los seres humanos, enviar informaciones a interlocutores colocados en lugares diversos, puesto que los animales en su sistema de comunicación no pueden usar la intuición y la divagación/ especulación como ocurre con los primeros. Tal vez, por esta razón, los seres humanos tenemos la capacidad, socialmente construida, de poder atender simultáneamente varias cosas, como por ejemplo: conversar con una persona concentradamente y observar acontecimientos que ocurren a su alrededor; estudiar matemáticas y oír música, conducir y oír música; mirar el paisaje y conversar con acompañante; etc. Esta propiedad humana ocurre, ya que el ser humano pone a funcionar al mismo tiempo todo su complejo sistema neuronal (Spitzer, 2002 y 2005; Mora, 2006a; Pinto, 1998; Arnold, 2002; Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Pizarro, 2003; Preiß, 1998).

El tiempo, según nuestro punto de vista, independientemente de su comportamiento implícito en la manifestación del lenguaje, forma parte esencial de los sistemas de signos. La lengua, de los seres humanos permite, mediante el discurso analizar, en el momento presente, posibles situaciones futuras, para lo cual toma referencias de sus propias experiencias y de la historia; especialmente, de su propia historia. Los tipos de signos que componen un sistema simple, como el de los animales, y complejo, como el de los humanos, son: las representaciones elementales básicas, las cuales muestran significados referidos al *ahora* y al *aquí*, reflejan una noción temporal inmediata, ésta es dada por los seres humanos mediante la interpretación del significado, siempre haciendo referencia, en lo más íntimo y profundo de su inconciente, a la realidad originalmente pensada o vivida, independientemente de su alto grado de abstracción.

Mientras más abstracta sea la construcción simbólica, más difícil será entonces la interpretación y comprensión por parte del interlocutor. Si tomamos el ejemplo de una planta; una foto de la misma, sería una representación de segundo nivel de abstracción; un dibujo estaría en un tercer nivel y; así sucesivamente hasta que alguien designe, por ejemplo desde el punto de vista matemático, con una p a cierta cantidad de plantas de la familia de aquélla inicialmente pensada o vista en algún lugar y momento de su historia. Siempre existirá alguna, aunque muy lejana y abstracta, noción vinculada con la realidad. Esta p no dice absolutamente nada con respecto a las plantas representadas, simplemente estableceríamos una relación elemental con la primera letra de la palabra planta, nada más; sin embargo, nuestras representaciones mentales complejas no podrán desprenderse de ella, puesto que la p hace referencia, simbólicamente hablando, a un significado compartido, cultura, histórico. El nivel de abstracción podría seguir aumentando, complicándose, si identificamos la cantidad con una x, en vez de la p, como ocurre con frecuencia en el trabajo con las matemáticas. Es decir, cada simbología, cada palabra, cada frase o descripción, por muy desprendida de las cosas y los hechos concretos, está altamente influenciados por el grupo sociocultural al cual se pertenece. El lenguaje humano, en ese sentido, no puede tener lugar artificialmente como podría ocurrir con el lenguaje de las máquinas, sino siempre en correspondencia con la propia cultura. Por esta razón las lenguas nativas son fundamentales tanto para el aprendizaje como para el cultivo de la misma cultura. Con la finalidad de mostrar el interés de muchas y muchos investigadores preocupados por este aspecto, citaremos a Mayer (1986, 294):

> *Hasta ahora este capítulo ha demostrado que los seres humanos piensan en función de categorías, como «ave» y «petirrojo». Sin embargo, el lector puede preguntarse de dónde provienen estas categorías. En particular, podría preguntarse si las palabras del lenguaje que el lector mismo habla influyen en la forma de dividir el mundo en categorías. Aunque los psicólogos no aportaron demasiados datos a este respecto, los lingüistas y los antropólogos proponen el concepto de «relatividad lingüística»: la idea de que el lenguaje que uno habla influye sobre la forma en que uno aprende y piensa el mundo (SAPIR, 1960; WHORF, 1956). Por ejemplo, basándose en un estudio antropológico del lenguaje y la cultura de hablantes de lenguas no europeas (por ejemplo, los indios Hopi de los Estados Unidos), Whorf define la doctrina de la relatividad lingüística: «Cada lenguaje y cada sublenguaje técnico bien tejido incorpora ciertos puntos de vista y ciertos patrones resistentes a puntos de vista ampliamente divergentes» (pág. 247). Además, los conceptos y categorías que aprendemos y usamos se supone que están influidos y limitados por nuestra lengua nativa: «Cortamos y organizamos la extensión y el flujo de los acontecimientos como lo hacemos, en gran parte porque, a través de nuestra lengua materna, formamos parte de un acuerdo para hacerlo y no porque la naturaleza misma esté segmentada exactamente de esa forma para todo lo que vemos» (pág. 240).*

En consecuencia, el proceso comunicativo en este caso, no dejará de tener éxito por la pobreza de la simbología utilizada, sino que lo tendrá por el uso de otras herramientas comunicativas, basadas en la explicación, ejemplificación, argumentación y retórica de quienes intervienen en las interacciones comunicativas, siempre en correspondencia con los contextos específicos, los cuales han establecido históricamente un sistema lingüístico altamente complejo, cuyo contenido refleja la caracterización simbólica de esa cultura (Leontiev, 1968; Habermas, 1981; Delamont, 1984; Fodor, 1984; Hierro y Pescador, 1986; Lave y Wenger, 1991; García-Carpintero, 1996; Khisty Licón, 1997; Lemke, 1997; Fernández, 1999; Damasio, 2004; Luria, 2000; Devlin, 2004).

Por otra parte, si hacemos uso simultáneo de muchas simbologías altamente abstractas, podría ocurrir que no se establezca una verdadera comprensión sobre las cosas objetivas y subjetivas de la situación u objeto sobre el cual se establece la comunicación. En el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas es frecuente ver esta relación incomunicativa. Esto no quiere decir que siempre debemos tener la simbolización de los contextos inmediatos, y sus representaciones abstractas, unidos estrechamente a las realidades concretas.

Creemos que el éxito de los medios de información audiovisuales está altamente determinado, en la actualidad, por el uso frecuente de la imagen más que de la palabra. Esto ha permitido la manipulación de las actitudes y los comportamientos sobre el consumo, por ejemplo. Consideramos que, en este caso, el nivel de abstracción simbólica es sumamente elemental y extremadamente bajo, acercándose, inclusive, al uso de sistemas, además de la representación directa de la realidad como el caso de la planta en su primer nivel de abstracción, de signos primitivos. Esta estrategia comunicativa de la sociedad de consumo exige poco esfuerzo intelectual y afecta directamente los sentimientos de los sujetos. Tal manipulación y simplificación del sistema complejo de signos de los seres humanos, el lenguaje, tiene por objetivo básico el control de los comportamientos y las acciones, puesto que sin un alto nivel de abstracción en la representación de la realidad, la capacidad de pensamiento es muy pobre y, en consecuencia, los seres humanos serán más fácilmente controlables; perdiendo la palabra su fuerza y potencia como medio para la liberación y emancipación de cada sujeto (Freire, 1969, 1973, 1971, 1979, 1981, 1997 y 1998).

La palabra, en su sentido epistemológico y filosófico, es el medio apropiado para reflexionar, formarse políticamente y transformar las realidades, por muy complejas que ellas puedan parecer. Sin la palabra no es fácil mantener un diálogo auténtico y liberador. Con la palabra podemos cambiar el mundo, siempre en función de las mayorías y esta idea no constituye un simple recurso teórico, sino un argumento necesario. La palabra, sobre todo en matemáticas, puede contribuir tanto a la alienación del sujeto como a su liberación. Ello dependerá, en este caso, de la formación y la conciencia política de los docentes del área. Sobre la importancia de la palabra y el peligro de la alienación matemática, Khisty Licón (1997, 308) indica lo siguiente:

*No obstante, además de la simple comprensión de las palabras y expresiones utilizadas en las explicaciones y problemas, hay otro aspecto que tener en cuenta. Tiene que ver con los procesos de comunicación que estimulan el sentido de lo que significa hacer matemáticas, que favorecen la interiorización de la materia y que enculturan al aprendiz en el mundo de la actividad matemática. En esencia, tiene que ver con la minimización de las sensaciones de alienación con respecto a las matemáticas.*

*El proceso de enculturación es multidimensional y complejo, contribuyendo muchos factores a su realización. Pero un medio fundamental a través del cual se enculturan los estudiantes está constituido por el hecho de tener grandes oportunidades de hablar sobre las matemáticas, de hacer preguntas que prueben su comprensión, de intervenir en debates sobre los diversos procesos matemáticos y, en general, de participar en los niveles cognitivos superiores de la materia que acompañan el diálogo activo. En pocas palabras, se trata del proceso por el que se desarrollan y progresan los signifi cados compartidos. Es también el medio por el cual se personalizan los signifi cados. Sin el diálogo participativo, el aprendizaje se detiene en el exterior de la persona; es algo que queda aparte de las experiencias personales y de las conexiones mentales, escurridizo y difícil de sostener (por ej.: BISHOP, 1991). FREIRE (1970) dice también que la adquisición de la* ***palabra que nombra el mundo*** *es lo que confiere poder a un individuo para participar en el mundo. En consecuencia, el habla es el vehículo crítico por el que un individuo interioriza los significados, se encultura y desarrolla su sentido de poder personal en matemáticas.*

Este proceso de enculturación está altamente condicionado a los procesos de representación que ocurren en los sujetos de manera voluntaria o involuntaria. Las representaciones, además, no son neutrales ni escapan a las estructuras alienantes de cada sociedad, para lo cual evidentemente son determinantes los índices, los signos icónicos y la simbología French (1992; García-Carpintero, 1996; Habermas, 1981; Freire, 1981; Lave, 1997; etc.). Es necesario, en este sentido, tomar en cuenta la problemática sobre la representación, especialmente en el ámbito de las matemáticas.

En comparación con los índices, los signos icónicos poseen un grado mayor de abstracción, mostrando por tanto mayor cantidad de información. Para poder comprenderla el receptor tiene que tener referencias conceptuales sobre lo señalado por el emisor; es decir, el observador tiene que construir concientemente una conexión icónica apropiada que tome en cuenta la forma del signo en cuestión y su significado (Fernández, 1999).

Las representaciones icónicas pueden tener un parecido muy cercano con el objeto o cosa representada; pero también pueden existir, y es muy frecuente en las disciplinas científicas, como en el caso de las matemáticas, representaciones muy abstractas, como podría ocurrir con los pictogramas, los cuales son imágenes muy estilizadas de figuras reales, pero con niveles de abstracción altos, cuyo significado podría depender de las percepciones, interpretaciones, informaciones y análisis crítico del observador. Esta es una de las razones por las cuales se podría pensar, con cierta seguridad, que los animales no disponen de estos sistemas de signos; es decir, sus formas lingüísticas no son muy elevadas, puesto que carecen de la capacidad de abstracción; es decir, la relación entre pensamiento y lenguaje es muy elemental o inexistente (Mayer, 1986; Zavaleta, 1991; Putnam, 1995; Dennett, 1995; Luria, 1993 y 2000; Postigo y Pozo, 2000; Vygotsky, 1995 y 2001; Minick, 2001; Resnick, 1999; etc.).

Los signos simbólicos solamente se pueden conseguir en los sistemas de comunicación humanos. El sistema de símbolos con altos niveles de abstracción o imaginarios, nos permite trascender la realidad concreta, suponerla, representarla, además de su objetivización, en las mentes de quienes desean enviar un mensaje. Siempre nos comunicamos sobre acontecimientos del pasado o del futuro, hablamos sobre nuestras inquietudes percepcionales del mundo, intereses, necesidades y sentimientos. De la misma manera dialogamos sobre objetos y realidades que existen a mucha distancia de nuestra percepción material y concreta; todos estos procesos comunicativos son posibles única y exclusivamente porque poseemos un repertorio simbólico abstracto muy amplio y rico, producto de nuestro propio proceso de enculturación y socialización, así como de nuestra gran capacidad de pensamiento.

Un aspecto sumamente interesante es que este sistema de signos, altamente elaborado por los seres humamos, está presente en cualquier parte del mundo y en cualquier cultura, inclusive en grupos sociales que jamás han tenido comunicación entre sí. El uso de estos tres componentes (índices, símbolos e íconos) y, fundamentalmente, la infinidad de denominaciones, conforman la lengua de una cultura, cuya semejanza con otras aunque muy diversas, está basada en la capacidad de pensamiento y representación del mismo ser humano, siempre en relación con las interacciones humanas y los vínculos con sus contextos.

*El hábitat y los espacios interactivos apropiados son fundamentales para el desarrollo de procesos comunicativos y colaborativos*

La forma universal altamente avanzada de este sistema complejo de signos es precisamente el lenguaje humano. En cierto escalafón de la civilización (Manturana y Varela, 1996), el desarrollo intelectual del ser humano ha logrado la elaboración del idioma escrito, entre otras razones, por la necesidad de ampliar y fortalecer los procesos comunicativos y, en segundo lugar, por el interés de conservar, en el mayor tiempo posible y con una mejor precisión, su propia historia. Este avance sumamente importante de cada cultura permitió que las personas con impedimentos para dominar el lenguaje basado en sonidos, pudiesen comunicarse mediante el lenguaje mímico, como ocurre con los sordos. Esta forma del lenguaje constituye en la actualidad un sistema de lenguaje complejo, al cual se le agregan elementos novedosos con la ayuda del desarrollo tecnológico. Este aspecto no será tratado en el presente trabajo; sin embargo, debemos resaltar que evidentemente esta forma de lenguaje es altamente importante para la construcción de la representación del mundo, de las cosas y las ideas, así como para su exteriorización. Por ello creemos que el lenguaje mímico también contribuye considerablemente con la comprensión y explicación de las representaciones simbólicas, especialmente de las matemáticas. Consideramos importante discutir los tres tipos básicos que caracterizan al lenguaje, los cuales juegan un papel muy importante para la conformación del concepto sobre las representaciones mentales matemáticas y la comprensión posterior de la idea sobre la posible existencia de una estructura mental matemática, similar al planteamiento realizado por Chomsky (1970, 1973, 1974, 1989 y 1992) en cuanto al lenguaje. Las ideas que se encuentran en las mentes de las personas, los pensamientos, solamente en los seres humanos, son exteriorizadas mediante las palabras, las cuales permiten interiorizar igualmente la realidad para seguir interactiva y creativamente generando ideas y nuevos pensamientos. Culminemos, entonces, esta parte con una cita de Rosas y Sebastián (2004, 51 y 52) sobre la verbalización de las ideas:

> *El punto de partida del argumento de Vigotski (1934/1991), lo constituye la afirmación de una diferencia en el origen entre los procesos de pensamiento y los procesos de habla, observándose, sin embargo, que en el curso del desarrollo de ambos procesos, surge una estrecha vinculación entre ambos, vinculación que cambia constantemente. Para estudiar la relación entre el pensamiento y el habla, Vigotski (op. cit.) propone concentrarse en el desarrollo del significado de la palabra, unidad, que a su juicio, concentra toda la riqueza y complejidad del fenómeno en estudio. El signifi cado constituye a la palabra, distinguiéndola de un mero sonido arbitrario, al mismo tiempo, en el plano psicológico, este signifi cado es una generalización, el acto de formación de un concepto.*
>
> *Así, en la conciencia desarrollada, este significado de la palabra permite el despliegue del pensamiento verbal, estableciendo un plano fl uido que va del pensamiento a la palabra y de la palabra al pensamiento. El pensamiento encarnado en la palabra recorre dos grandes planos, uno interno (de sentido, semántico) y otro externo (sonoro). No obstante, constituir una unidad en el lenguaje, cada uno de ellos tiene características propias, las cuales devienen de su distinta orientación*

*y funciones: la función comunicativa del lenguaje se expresa en el plano externo y la intelectual en el interno. Por sus particularidades sintácticas y fenológicas se puede hablar de dos gramáticas y dos sintaxis, una verbal y oral y otra del sentido; las cuales no guardan relación de identidad o subordinación (Baquero, 1996). La idea que* ***está*** *en mi cabeza no es idéntica a la oración con la cual se la comento a otra persona, es más siendo la misma idea probablemente la comentaré a personas distintas usando oraciones distintas. En este sentido se observa una reconstrucción del significado tanto en la comprensión (paso del plano externo al interno) como en el habla (paso del plano interno al externo).*

## Principios básicos cognitivos de los tres tipos de signos

Aunque no nos ocuparemos, en profundidad de la semiótica, sí creemos que tanto la didáctica general como la didáctica especial, particularmente la didáctica de las matemáticas, y la didáctica interdisciplinaria, requieren de la lingüística y, particularmente, de la semiótica, puesto que estas disciplinas nos permiten comprender aún más la relación entre el pensamiento, la realidad, el lenguaje y las matemáticas. La semiótica se encarga de los tres principios de estructuración del lenguaje, los cuales fueron trabajados ampliamente por Peirce (1969) y posteriormente se han convertido en el objeto básico del estudio del lenguaje (Saussure, 1969; Eco, 1977 y 1990). Los tres tipos de signos, índice, ícono y símbolo (figura 4), ponen de manifiesto principios cognitivos fundamentales (Caivano, 2005). Puig (s/f, 4) señala que:

*Para Peirce, los signos pueden ser de tres tipos: íconos, índices y símbolos. Los íconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera. Los íconos se diferencian de los índices, ya que los índices no se parecen a los objetos correspondientes, sino que los señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen. Como consecuencia de ello, si el objeto no existiera el índice dejaría de signifi car, pero seguiría haciéndolo aunque el interpretante no estuviera presente. Los símbolos, por su parte, dejan de significar sin interpretante.*

Cada uno de ellos establece una relación interna entre la forma y el significado. En el primer caso, el *índice*, se basa en el principio de la contigüidad; es decir, en la proximidad entre la señal propiamente dicha, la forma, y lo señalado o lo que se desea señalar, el significado. Objetos o cosas muy cercanas a nosotros, en lo material y en lo abstracto, nos permiten establecer la relación entre forma y significado mediante metáforas. Podemos decir, por ejemplo, *lo que más me gusta del tema de funciones es la gráfica del crecimiento exponencial de la población*. Aquí, vinculamos la forma de la gráfica (*una curva exponencial*) con el significado de la misma (*crecimiento de la población*), quedando de manifiesto obviamente la idea subyacente sobre el tema de funciones.

En el segundo caso, el *ícono*, se basa en el principio de la similitud; es decir, de la relación entre la forma y el significado de manera más general y real. La imagen muestra una relación muy real con su significado. Así, por ejemplo, podríamos mostrar la imagen de un puente parabólico para indicar realmente que se trata de la representación de una parábola, tal como ella es desde el punto de vista matemático o; un tanque de agua en forma cúbica para representar el significado de un cubo. Los agricultores colocan figuras muy similares a las personas para indicar a las aves que hay alguien cuidando las plantas y sus frutos. La forma de una persona, construida de cartón y con un sombrero por ejemplo, pretende significar claramente la existencia de un cuidador peligroso para los pájaros.

En el último caso tenemos la relación entre la forma y el significado de acuerdo con el símbolo. El principio que lo caracteriza va más allá de la contigüidad y la similitud. Es una propiedad altamente cognitiva del ser humano, quien ha desarrollado la capacidad de establecer semejanzas simbólicas muy abstractas, inclusive particulares para cada persona. Las rosas rojas, en la mayoría de los casos, muestran una relación con el amor. Así, cada flor, su color, aroma, etc., le ha permitido al ser humano establecer simbólicamente significados de sentimientos humanos hacia otros seres sujetos. En el caso de las matemáticas, la fuerza de la relación simbólica entre forma y significado es muy grande, puesto que se ha construido un conjunto ampliamente complejo de símbolos, cuyas formas no necesariamente muestra una contigüidad o una semejanza directa con el respectivo significado.

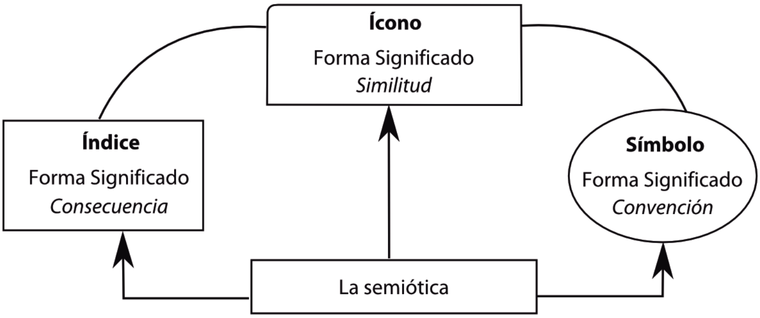



*Figura 4: Relación entre la forma y el significado para los signos: índice, ícono y símbolo*

| Icóno | Indexico | Simbólico | Mezcla de signos |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| Reproductor(similar) | Indicativo y señalización | Convencional | Integrador |

*Figura 5: cuatro componentes básicos de la comunicación*

Existen, sin duda, muchos ejemplos. El caso del signo que usamos para representar una integral, muestra en algunos casos la suma de objetos o cosas (matemáticos). Le damos ese significado, muy abstracto, aunque este signo pueda mostrarnos, a su vez una cierta similitud con la letra s de suma, esta última sigue siguiendo un signo convencional que algunos emplean para la suma. La abreviatura *tg(x)* podría indicarnos varios significados, muy abstractos por cierto, sobre aspectos matemáticos, como por ejemplo la inclinación de una calle. Aquí no encontramos ninguna relación directa entre la calle, su inclinación y el signo *tg(x)*, como podría suceder con un dibujo o una representación icónica, donde la relación entre la forma y el significado está explícito, es visible. Se necesita indicar claramente que en el caso de las matemáticas, el desarrollo del proceso de aprendizaje enseñanza está fundamentalmente basado en la relación simbólica, muy abstracta, entre las formas y los significados, descuidándose las representaciones índicas e icónicas las cuales desde el punto de vista didáctico son más productivas y significativas, mientras que la primera lo sería desde la perspectiva fundamentalmente matemática. Creemos que la didáctica de las matemáticas debe tomar en cuenta, entonces, estos tres aspectos de la semántica. En este sentido, continuaremos con nuestras reflexiones sobre el vínculo entre matemáticas y lenguaje, esta vez nos ocuparemos de la idea de una posible relación entre lenguaje y realidad en el campo de la didáctica de las matemáticas. Con la finalidad de explicar con mayor propiedad la importancia que tienen los signos, no solamente en el campo de la cognición, sino fundamentalmente en cuanto al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, hemos considerado citar, en este caso sobre los *modos de representación*, a dos clásicos de la relación entre cognición y matemáticas. Es decir, Resnick y Ford (1990, 139 y 140), de acuerdo con los planteamientos de Jerome Bruner (1969, 1984, 1987, 1988 y 1997), consideran que:

> *Bruner (1964) describe tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica. La representación enactiva es «un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada» (pág. 2). Se cree que este modo es la única manera por la que los niños pequeños pueden recordar las cosas, en la etapa que Piaget ha llamado sensoriomotriz; es el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento del sonajero con la mano, indicando así que recuerda el objeto en relación a la acción que se realiza sobre el mismo. También los adultos pueden recordar algunas acciones motrices complejas de forma enactiva. Por ejemplo, nuestros músculos se encargan de recordar cuando subimos a una bicicleta, aunque no hayamos montado desde hace años. Quizá sea este modo lo que vemos en los niños que resuelven los problemas de suma dándose con los dedos en la barbilla o en la mesa, en lo que es evidentemente un movimiento de conteo. Para estos niños, el conteo puede suponer todavía un acto motriz, el mismo que adoptaron al principio cuando aprendieron a contar cubos dando un golpecito a cada uno.*

*El segundo modo de representación, el **icónico**, nos separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales. Según Bruner, la representación icónica es lo que sucede cuando el niño «se imagina» una operación o una manipulación, como forma no sólo de recordar el acto sino también de recrearlo mentalmente cuando sea preciso. Tales imágenes mentales no incluyen todos los detalles de lo que sucedió, sino que abrevian los sucesos representando únicamente sus características importantes. Para dar un ejemplo con adultos, una persona que da instrucciones a un forastero sobre cómo llegar a algún sitio, se puede ir imaginando a sí misma haciendo el recorrido, y es posible que mencione la droguería que hay antes de la curva a la izquierda, pero no todas y cada una de las casas, árboles y bocas de incendios del camino. De la misma manera, un niño pequeño que esté aprendiendo la seriación puede guardar en forma de imágenes sus experiencias de seriación de bloques por tamaños, de forma que las instrucciones futuras de seriación las puede comprender refi riéndose a las imágenes de lo que ha construido antes.*

*La representación **simbólica**, que para Bruner es la tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, se posibilita sobre todo por la aparición de la competencia lingüística. Un símbolo es una palabra o marca que representa alguna cosa, pero que no tiene por qué parecerse a dicha cosa. Por ejemplo, la cifra 8 no se parece en absoluto a una formación de objetos que tengan dicha propiedad numérica, ni tampoco lo hace la palabra **ocho**. Los símbolos los inventan las personas para referirse a ciertos objetos, sucesos e ideas, y sus signifi cados se comparten principalmente porque la gente se ha puesto de acuerdo en compartirlos. Cuando los niños empiezan a escribir sus operaciones matemáticas (utilizando números, formatos sencillos como las ecuaciones y las columnas de cifras, y los signos de operación como +, -, e =), es el principio para ellos de la representación simbólica, como lo es su capacidad de «leer» estas notaciones matemáticas. Pronto empiezan a pensar en sus ejecuciones en términos de los mismos símbolos, lo que les abre nuevas posibilidades de pensamiento abstracto.*

## LENGUAJE, REALIDAD Y PROCESOS DE ENCULTURACIÓN CIENTÍFICA

La riqueza del lenguaje en cada grupo cultural es tan grande e importante que tanto la comunidad, en su conjunto, como cada una de las personas pertenecientes a ella, muestran, a través del lenguaje, diversas opiniones interpretativas sobre las cosas, concretas o abstractas. Cada una de las ideas que nos hemos formado sobre los objetos concretos e imaginarios se refleja directamente en el lenguaje, herramienta fundamental que usamos para expresar nuestras interpretaciones sobre ellos. El lenguaje, además de constituirse en el medio apropiado para establecer los vínculos comunicativos entre sujetos y grupos de sujetos, se convierte también en reservorio de formas, significados e interpretaciones. (Freire, 1973, 76; Edwards, 1992, 75; Perkins, 1995, 114; Resnick, 1999, 42; Wenger, 2001, 77).

El lenguaje, en consecuencia, permite que los seres humanos podamos fijar los elementos que caracterizan a la realidad en nuestras mentes, darles significados apropiados y elaborar interpretaciones complejas diversas. Siempre estamos reflexionando sobre la realidad y para ello hacemos uso permanente del lenguaje como herramienta básica de la misma refl exión. En este sentido, el lenguaje no es estático, lineal, ni mucho menos rígido en su relación con la realidad. Él permite, por una parte, mantener un cierto grado de equilibrio conceptual con la finalidad de facilitar la comunicación entre las personas y, en segundo lugar, se convierte en el mecanismo apropiado para construir interpretaciones de la realidad, a veces suministrándole a los elementos diminutos que conforman el lenguaje, las palabras, variados significados. Igualmente existen cosas en el mundo social y natural que adquieren diversas connotaciones a través del lenguaje, así como términos diferentes que representan el significado de un mismo objeto material o imaginario (Cole y Scribner, 1977; Chomsky, 1981; Morris, 1985; Cole y Means, 1986; Halliday, 1986; Luria, 1993; Beuchot, 2004; Dennett, 1995; Pinker, 2001).

El pensamiento individual y colectivo refleja claramente, por medio del lenguaje tal como lo hemos indicado anteriormente, los significados que le damos a la realidad y sus componentes concretos y abstractos. Con nuestro pensamiento tratamos de comprender otros pensamientos y, para ello, nos valemos de las diversas formas del lenguaje. En el caso de las matemáticas, y muy concretamente de su didáctica, usamos el lenguaje para mostrar nuestros pensamientos (matemáticos) y al mismo tiempo para construir innovativamente nuevos conocimientos. El lenguaje, en este caso, se convierte en algo así como un puente, indispensable, para poder cruzar el mundo del pensamiento y de la realidad (Pimm, 1990, 31).

Muchos estudiosos de las ciencias sociales y naturales como: los matemáticos, los filósofos, los pedagogos, etc., se interesan por responder interrogantes sobre el significado de los objetos de estudio. Este método etimológico también es importante en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, puesto que permite la comprensión de los conceptos a partir de su propia génesis; es el método conocido como genético (Selter, 1997). Se parte de la palabra misma, tratando de entender su significado. Por ejemplo el punto de partida para el tratamiento de los temas sobre polinomios o funciones consistiría en iniciar el proceso mediante las preguntas: ¿qué es un polinomio?, ¿qué es una función?, ¿qué relación existe entre estos términos y la realidad?, ¿qué representa cada uno de ellos en el mundo de las cosas reales, abstractas e imaginarias? Cuando partimos de la esencia, del origen y de la particularidad de la palabra, entonces intentamos adentrarnos en su propio mundo, en la *pureza* de la palabra, evitando con ello las cargas subjetivas naturales y propias de las diversas interpretaciones. Este método, obviamente, es inicial y no puede interpretarse como definitivo en el proceso de comprensión de la terminología, especialmente en el caso de las ciencias sociales y la didáctica, puesto que toda palabra tiene una alta carga de subjetividad, inclusive los términos que expresan conceptos de las denominadas ciencias exactas como las matemáticas (Carey y Spelke, 2002).

*Independientemente de las situaciones siempre existe el diálogo entre quienes participan en los procesos de aprendizaje-enseñanza*

El sentido real de cada palabra no puede ser puro y limpio, puesto que la impureza es precisamente el elemento que caracteriza o refleja las interpretaciones subjetivas, y a veces erróneas, dadas por las personas de un conglomerado social. Para la didáctica esta forma de iniciar el trabajo con las matemáticas es sumamente importante, puesto que ellas muestran los errores, las creencias, el entendimiento y los vínculos que tienen las personas con los conceptos matemáticos. No podemos partir del principio subjetivo, que caracteriza a muchas y muchos docentes matemáticos, de que nuestra terminología puede ser fácilmente entendida por todas/os las/os oyentes o receptores en la interacción didáctica (Delamont, 1984; Flanders, 1977; French, 1992). Cada quien, de acuerdo con sus experiencias y creencias, elabora sus propias ideas y conceptos, cuyos significados pueden ser diversos en situaciones y contextos también diferentes, así como contrarios o similares al que poseen las demás personas. Cada quien fija conciente o inconcientemente significados en correspondencia con su propia historia y, sobre todo, en función de comprender el mundo, su propio mundo. No siempre las personas, aclara la psicología social sobre el aprendizaje y la enseñanza, *asimilan* los significados de las palabras exactamente como son mostrados o establecidos en los libros, en particular de texto. Una de las ideas fundamentales de la didáctica de las matemáticas es que las personas especialmente las niñas y los niños, pueden construir sentido sobre los conceptos matemáticos explícitos o implícitos. Sobre este tema podemos referirnos, textualmente, a Resnick (1999, 42) quien indica:

> *Una interpretación de orden superior del currículum básico de matemática es menos clara y directa de la que hemos podido proponer para la lectura. Sin embargo, el examen cuidadoso y detallado de las investigaciones recientes sobre la cognición matemática sugiere que, en esta materia. Así como en la lectura, los buenos alumnos entienden que la tarea consiste en hacer trabajo interpretativo y no simples manipulaciones rutinarias. En la matemática, el problema de imponer sentido adopta una forma especial: dar sentido a símbolos y reglas formales que, con frecuencia, se enseñan como si fueran convenciones arbitrarias más que como expresión de regularidades y relaciones fundamentales entre cantidades y entidades físicas.*

*Las investigaciones recientes sobre el aprendizaje de la matemática señalan una aparente paradoja. Disponemos de abundantes evidencias de que los niños pequeños (incluso antes de asistir a la escuela) desarrollan conceptos matemáticos bastante sólidos, aunque elementales, y son capaces de aplicarlos en diversas situaciones prácticas. Sin embargo, la matemática escolar resulta decididamente difícil para muchos de estos mismos niños. La primera competencia matemática que se adquiere (y la que mejor se desarrolla) es la capacidad de contar (Gelman y Gallistel, 1978).*

Es muy interesante la idea en cuanto a que las formas de lenguaje a las cuales hemos hecho referencia anteriormente, especialmente el lenguaje oral y verbal, están presentes en todas las ciencias, puesto que éstas constituyen el medio ideal para expresar adecuadamente los conceptos básicos de cada ciencia (Harlen, 1989, 98). Su fuerza radica precisamente en la posibilidad de mover nuestro pensamiento entre el mundo de la popularidad de los conceptos científicos, basada fundamentalmente en la intuición, hasta el mundo de la tecnificación terminológica. Es por ello que la lengua se convierte en la expresión básica y natural de toda ciencia y, particularmente de la manera de expresar la misma ciencia (Bruer, 1995; Lemke, 1997; Spitzer, 2005, etc.). La terminología científica no es más que la tecnificación de la lengua misma. Es decir, cada ciencia también podría comprenderse como parte de un lenguaje, altamente elaborado, aunque con objetivos y características diferentes (Devlin, 2004).

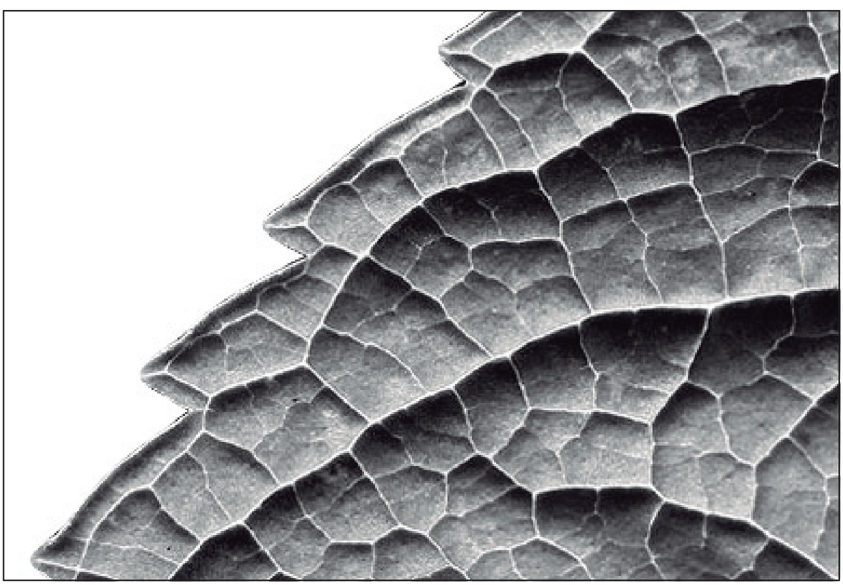
Independientemente del tipo de ciencia a la cual nos dediquemos, siempre tendremos que hacer uso de las formas de lenguaje, sin que éstas obviamente sustituyan a la ciencia respectiva. El lenguaje es, en consecuencia, el indicador apropiado para conectar nuestros pensamientos sobre las realidades y, especialmente, para reproducir de manera comprensible nuestros pensamientos científicos. La ciencia, también las matemáticas, no solamente harían uso del lenguaje para comunicar sus ideas, conceptos, relaciones, etc., sino que dependerían del mismo para poder vincular el pensamiento con la realidad y, así comprenderla, modificarla, estudiarla, produciendo al mismo tiempo nuevas ideas y conocimientos.

Por supuesto que la cultura que caracteriza a un grupo social determinado está sujeta estrictamente a su lengua, oral, escrita, mímica o iconográfica. De la misma manera, la lengua de cada sociedad está directamente vinculada con la cultura, en su sentido amplio, que caracteriza a esa sociedad. La cultura, y por ende el lenguaje, trasciende el mundo de las realidades sociales y naturales. El lenguaje forma parte esencial de la cultura, el cual permite a los seres humanos que muestren, interpreten, comprendan y transformen la realidad, sus propias realidades. La realidad, concreta o abstracta, cercana o lejana, objetiva o imaginaria, etc. es interpretada y comunicada mediante el pensamiento para lo cual se usa el lenguaje en el proceso de internalización y externalización de las ideas (Olson, 1998; Lave y Wenger, 1991; Minick, 2001; Perrenoud, 1998).

El lenguaje tiene como función fundamental intentar ordenar las ideas, las cuales no constituyen simples divagaciones o representaciones caóticas del mundo, de las realidades, sino que ellas muestran cierto orden, coherencia, direccionalidad y, especialmente, conceptualidad. El lenguaje se convierte en la herramienta de cada cultura para ordenar sus propias realidades y mundos concretos e imaginarios. Para ello, obviamente, usa el pensamiento, el cual se refleja de la misma manera a través del lenguaje. Un aspecto sumamente interesante correlacionado, consiste en que, con la ayuda del mismo, podemos hacer una abstracción o interpretación de la realidad, para lo cual se hace uso de un lenguaje sencillo, produciendo el ser humano, con la ayuda de su pensamiento interactivo, ideas mucho más elaboradas, técnica y científicamente complejas, explicaciones coherentemente adecuadas y afirmaciones altamente argumentadas (Romaine, 1996; Spitzer, 2002; Devlin, 2004).

Esto lo podemos apreciar tanto en las diversas lenguas, y consecuentemente en cada cultura, como el mundo del multilingüísmo, lo cual estaría determinado por la multiplicidad de los contextos específicos donde tienen lugar las interacciones culturales y lingüísticas. La fuerza de la lengua y la potencialidad del pensamiento posibilitan a los seres humanos, en gran medida, el análisis y la interpretación de sus realidades de manera diferenciada, llegándose a la obtención de los mismos resultados. La potencialidad lingüística permite que cada grupo social o comunidad realice una interpretación de su propio mundo, también de las conceptualizaciones matemáticas (Bishop, 1999; Mora, 2005a).

*La naturaleza también tienen sus formas de comunicación,*
*lo cual es percibido por cada sujeto de acuerdo con sus intereses,*
*motivaciones y conocimientos*



En la medida en que las culturas desarrollan una mayor interacción, en esa misma medida se logra una interpretación más homogénea. Esto sucede, por ejemplo, con el avance tecnológico y su influencia en las lenguas o, los acuerdos convencionales en el uso de terminologías internacionales comunes o, las traducciones etimológicamente directas de términos propios de cada ciencia, con lo cual se evitaría en cierta forma la distorsión de los significados. En este sentido, el conocimiento, independientemente de que el mismo sea el resultado del esfuerzo de un sujeto en solitario, obedece a leyes comunes compartidas implícita o explícitamente por los integrantes de una determinada comunidad (Chomsky, 1989; Newman, Griffin y Cole, 1991; Manturana y Varela, 1996; Olson, 1998; Carey y Spelke, 2002; entre otras/os).

El lenguaje, por lo tanto, ayuda a las personas, además de la interacción comunicativa, interpretativa y comprensiva, en la elaboración de nuevas ideas conceptuales, terminológicamente compartidas mediante el sistema de signos (índices, íconos y símbolos), con lo cual podemos conocer conceptualmente, manejar apropiadamente, transformar nuestros mundos e, inclusive adentrarnos en otros mundos (Pinker, 2001; Chomsky, 1989 y 1992; Piaget, 1961 1971 y 1978; Sapir (1962) y Whorf (1971).

Antes de pasar a uno de los aspectos básicos de nuestro trabajo, la discusión sobre la importancia del lenguaje para el aprendizaje y las representaciones matemáticas, quisiera culminar este apartado con unas palabras de Harlen (1989, 98), quien nos muestra claramente la relación entre lenguaje y pensamiento, de acuerdo con las teorías psicológicas más conocidas en el campo del aprendizaje y la enseñanza de las ciencias naturales y de las matemáticas.

> *Sobre la relación entre el lenguaje y el pensamiento existen dos escuelas diferentes. Por una parte, está el punto de vista de que hablar es un medio de comunicar pensamientos que se han desarrollado a través de las acciones y de la interacción con las cosas del mundo que nos rodea. Por otra, está la idea de que pensar y hablar es prácticamente lo mismo, de que el lenguaje desempeña una función clave en el desarrollo de las ideas y no sólo en la comunicación de las mismas.*

*La idea de PIAGET sobre el desarrollo intelectual hace menos hincapié en la interacción verbal entre el niño y el adulto que las de BRUNER, VYGOTSKY y AUSUBEL. Según PIAGET, el desarrollo del conocimiento está relacionado con la evolución fisiológica del cerebro y el aprendizaje se produce mediante la actividad física directa con las cosas que están a nuestro alrededor. Los pensamientos son acciones interiorizadas y no palabras, y el lenguaje es un medio para poner en común los pensamientos y no para desarrollarlos. Hasta que el niño alcanza la etapa de las operaciones formales (PIAGET, 1964), después de los 13 años, por regla general, la función del profesor consiste, sobre todo, en facilitar la actividad directa y la interacción social con los compañeros.*

*BRUNER destaca la función del lenguaje en la traducción de las experiencias a una forma* ***simbólica*** *en la mente. El desarrollo del lenguaje infantil abre la posibilidad de influir directamente en el pensamiento del niño mediante el lenguaje y de que éste reorganice su experiencia utilizando el lenguaje* ***como instrumento cognitivo*** *(BRUNER, 1964b). VYGOTSKY comparte esta idea de que el lenguaje es un medio para reinterpretar el mundo:* ***La palabra ... no se limita a acompañar la actividad del niño; contribuye a la orientación mental, a la comprensión consciente; ayuda a superar dificultades*** *(VYGOTSKY, 1962).*

*En la teoría del* ***aprendizaje significativo*** *de AUSUBEL, la función de la actividad directa se subordina a la de dar sentido a los enunciados verbales. AUSUBEL, como BRUNER, cree que cualquier idea científica puede ponerse de alguna manera al alcance de los niños. No cree que los alumnos inventen ideas, sino que las aprenden de otros. Es preciso desglosar la idea o teoría que haya que aprender y expresarla en un lenguaje adecuado al alumno, ilustrándola, a continuación, mediante la actividad práctica. El aspecto interesante de esta perspectiva es que considera que el origen del conocimiento está en los enunciados verbales y que la función de la actividad práctica consiste en darles sentido (AUSUBEL, 1968).*

## 6. MATEMÁTICAS, LENGUAJE Y PROCESOS DE APRENDIZAJE-ENSEÑANZA

La posibilidad que se tiene para dominar una lengua es una de las facultades de los seres humanos, forma parte de su naturaleza misma para aprender. Es sorprendente, realmente, ver cómo las personas y, muy particularmente las niñas y los niños, pueden adentrarse en el mundo, rápidamente, de una lengua extranjera, inclusive muy extraña a su lengua materna. Las niñas y los niños obviamente tienen una mayor facilidad, que las personas adultas, para comprender los detalles, características y complejidades de las lenguas extranjeras (Fodor, 1984; Bruner, 1984; Cole y Means, 1986; Mayer, 1986; Luria, 1993; Vygotsky, 1995; Resnick, 1999). Ellas y ellos puede, sin mayores complicaciones, construir desde niveles muy elementales la estructura gramatical de una segunda o tercera lengua como si realmente estuvieran desenvolviéndose en su respectiva lengua materna (Spitzer, 2002 y 2005; Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Pizarro, 2003). Por supuesto que existe una gran diferencia, aunque ninguna imposibilidad, entre niñas, niños y personas adultas para aprender una lengua, independientemente de su relación genética con la lengua materna. Se conoce, por supuesto, la hipótesis, basada en la neuropsicología y demás neurociencias, en cuanto a que las niñas y los niños en su desarrollo neurológico, poseen mayores posibilidades para comprender los detalles gramaticales de una lengua. La experiencia indica, obviamente, que las personas adultas, a medida que avanza su edad, presentan mayores inconvenientes o requieren más tiempo y concentración, explicación, etc. para entrar en el mundo de una segunda o tercera lengua. También es cierto, en correspondencia con la experiencia cotidiana, que los adultos pueden comprender otra lengua, llegando inclusive a manejarla con cierta facilidad como si la hubiesen aprendido cuando eran las niñas y los niños.

Existen, sin embargo, algunas razones para insistir en los siguientes aspectos vinculados con el aprendizaje de una segunda lengua:

a. En primer lugar, podríamos indicar que solamente las niñas y los niños, tal vez hasta la pubertad, pueden aprender una o más lenguas extranjeras, sin que existan diferencias importantes con respecto a su lengua materna.

b. Las personas adultas, evidentemente, pueden aprender también una o más lenguas diferentes; sin embargo, es posible detectar con cierta facilidad que esa lengua no es realmente su lengua materna.

c. Tanto las niñas y los niños como las personas adultas comprenderán con mayor facilidad una lengua extranjera, si el aprendizaje está contextualizado; es decir, si las interacciones con la lengua objeto de aprendizaje tienen lugar en contextos reales, auténticos y variados donde se habla dicha lengua.

d. Los seres humanos tienden a olvidar con mayor rapidez tanto las palabras como la estructura gramatical de la lengua aprendida que de la lengua materna.

e. Las personas tienen la facultad de poner en funcionamiento, cuando se enfrentan a situaciones específicas como contextos donde se habla la lengua extrajera aprendida por ellas en el pasado, nuevamente buena parte de la lengua aparentemente olvidada por no ser necesaria o por no haberla practicado durante cierto tiempo.

f. Los seres humanos pueden recordar y aplicar con mayor eficiencia una segunda lengua cuando se encuentran en situaciones de necesidad absoluta; etc.

En definitiva, podríamos indicar que estos seis aspectos tienen que ver directamente con el funcionamiento del cerebro humano, con la neurología del lenguaje (Romaine, 1996; Pinto, 1998; Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Fernández, 1999; Spitzer, 2002 y 2005; Pizarro, 2003; y muchas y muchos otros).

Una de las explicaciones podría ser la siguiente: debido a que los seres humanos estructuran su red neuronal hasta la pubertad, especialmente en la infancia, entonces tienen la facultad natural de establecer un conjunto de marcas bioquímicas neuronales duraderas durante la conformación de esa red neuronal, para lo cual la memoria no es muy importante, como podría ocurrir con la persona adulta. Por supuesto que uno de los factores de mayor influencia para la comprensión, en el sentido de Perkins (1995 y 2003), de una lengua consiste precisamente en la relación existente entre el sujeto y la multiplicidad del contexto donde se habla la respectiva lengua. Los contextos múltiples y reales, evidentemente, proporcionan de manera óptima una variedad de posibilidades para relacionarse naturalmente con la lengua. Salir a las calles, ver avisos, revisar los periódicos, ver películas, conversar con personas cuya lengua materna sea la lengua objeto de aprendizaje, hacer compras y, en definitiva, participar activamente en el mundo y la vida, contribuye considerablemente, no sólo con el dominio superior de la lengua en cuestión, sino fundamentalmente con el fortalecimiento de las estructuras mentales globales y específicas vinculadas con los lenguajes, lo cual difícilmente ocurre de manera involuntaria. Además, el uso cotidiano de los signos, sobre todo en matemáticas, influye considerablemente en el dominio de la terminología y los conceptos. Echeverría (1998, 68), por ejemplo, afirma que uno de los problemas básicos para comprender las matemáticas es la lengua.

> *La manera de expresar el problema puede mostrar ciertas ambigüedades lingüísticas o semánticas que pueden motivar diferentes formas de comprender un mismo problema. Como señala GARDNER (1991), una de las dificultades más importantes que se produce en el aprendizaje de las Matemáticas tiene que ver precisamente con la referente utilización del léxico en la vida cotidiana y en el lenguaje matemático. Mientras que en una conversación normal se tiene bastante libertad en lo referente al uso del lenguaje y las interpretaciones del mismo vienen dadas por el contexto, en el caso de las Matemáticas el lenguaje tiene un significado muy preciso. La presencia de ambigüedades o imprecisiones como las utilizadas de manera cotidiana puede ocasionar numerosas dificultades. Así, por ejemplo, la palabra es puede adoptar cuatro expresiones simbólicas diferentes en Matemáticas: igualdad, pertenencia a una clase, existencia y participación (GARDNER, 1991). No darse cuenta de las diferencias entre una u otra puede llevar a una traducción errónea del problema o, cuando menos, distinta a la propuesta por el profesor o por el libro de de Matemáticas.*

A esta situación se suma, evidentemente, la tradición equivocada y la concepción social errónea dominante, apartada del mundo, de la cotidianidad y de las realidades concretas, aunque ellas existan y formen parte permanente, en la mayoría de los casos de forma implícita, de las relaciones e interacciones entre todas las personas. Los objetos matemáticos, los signos y la simbología en general, no forman parte del lenguaje común, coloquial, necesario y cotidiano usado por las personas en su relación con otras personas y con sus contextos. Aquí, encontramos entonces la necesidad de establecer un primer contacto contextual, por una parte, y cognitivo, por la otra, entre el mundo de las matemáticas y el mundo del lenguaje. Éste, aparentemente es necesario, imprescindible, mientras que las matemáticas escasamente son utilizadas diariamente en la convivencia de los sujetos con el mundo. Nuestra inquietud, por lo tanto, tiene que ver con la búsqueda de caminos apropiados dentro de nuestras sociedades para incorporar aún más el mundo de las matemáticas al mundo del lenguaje natural, por un lado, y en el mundo de las acciones cotidianas de los seres humanos. Por el otro, nuestro interés, al igual que el de muchos colectivos de docentes preocupados por la importancia que tienen las matemáticas para el desarrollo de diversas capacidades en cada persona, se orienta hacia la discusión de conceptos didácticos apropiados que expliquen, además de su papel formativo e intelectual, y muestren la posibilidad real de establecer procesos comunicativos tanto en el mundo de la escuela formal como en las realidades permanentes de todas las personas de cada grupo cultural (Bruner, 1987, 154; French, 1992, 43; Edwards, 1992, 75; Wenger, 2001, 77; Perkins, 1995, 114; Colectivo de Autores, 1995).

El aprendizaje de una lengua está determinado, entre otras cosas, por la necesidad comunicacional natural humana en un contexto específico y por su interés informativo/cognitivo. El dominio de una lengua cualquiera no está directamente asociado a una supuesta inteligencia. Si fuera así, entonces quienes aprenderían la lengua de una cultura, serían solamente aquellas y aquellos que supuestamente estarían dotadas y dotados para esa finalidad; en este caso, quienes poseerían un alto cuociente intelectual, en términos conservadores, lo cual traería como consecuencia que en ese conglomerado social no todas ni todos podrían hacer uso de su propia lengua. Como sabemos, esta hipótesis nunca es ni podrá ser verdadera (Cole y Scribner, 1977; Cole y Means, 1986; Mayer, 1986; Luria, 1987; Bruner, 1988; Lave, 1991a, 1991b y 1997; Hirschfeld y Gelman, 2002; Caivano, 2005).

Lo que sí podemos afirmar, mediante la realización de estudios cuantitativos y cualitativos, es que para poder comprender profundamente una segunda lengua, se hace necesario evidentemente la incorporación/elaboración en las estructuras mentales de un conjunto muy grande de palabras y una infinidad de posibles combinaciones reflejadas en frases, oraciones, etc., cuyos significados correspondan al mundo real, abstracto e imaginario.

Nuestra percepción sobre la relación entre matemática y lenguaje, como segunda gran componente, es que existe una diferencia entre la lengua y las matemáticas; en el primer caso podemos establecer asociaciones/traducciones con la lengua materna, existen ya en las estructuras mentales, mientras que las matemáticas encuentran muy pocas referencias, aunque lejanas, en la mente. La falta de una alta complementariedad cognitiva entre la experiencia, las marcas mentales y los signos matemáticos nuevos, impide claramente que se pueda establecer, según nuestro punto de vista, una semejanza entre el aprendizaje de una segunda lengua y el aprendizaje de las matemáticas como si éstas fueran también una lengua. El cuestionamiento podría ser el siguiente: sí lográramos, de alguna manera, incorporar las matemáticas en la cotidianidad de la vida de las personas, entonces, probablemente podríamos establecer en las respectivas estructuras mentales los primeros elementos matemáticos lingüísticos, con los cuales se podría alcanzar un proceso de analogías entre éstas y nuevas categorías matemáticas.

De acuerdo con las teorías recientes sobre las neurociencias y el aprendizaje, esta conjetura es demostrable. El aprendizaje basado en la ejemplificación y las analogías podría ser la clave para constituir esta red neuronal lingüística compleja (Romaine, 1996; Pinto, 1998; Preiß, 1998; Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Fernández, 1999; Squire y Kandel, 2003; Spitzer, 2002 y 2005; Pizarro, 2003). Es muy probable que no haga falta partir de cero, sino que el mismo mundo ya le proporciona a las niñas y los niños algunas experiencias básicas, sin hablar de la influencia y las marcas genéticas. Cuando observamos, por ejemplo, las actividades cotidianas y los compartimientos de las niñas y los niños, percibimos en ellos la existencia de acuerdos comunicativos sobre categorías matemáticas tales como: números, contar, aproximar, medir, clasificar, ordenar, reconocer, mover, representar modelos lineales y espaciales etc., sin que haya existido necesariamente una instrucción previa sobre estas facultades (Gerdes, 1997; Bishop, 1999; Mora, 2005a).

Cuando vemos que las niñas y los niños se ponen de acuerdo, por ejemplo en los juegos, sobre reglas altamente exigentes, muchas de ellas basadas en procedimientos y algoritmos matemáticos, entonces podríamos confi rmar la existencia de analogías cognitivas naturales, heredadas, o simplemente producto de su misma relación con las realidades, lo cual se fortalece con la ayuda de la lengua materna, cuya función es precisamente permitir la interacción y comunicación con el mundo y los demás sujetos. En vista de que las matemáticas, desde la perspectiva realista (Mora y otros, 2005a) forma parte explícita e implícita de los contextos reales, abstractos e imaginarios, entonces podríamos concluir, primeramente, que la fuerza de la lengua materna, y su desarrollo, nos permitiría el dominio natural de ideas o categorías matemáticas universales, tal como lo señalan Alan Bishop y Ole Skovsmose (2006). De acuerdo con esta postura, nos parece sumamente importante mostrar la opinión de Bruer (1995, 96 y 97) sobre las posibles representaciones matemáticas que podrían existir en las niñas y los niños desde muy temprana edad, lo cual es explicado actualmente con mayor precisión por las neurociencias (Spitzer, 2005, 125).

> *La investigación cognitiva también ha aportado luz sobre cómo los niños representan el conocimiento numérico básico. Los investigadores llaman a la representación que usan los niños* ***línea mental numérica****. Como muestra la figura 4.2, existen tres líneas interconectadas. La línea de arriba es la serie de nombres de números conectados por el nexo «siguiente». La línea de en medio simboliza los objetos que se cuentan. Cada vez que se toca o se señala un objeto del grupo, se dice un nombre de número. La línea de abajo representa las cantidades del número. Éstas están unidas por los nexos +1 o -1, simbolizando que uno se mueve arriba o abajo en la línea para obtener un incremento de 1. La estructura de la línea numérica se apoya en el lado izquierdo en «poco» y en el lado derecho en «mucho», indicando que la línea numérica está elaborada en la habilidad de los 4 años de edad para hacer comparaciones* ***cuantitativas*** *de «más o menos». La línea numérica permite al niño hacer comparaciones cuantitativas y combinar el cálculo y la comparación en el aprendizaje aritmético.*

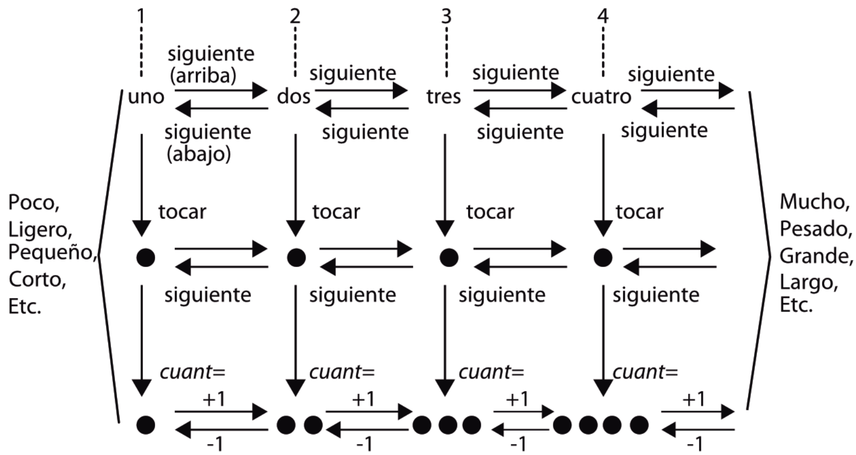



*Figura 4.2. La línea mental numérica es la estructura conceptual central de las primeras habilidades numéricas. La línea numérica elabora la primera comprensión cuantitativa del niño de «poco» versus «mucho» permitiéndole asignar nombres de números a los grupos de objetos que cuenta. La línea de arriba muestra cómo los nombres de los números están correctamente ordenados. La línea de en medio simboliza cómo la niña o el niño asigna un nombre de número a un objeto de un grupo señalándolo o tocándolo mientras dice el nombre del número. La línea de abajo muestra el número nombrado por el numeral y cómo moverse arriba y abajo de la línea numérica sumando o restando 1. (Utilizado con el permiso de Robbie Case.)*

Esta representación da a las niñas y los niños el conocimiento conceptual que necesitan para comprender y aplicar correctamente las habilidades numéricas básicas. El cálculo es un procedimiento que adopta una lista de símbolos para los objetos y una lista de nombres de números. Si se asigna sólo un nombre de número por objeto, el último nombre asignado será el número total de objetos en el conjunto que se está contando. Este procedimiento es el que se da en la línea mental numérica. Se puede obtener una idea de cómo funciona, si se señalan los símbolos de los objetos de la figura 4.2 con la mano izquierda, y los nombres de los números con la derecha. [6]

[6] Para una mayor explicación sobre la *línea mental numérica* se recomienda leer el capítulo cuarto del libro: Escuelas para pensar. Una ciencia del aprendizaje en el aula de John Bruer, cuyo título es *Matemáticas: darles significado*.

Por supuesto que una semejanza fundamental entre el dominio de la lengua materna y las categorías matemáticas básicas/universales consiste en la permanente alfabetización, en el caso de la lengua aprendiendo a leer y escribir, y en el caso de las matemáticas fomentando aspectos tales como:

1. *Experiencias espaciales*, entre las cuales podríamos mencionar las siguientes: orientación en el espacio, formas de áreas regulares e irregulares, formas de cuerpos tridimensionales, elementos naturales simétricos.

2. *Campos prenuméricos naturales*, los cuales podrían ser: características de objetos diversos, manipulación, abstracción e imaginación; comparaciones concretas de situaciones y objetos propios de la realidad, especialmente de la naturaleza; formación concreta e imaginación de grupos y secuencias, etc.

3. *Tratamiento de la idea sobre contar*, evitando en lo posible las reglas y los procedimientos ajenos a la naturaleza de las acciones y el pensamiento de las niñas y los niños.

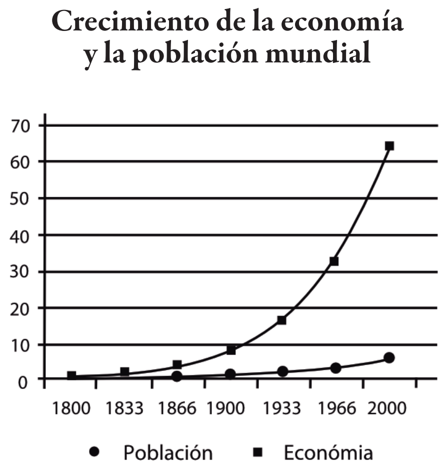
4. *Idea de conjuntos a partir de situaciones reales*, incorporando sobre todo las actividades lúdicas y las acciones vinculadas con la vida dentro y fuera de la escuela.

5. *Tratamiento de la idea de medida tomando en consideración*, compra y venta, longitud, temperatura, peso, área y volumen.

6. *Insistencia permanentemente sobre la idea del juego*, especialmente cuando los juegos requieren ciertas estructuras y reglas en torno a las cuales son necesarios acuerdos.

7. Otras ideas matemáticas universales, cuya relación con la realidad y el lenguaje natural sea directa, clara y necesaria.

## FORMAS DEL LENGUAJE: NO VERBAL, GRÁFICO, ICONOGRÁFICO, VERBAL (COLOQUIAL, DIDÁCTICO Y ESPECIALIZADO), SIMBÓLICO Y MATEMÁTICO

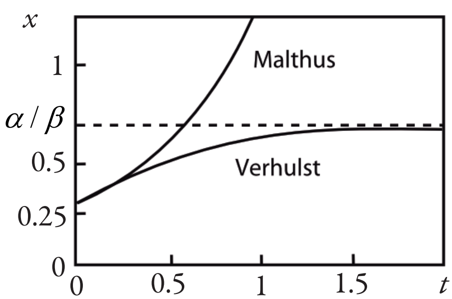



Todos los animales de acuerdo con las leyes conocidas de reproducción tienen la capacidad de crecer gerométricamente.

Ley de Malthus:

$$x(t) = e^{\alpha t} x_0$$

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = \infty$$




Ley de Verhulst:

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta + X\alpha e^{-\alpha t}}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

*Figura 6: el **lenguaje matemático** ayuda a modelar, explicar y representar la realidad*

Como podemos observar, no hemos colocado en la lista anterior ningún tipo de operación (suma, resta, multiplicación o división) puesto que estos procedimientos pueden tener, si no son tratados de manera apropiada, consecuencias negativas tanto para una comprensión matemática adecuada como para la alfabetización matemática requerida desde el punto de vista cognitivo. Lo fundamental de esta idea *alfabetizadora* está en estrechar el vínculo entre las ideas matemáticas naturales y las formas del lenguaje usadas por los seres humanos para entender, interpretar y transformar la realidad (Gallin, Ruf y Sitta 1985, 17; Maier y Schweiger, 1999). Es decir, incorporar las ideas matemáticas universales en el lenguaje materno, especialmente en la verbalización, la lectura, escritura, mímica y en la iconografía, así como ir incorporando también estas formas de lenguaje en el mundo de las matemáticas.

En la actualidad se tiene conocimiento sobre la capacidad natural de los seres humanos para ver el mundo también con *lentes matemáticos*. Esta es una de las tareas básicas de la psicología cognitiva, junto con la psicología sociocultural (Cole y Scribner, 1977; Cole y Means, 1986; Mayer, 1986; Luria, 1987; Bruner, 1988; Lave, 1991a, 1991b y 1997; Cole, 1999; Hirschfeld y Gelman, 2002; Caivano, 2005; Engeström, 1987, 1999 y 2005; etc.)

Uno de los dominios específicos de la facultad cognitiva humana consiste en interpretar el mundo desde una perspectiva física, numérica y geométrica, lo cual debe ser verbalizado por las niñas y los niños de muy temprana edad. El punto de inflexión entre esta capacidad natural de la gente y el bloque matemático posterior, está precisamente en los procedimientos, en la mayoría de los casos basados en algoritmos rígidos y artificiales, impuestos por la formalidad de la escuela bancaria (Freire, 1971). La práctica escolar apartada del mundo y de la realidad de los sujetos rompe bruscamente con la relación natural entre las ideas matemáticas y el lenguaje. Es decir, los conceptos matemáticos naturales dejan de formar parte para las personas de su lenguaje y en consecuencia de su pensamiento. Se crea, por lo tanto, una dicotomía, producto de la formalidad y artificialidad escolar, con las categorías matemáticas naturales que deberían estar presentes en los procesos comunicativos de toda cultura. En la medida que exista un bajo cultivo de las matemáticas en la interioridad del lenguaje, en esa medida, y de manera regresiva, existirá también un escaso acercamiento a muchos conceptos matemáticos de mayor relevancia (Skemp, 1980, 23; Jaulin-Mannoni, 1980, 136; Pimm, 1990; Orton, 1990, 159; Köhler, 1992; Bruer, 1995, 95; Zech, 1995, 37; Maza, 1995, 94; Krummheuer, 1994, 21; Lorenz, 1997, 22; Lauter, 1997, 253; Lemke, 1997, 195; Olson, 1998, 221; Nesher, 2000, 109; Cauty, 2001, 49; Spitzer, 2005, 125).

La relación, desde el punto de vista de la comprensión, existente entre las matemáticas y el lenguaje, permitirá a los investigadores hacer también comparaciones entre los procesos lingüísticos, que ayuden a la elaboración mental de la amplia y compleja terminología gramatical, y los procesos manifiestos en las estructuras mentales en el caso del aprendizaje de las matemáticas. La mayor parte de los lingüistas (Chomsky, 1970, 1974, 1989 y 1992; Fernández, 1999) coinciden en indicar que el lenguaje humano activa una compleja y difícil estructura gramatical, mucho más complicada de lo que imaginamos. No nos damos cuenta concientemente de esta increíble dificultad, puesto que dominamos la lengua materna de manera natural, cualquiera que ella sea (Damasio, 2004; Devlin, 2004; Spitzer, 2005). Para ello es necesario y suficiente nacer en una determinada cultura. Sencillamente no habrá ningún inconveniente para hablar y escribir fluidamente, independientemente que la lengua sea japonés, aymará, quechua, pemón, finlandés, húngaro, ruso, etc.

El ser humano tiene esa facultad, no necesariamente innata. Existe una infinidad de ejemplos de niñas y niños cuyos ascendentes hablan lenguas muy diferentes a la lengua donde han nacido y se han criado; sin embargo, esta última se convierte realmente en su lengua materna y no la lengua de sus padres o familiares, quienes no hablan la lengua del contexto donde viven. En Alemania, por ejemplo, donde vive una cantidad muy grande de personas procedentes de Turquía, las y los hijos de estas y estos inmigrantes dominan perfectamente, mejor que el turco, el idioma alemán, a pesar de que sus padres y madres hablan extremadamente poco el alemán. Este y otros ejemplos muestran claramente que, aunque exista evidentemente una influencia genética, el mundo sociocultural es el que realmente determina el aprendizaje de una lengua.

Cuando las niñas y los niños aprenden y avanzan en el aprendizaje de su lengua materna u otra lengua, ponen de manifiesto un conjunto de relaciones neuronales, basadas en reacciones bioquímicas y eléctricas mucho más amplias que el esfuerzo mental realizado por una persona cuando intenta comprender conceptos matemáticos escolares complejos (Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Squire y Kandel, 2003; Kandel, Spitzer, 2002 y 205). Sin embargo, antes de la pubertad las niñas y los niños pueden dominar activa y pasivamente la/s lengua/s con menos esfuerzo que las matemáticas. Tales lenguas, especialmente la lengua materna, pueden ser usadas con mayor facilidad que las matemáticas. Aquí encontramos, nuevamente, una explicación importante en la teoría sociocultural, la teoría de la actividad, la cognición situada y la teoría sobre la cognición crítica (Mora, 2005a y Mora, 2006d). Por supuesto que influye un conjunto importante de factores, la mayor parte vinculados con la concepción que se tiene de las matemáticas y su educación, así como con aquéllos inherentes al desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza, lo cual hemos trabajado en otras oportunidades (Mora, 1998, 2002, 2004a; 2004b, 2005a, 2005b, 2006a y 2006b).

Entre estos factores podemos mencionar los siguientes: 1) las matemáticas no cumplen la función comunicativa básica como las lenguas; 2) los seres humanos pueden vivir sin un uso frecuente e inmediato de las matemáticas, mientras que las formas del lenguaje son necesarias; 3) la lengua forma parte de la cotidianidad y de los contextos inmediatos de los seres humanos mientras que las matemáticas, en la mayoría de los casos, están o son presentadas alejadas del mundo y la realidad de la gente; 4) las lenguas son practicadas permanentemente, con un alto nivel de naturalidad, mientras que las matemáticas son practicadas esporádicamente y, desde la perspectiva convencional de su aprendizaje y enseñanza, presentadas artifi ciosamente, sobre todo cuando se trata de su relación con la realidad; 5) las matemáticas son aprendidas y enseñadas en ambientes cerrados y limitados, donde no intervienen los contextos múltiples, mientras que el lenguaje forma parte de cualquier contexto sociocultural; 6) el lenguaje es aprendido de manera obvia, natural y dinámica-activa, mientras que las matemáticas, tal como se trabajan actualmente, requieren un escenario preparado, altamente pasivo y con escasa interacción socio matemática; etc. En definitiva, podemos indicar que la diferencia fundamental, en cuanto a la comprensión de las matemáticas y el lenguaje, la podemos encontrar en aspectos socioculturales, en las necesidades comunicativas y en el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Los colectivos de investigación que estudian el problema del aprendizaje de las lenguas, han logrado establecer la existencia de una relación entre la cognición y la sintaxis que caracteriza a cada lengua. Esta relación, según nuestro análisis, realizado en los párrafos anteriores, no es necesariamente genética, heredada, sino que, por el contrario, obedece a una alta influencia sociocultural. En este sentido, consideramos importante revisar a continuación de manera breve, la discusión sobre la gramática matemática universal y su posible similitud con una gramática matemática también universal, tal como lo hemos mencionado con anterioridad. Para complementar estas ideas básicas sobre los dominios específicos de la mete sobre el lenguaje y las matemáticas, incorporaremos una cita de Carey y Spelke (2002, 244):

> *La noción de cognición dominio-específico que postularemos en este trabajo ha sido expuesta claramente por Chomsky (1980a). Los seres humanos están dotados de sistemas específicos de conocimiento tales como el conocimiento del lenguaje, el de los objetos físicos y el conocimiento numérico. Cada sistema abarca un conjunto distinto de entidades y fenómenos. Por ejemplo, el conocimiento del lenguaje se refiere a las oraciones y sus constituyentes, el de los objetos físicos, a los cuerpos materiales macroscópicos y su comportamiento. El conocimiento numérico se refiere a conjuntos y operaciones matemáticas tales como la suma. Más profundamente, cada sistema de conocimiento está organizado en torno de un cuerpo de principios básicos diferente. En lo que respecta al lenguaje, estos son los principios de la gramática universal; para los objetos físicos, se trata de principios que podrían incluir los principios newtonianos de continuidad y solidez, y para el numérico podríamos pensar en los principios de la correspondencia uno a uno y de la sucesión.*
>
> *Esta noción de especificidad de dominio provee las bases para determinar los dominios del conocimiento humano y distinguirlos unos de otros: dos sistemas de conocimiento son independientes sólo cuando están basados en principios distintos. Por ejemplo, si se determinara que el conocimiento del lenguaje y el conocimiento numérico se basan en los mismos principios básicos, los psicólogos deberían llegar a la conclusión de que ambos conocimientos corresponden a un mismo sistema, pese a que existieran muchas diferencias evidentes entre los conocimientos que cada uno de ellos abarca. En efecto,*

*Chomsky (1980b) llegó a sugerir que el lenguaje y lo numérico se relacionan de esta manera. Esta noción de similaridad sienta las bases para la distinción de los dominios cognitivos genuinos y su diferenciación de otros conjuntos más triviales de creencias: sólo los dominios genuinos están caracterizados por conjuntos diferentes de principios básicos. El razonamiento acerca de los cuerpos materiales, las personas y los conjuntos puede depender de los sistemas de conocimientos de la física, la psicología y lo numérico. Por el contrario, los razonamientos acerca de las bolas de billar, de los ladrillos y los platos seguramente dependen de un mismo sistema de conocimiento. Los principios básicos que subyacen en el razonamiento acerca de uno de estos conjuntos de objetos seguramente se aplican también a los otros conjuntos (Carey, 1985).*

## La teoría sobre la gramática universal y sus consecuencias para la comprensión matemática

Uno de los lingüistas contemporáneos más destacados, Noam Chomsky (1981, 1970, 1974, 189 y 19952), considera que evidentemente existe una forma de gramática, la cual podría ser considerada como universal. Esto significa que todos los seres humanos, antes de nacer, ya están marcados genéticamente por una variedad muy grande de elementos lingüísticos, los cuales pueden ser usados naturalmente en cada una de las lenguas y formas de lenguaje. Parece ser, que esta facultad lingüística la poseen exclusivamente los humanos, con lo cual no solamente se les facilita la comprensión apropiada de otras lenguas, sino que permite, en su propia lengua, generar altos niveles de creatividad y pensamiento.

Uno de los argumentos básicos de Noam Chomsky (1992) y sus seguidoras y seguidores, consiste en señalar que las niñas y los niños aprenden una lengua con mucha facilidad y soltura, sin que ellas/os hayan tenido una larga experiencia con el contexto (Putnam, 1995). Esto hace pensar que existen las condiciones, determinadas por la genética, naturales de manera innata; es decir, existiría una gramática innata universal en todas las personas. Por supuesto que esta teoría coincide con lo que hemos indicado anteriormente en cuanto a que lengua materna o dominante en un sujeto sería aquélla donde se ha criado. Con otras palabras, el medio contextual sigue siendo determinante para la comprensión de la lengua.

Existe, en consecuencia, un punto de partida lingüístico que debe ser activado para que la niña y el niño avance en el proceso del aprendizaje de su propia lengua u otra/s lengua/s (Fernández, 1999). Esto significa que todas las personas nacemos preparadas para la adquisición de una lengua, puesto que estaríamos lingüísticamente *programadas* para ello. Otro argumento esgrimido por esta teoría tiene que ver con la pobreza, supuestamente, de la influencia familiar o social en general para que los seres humanos puedan desarrollar estructuras altamente complejas, sutiles, creativas y abstractas que caracterizan a una lengua. Las neurociencias (Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Squire y Kandel, 2003; Kandel, Damasio, 2004; Devlin, 2004; Spitzer, 2005); sin embargo, muestran que la creatividad, la riqueza de los procesos interactivos, las relaciones con los demás sujetos, la imaginación, etc. juegan un papel insustituible en la conformación del sistema neuronal y, como consecuencia, en el fortalecimiento de las estructuras complejas superiores, entre ellas la capacidad de lenguaje, en correspondencia con Luria (1993), Leontiev (1979 y 1986a y Vygotsky (1995, 1998 y 2001).

Recientemente, neurocientíficos de la Universidad de Hamburgo han logrado acercarse, de manera confirmatoria, al planteamiento de Noam Chomsky en cuanto a que existe en el cerebro una estructura, fisiológica y anatómica, que ayuda a los seres humanaos en el desarrollo y fortalecimiento del habla. La parte del cerebro, según estas y estos investigadores encargadas/os del estudio, responsable del habla, desde el punto de vista anatómico, está ubicada en el lóbulo frontal, en la conocida región de Broca (Zöllner, 2004; Weiller y Musso, 2006). El procedimiento seguido consistió en: seleccionar dos grupos de estudiantes de lengua materna alemana. El primer grupo fue sometido a una experimentación lingüística mediante la aplicación de reglas gramaticales *universales* de idiomas como el italiano y el japonés, mientras que el segundo grupo trabajó con experiencias lingüísticas en estos mismos idiomas, cuya estructura gramatical no correspondía a la *gramática universal*, sino a construcciones gramaticalmente *falsas* o inventadas. La tomografía cerebral mostró claramente que el denominado Centro de Broca, es el responsable de la gramática universal, puesto que fue la parte del cerebro activada cuando los participantes en el estudio realizaban las tareas de acuerdo con las reglas gramaticales correctas. El resultado central del estudio consistió en que en el cerebro de las personas existe ya una regla gramatical, una estructura lingüística, innata y fija. Estos estudios, obviamente, no son definitivos, puesto que aún hacen falta más pruebas empíricas para desechar otras posibilidades y, de esta manera, fortalecer científicamente las conclusiones.

En este sentido, queda aún la duda si realmente existe esta gramática universal. En este trabajo nos inclinamos, sin caer en un pensamiento ecléctico, por las dos tendencias prevalecientes: a) el alto peso que juegan los contextos múltiples en el dominio de una o más lenguas y b) la existencia, de acuerdo con Chomsky (1981 y 1992), de una influencia hereditaria muy importante, aunque no determinante, en toda la especie humana. Para concluir estas reflexiones, las cuales, más que respuestas, nos inducen a la elaboración de interrogantes, presentamos tres posibles soluciones, inclinándonos en este trabajo por la tercera, puesto que ella intenta, por una parte combinar las dos primeras y, por otra, nos proporciona una posible solución teórica para impulsar la comprensión matemática:

T1. Podría ser claramente cierto que nuestras habilidades y destrezas lingüísticas estén establecidas, en última instancia, en un módulo cognitivo altamente desarrollado ubicado en una parte del cerebro o en varias partes del mismo, tal como lo muestra las neurociencias (Kandel, Schwartz y Jessell, 1999; Squire y Kandel, 2003; Kandel, Damasio, 2004; Devlin, 2004; Spitzer, 2005), el cual está determinado genéticamente por una información lingüística primaria o innata, adquirida de generación en generación a través de la existencia de la especie humana, sobre todo a partir del momento cuando ésta elabora el lenguaje oral.

T2. Podría ser, por supuesto, que nuestras habilidades y destrezas lingüísticas estén altamente determinadas, desde antes de nacer, por la influencia del contexto social, las interacciones comunicativas; la percepción externa y la auto percepción; la elaboración de representaciones procedimentales sociocognitivas; la graficación; la diferenciación empírica; la percepción múltiple de las expresiones de los demás sujetos y de la misma cotidianidad, la cual tiene lugar mediante el mimetismo y la imitación; la acción y la reacción en la participación compartida durante los procesos comunicativos e interactivos; etc. Es decir, la amplia, múltiple y compleja influencia del medio permite al cerebro la conformación de un (o varios) lugar específico mental, como el Centro de Broca, encargados de la capacidad lingüística de las personas.

T3. Los resultados parciales y conjeturas sobre la estructura lingüística innata y la influencia determinante de los contextos múltiples, tienen consecuencias directas para la profundización de conceptos sobre la comprensión matemática y, concretamente, para el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

La primera interrogante que debemos hacernos, antes de seguir con nuestras reflexiones, consiste en preguntarnos si realmente el ser humano también tiene una estructura mental matemática como en el caso del lenguaje. El problema está en saber si las niñas y los niños de cualquier cultura usan prototipos específicos y ejemplos en la construcción del pensamiento matemático (Munro, 1990; Zöllner, 2004). Por otra parte, no se conoce con claridad, a pesar de la gran cantidad de investigaciones en el campo de las neurociencias, si el ser humano también dispone de un cierto *módulo estructural matemático* como el que probablemente posee en el caso del lenguaje (Spitzer, 2005, 125).

Lo que sí podemos afirmar, de acuerdo con las reflexiones que venimos realizando en el presente trabajo, es que existe la posibilidad de derivar, a partir del conocimiento disponible sobre el aprendizaje de las lenguas, algunos elementos básicos para la comprensión matemática de manera natural, tal como podría ocurrir con la comprensión de la lengua materna, aunque no queremos afirmar rotundamente que pueda existir una estructura matemática innata, tal como lo afirman o intentan demostrar los lingüistas, sobre todo los seguidores de la gramática universal propuesta por Noam Chomsky (1974, 1981 y 1992).

En este sentido, hemos considerado importante, en correspondencia con los trabajos de Robinson (1990), Bickmore-Brand (1990), Maier y Schweiger (1999, 70), tomando en cuenta, además, el análisis realizado en este trabajo, resumir a continuación un conjunto de ideas básicas para el logro de una alta comprensión matemática de manera natural, lo cual está directamente vinculado con la tercera tesis sobre el dominio de una lengua, materna o extranjera, para lo cual juegan un papel fundamental tanto la denominada gramática universal como los contextos múltiples socioculturales. A continuación, entonces, presentamos resumidamente estos elementos básicos:

1. **Inmersión**: las niñas, niños, jóvenes y la población en general deben percibir claramente que la cotidianidad no solamente es comprendida y transformada mediante las lenguas, sino que, además, cada proceso de cambio requiere de las matemáticas.

2. **Demostración**: se debe mostrar permanentemente a toda la gente, particularmente a la población estudiantil de todo el sistema educativo, que las matemáticas, así como las lenguas, son empleadas y aplicadas razonablemente en muchos aspectos, más de lo que imaginamos, en cada cultura y en cualquier momento histórico.

3. **Expectación**: es necesario insistir, con mayor frecuencia y con un alto poder de convencimiento, que toda le gente puede lograr éxito en matemáticas, así como ocurre con el dominio de su lengua materna y otras lenguas.

4. **Concientización**: es preciso romper definitivamente con la creencia, la historia y la tradición, transmitida de generación en generación, en cuanto a que las matemáticas son difíciles o que las personas han fracasado en la comprensión de las matemáticas cuando eran estudiantes de cualquier ámbito del sistema educativo.

5. **Responsabilidad**: todo ser humano, especialmente las niñas y los niños, deben conseguir sus propios caminos para alcanzar la comprensión matemática deseada y necesaria, tal como ocurre con el aprendizaje de su propia lengua, lo cual será posible mediante un mayor compromiso con el auto-aprendizaje.

6. **Actitud**: se requiere generar actitudes positivas hacia las matemáticas, las cuales evidentemente están vinculadas con las experiencias también positivas vividas cotidianamente con ellas. Si la gente sufre ansiedad y angustia en su relación con las matemáticas, evidentemente generará fobia y rechazo hacia ellas.

7. **Aproximación y humanización**: Las niñas, los niños, jóvenes y toda la gente en cualquier comunidad de aprendizaje formal e informal, así como la población en general, debe tener la impresión y el sentimiento, también en su relación con las matemáticas, de que sus ideas, preguntas, respuestas, inquietudes, errores, logros, etc. son aceptados y tomados en cuenta por sus pares aventajados, especialmente las y los docentes, padres y madres. En el caso de las lenguas, esta interacción comunicativa tiene lugar de manera natural, sin que exista tanto rechazo, burla, descuido, aversión y recriminación como en el caso de las matemáticas.

8. **Aplicabilidad**: es necesario brindar las posibilidades, condiciones y estrategias para que la población estudiantil, y el público en general, puedan hacer uso permanente de sus habilidades y destrezas matemáticas; lo cual, evidentemente, formará parte del proceso de aprendizaje y enseñanza.

9. **Retroalimentación**: tanto el trabajo matemático permanente de las y los estudiantes como sus preguntas, respuestas y solución a las tareas inmediatas e inquietudes (dificultades) deben ser tomadas en cuenta seriamente por parte de las y los docentes, quienes al mismo tiempo y de manera permanente reaccionarán ante ellas, suministrando las ayudas e indicaciones apropiadas.

10. **Interacción y comunicación**: tal como ocurre con el aprendizaje de las lenguas, los procesos comunicativos en la interacción sociomatemática, juegan un papel fundamental en la comprensión matemática. El trabajo matemático, dentro y fuera de las aulas, se basa en la

participación activa entre quienes aprenden y enseñan, lo cual está determinado en gran medida por las interacciones entre las posibles combinaciones de todo el colectivo en el proceso educativo. Evidentemente estas interacciones no se dan en abstracto, sino mediante la comunicación, para lo cual es necesario el uso de las lenguas y, por supuesto, de las matemáticas en su sentido amplio.

11. **Comunidad**: es ampliamente conocido que el aprendizaje aislado e individualizado no proporciona, en toda la gente, los resultados esperados. Las comunidades de aprendizaje y enseñanza constituyen la forma apropiada, social y políticamente hablando, para el aumento de los niveles de comprensión matemática, así como ocurre con las lenguas. En una comunidad de estudio crítico y reflexivo las y los participantes aprenden y enseñan simultáneamente.

12. **Metacognición**: antes, durante y después de los procesos de trabajo matemático, activo y comunicativo, es indispensable reflexionar sobre las actividades matemáticas y no matemáticas vinculadas con los temas generadores del aprendizaje y la enseñanza, especialmente cuando se trabaja de manera interdisciplinaria. En la tematización de los aspectos inherentes al trabajo matemático interviene tanto el lenguaje natural como las diversas terminologías matemáticas o de otras disciplinas, vinculadas directa o indirectamente con el Tema Generador de Aprendizaje y Enseñanza respectivo.

13. **Ejemplificación**: una de las maneras apropiadas para comprender una lengua, sea materna o extranjera, consiste en dar el ejemplo, mostrar cómo funcionan las cosas, sin decir todo directamente. La explicación y la aclaración ejemplificadas ayudan ampliamente a las y los estudiantes en la elaboración de sus propios conceptos.

14. **Estrategias de aprendizaje y enseñanza complejas**: hemos insistido en muchas oportunidades en que es necesario incorporar los procesos de modelación matemática, el método por proyectos, la estaciones de trabajo, el aprendizaje abierto, el aprendizaje investigando, etc. siempre en el marco de *Tema Generadores de Aprendizaje y Enseñanza* (GAE) social, natural y cognitivamente significativos.

15. **Participación, cooperación y colaboración**: existe un acuerdo en el campo de la psicología del aprendizaje, la neurodidáctica, la didáctica especial e interdisciplinaria, la pedagogía para la comprensión, etc. de que los procesos cooperativos y colaborativos ayudan considerablemente en el aumento de la comprensión y, por supuesto, en la comprensión matemática.

16. **Contextos múltiples**: el gusto y la actitud positiva hacia las matemáticas aumentará ampliamente si las temáticas de estudio o los TGAE forman parte de la diversidad de contextos existentes en una comunidad ampliada de estudio, reflexión y tematización. Las matemáticas, así como ocurre con las lenguas, deben trabajarse estrechamente unidas al contexto inmediato de las y los participantes, sin olvidar también los contextos imaginarios y alejados de los lugares donde se producen las respectivas interacciones.

17. **Interés y motivación**: si no existe la necesidad tangible, real e imaginaria de las personas hacia aspectos, a veces, muy abstractos de las matemáticas, entonces no habrá interés ni motivación por el estudio. Quienes desean o están inclinados por aprender, tienen normalmente algunas razones que los arrastran fuertemente hacia el estudio. El interés y la motivación, así como sucede con las lenguas, no puede darse en abstracto o por simples mensajes valorativos de la sociedad, la familia y las y los docentes. El trabajo con las matemáticas tiene que darse en el marco de situaciones interesantes y motivadoras para todas y todos.

18. **Creatividad**: tanto las lenguas como las matemáticas exigen, en la mayoría de los casos, la independencia cognitiva, la cual trasciende el mundo de la simple repetición de conceptos y procedimientos. La comprensión matemática requiere de altos niveles creativos, puesto que tal como sucede con el habla, las situaciones problemáticas matemáticas pocas veces son tratadas o resueltas mediante el uso mecánico de definiciones o propiedades genéricas deductivas, sino más bien mediante altos niveles de reflexión cognitiva, para lo cual es indispensable la independencia creativa. Esta creatividad será alcanzada exitosamente si generamos espacios permanentes de discusión sobre las actividades matemáticas cotidianas.

## CONCLUSIONES

Podríamos decir, después de estas reflexiones sobre la relación entre matemáticas, lenguaje, pensamiento y realidad, que las matemáticas tienen una dimensión y un carácter internacional. No solamente porque, al estilo convencional, una persona puede comprender y resolver problemas matemáticos independientemente de las fronteras que imponen los mismos idiomas, sino porque las matemáticas son parte esencial del ser humano, en cualquier lugar y momento en que se encuentre. En el caso de las denominadas matemáticas puras, sobre todo en el pasado, las soluciones que consiguen los matemáticos en diferentes partes del mundo a problemas abiertos, también comunes, son idénticas a pesar de las distancias y el escaso intercambio de informaciones. Un matemático, seguramente, comprenderá tanto el planteamiento de un determinado problema como sus posibles soluciones en lenguas, cuya simbología sea similar, aunque no domine dichas lenguas. Podríamos decir, desde esta perspectiva, que el idioma simbólico creado por el ser humano a lo largo de la historia para resolver situaciones sencillas y complejas vinculadas con sus realidades e imaginaciones es similar en casi todas las culturas de nuestro planeta. A pesar de esta caracterización de las matemáticas, en los párrafos anteriores no nos hemos ocupado tanto por este aspecto, puesto que nuestro interés trasciende el mundo de las matemáticas profesionales y se introduce en el mundo de la didáctica, especialmente en el campo de su aprendizaje y enseñanza.

Consideramos que el tema sobre *matemáticas, lenguaje, pensamiento y realidad*, tal como lo hemos visto en este trabajo, tiene múltiples orientaciones y connotaciones. Aunque, desde la perspectiva de la opinión pública y la intuición popular, estos cuatro campos del conocimiento aparentemente no tienen mucho en común, las reflexiones científicas y, en particular, la reflexión didáctica sí encuentran importantísimas relaciones. En el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, el lenguaje sí tiene un lugar privilegiado, no sólo por la concepción en cuanto a que las matemáticas podría considerarse como un lenguaje, de acuerdo con varios autores, sino porque en la combinación recíproca entre matemáticas y lenguaje intervienen, entre otras cosas, procesos comunicativos y aspectos cognitivos básicos, convirtiéndose actualmente en un campo de investigación muy importante, el cual forma parte en nuestros países, concretamente en Venezuela, en la reflexión, innovación e investigación didáctica.

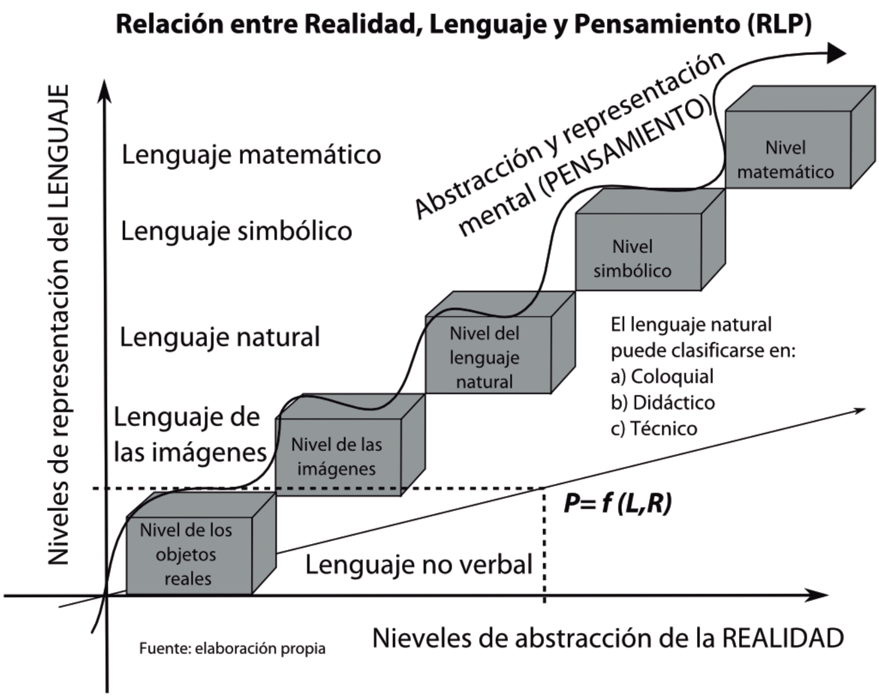



*Figura 7: cinco niveles básicos de abstracción del pensamiento con la ayuda del lenguaje*

Podríamos asumir, primeramente, que las matemáticas tienen una caracterización muy particular, la cual no puede ser cataloga como una lengua al estilo de la convencionalidad de las lenguas en las diversas culturas. En todo caso, sí podríamos indicar que ellas hacen uso de un lenguaje muy especial, formal y con un sistema de reglas gramaticales muy particular, el cual se diferencia amplia y claramente de todas las lenguas. El trato adecuado tanto con el vocabulario especializado, en la lengua materna y en las matemáticas, como con la estructura gramatical compleja que caracteriza a las matemáticas formales en los diversos ámbitos del sistema educativo, tendrá consecuencias inmediatas en la comprensión matemática. Aquí se observa, no solamente un problema fundamentalmente lingüístico, sino esencialmente didáctico, el cual tiene que ver directamente con la concepción filosófica que se tenga de las matemáticas y de su aprendizaje-enseñanza. Por supuesto que podríamos indicar que la diferencia básica entre el lenguaje coloquial y el formal está en el nivel de la gramática, es decir, la sintaxis, lo cual nos trasladaría el problema al ámbito de la formalidad lingüística, descuidando el aspecto de la comunicación, el pensamiento y, sobre todo, la reflexión sobre el tratamiento de una educación matemática realista y crítica.

Por otra parte, tal como lo hemos indicado insistentemente en los párrafos anteriores, el problema de la didáctica de las matemáticas, en relación con el lenguaje, no consiste realmente en buscar una semejanza lingüística entre la sintaxis de la lengua materna o extranjera y la sintaxis de las reglas *gramaticales* con las cuales se trabaja en las matemáticas formales. Además, esta semejanza no es posible, puesto que la estructura formal de las matemáticas sigue reglas muy diferentes a las de una lengua y obviamente está caracterizada por elementos totalmente ajenos a aquéllos que componen una lengua convencional. Nuestro interés está inclinado, más bien, por la relación, en cuanto al desarrollo de capacidades múltiples en los sujetos, especialmente sobre las estructuras del pensamiento complejo, mediante el vínculo didáctico entre matemáticas, lenguaje y realidad.

El conocimiento matemático se logra, tomando en cuenta el papel que juega el lenguaje, mediante la comprensión profunda del mismo, para lo cual no es muy importante el juego sintáctico formal de los elementos que componen al mundo de las matemáticas profesionales. Lo importante no es que las y los estudiantes reproduzcan reglas matemáticas formales como si estuviese memorizando un poema, sino que entren realmente en el mundo del pensamiento matemático, independientemente de la estructura gramatical matemática establecida por la comunidad de matemáticos a lo largo de la historia. Consideramos que estamos, didácticamente hablando, invirtiendo el problema. En primer lugar, insisten en la memorización de reglas matemáticas bien elaboradas, como si realmente se tratara de una lengua, y en segundo lugar tratan de que comprendan los conceptos matemáticos que están detrás de esas estructuras. La comprensión del conocimiento matemático tiene, por lo menos, tres grandes dimensiones:

1. Es necesario establecer una cierta analogía entre las representaciones verbales y simbólicas que caracterizan a las matemáticas con objetos manipulables y visibles, así como con elementos gráficos concretos, abstractos e imaginarios, con lo cual se podría encontrar una conexión entre el mundo de las representaciones mentales y el mundo de las percepciones sensoriales.

2. Cada elemento de conocimiento aislado, o en conexión con otros elementos, debe activar diversos componentes cognitivos, lo cual le permitirá al sujeto comprender profundamente las ideas matemáticas subyacentes, hacer uso de ellas y desarrollar de manera independiente su propio pensamiento matemático. Entre esos componentes, podríamos mencionar los siguientes: conceptualización, procedimientos, funcionalidad, *relacionalidad*, estructuración, argumentación, elaboración, reflexión, etc.

3. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas no puede ni debe ser tratado, fuera y dentro de las aulas de clases, como un producto terminado o un árbol viejo, cuyas ramas y tallos ya no crecen más. No podemos ver a las matemáticas como un sistema normativo y preconcebido, constituido y limitado por un conjunto de términos, propiedades y procedimientos. Por el contrario las matemáticas deben ser concebidas y trabajadas como una actividad viva y necesaria, tal como ocurre con el lenguaje.

4. Quienes están en contacto con las matemáticas, y esto significa toda la población de una sociedad, no deben recibir pasivamente conocimientos matemáticos, sino que, por el contrario, cada sujeto tiene que confrontarse, de manera individual o preferiblemente en cooperación y colaboración con los demás, activamente con los objetos y conceptos matemáticos; es decir, acostumbrase a asumir una conducta activa, lo cual tiene que ver con un aprendizaje experimental, investigativo, creativo, abierto y descubridor. El punto de partida tiene que ser necesariamente el tratamiento de situaciones problemáticas realistas, social y cognitivamente significativas. Aquí entran a jugar un papel muy importante las teorías psicológicas progresistas sobre el aprendizaje y la enseñanza.

5. La mejor manera de conseguir una relación directa entre el lenguaje y las matemáticas, así como el logro de habilidades y destrezas cognitivas complejas, es precisamente el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y, también de otras disciplinas, a partir de la realidad social y natural, la cual está expresada a través de la riqueza y complejidad de las diversas formas del lenguaje con el cual se desenvuelve el ser humano en cada contexto sociocultural. No hace falta, inicialmente, el dominio de un sistema terminológico complejo para entrar al mundo de la matematización de la realidad. Ese conjunto de términos e ideas gramaticales serán elaborados durante el proceso cognitivamente situado y contextualizado.

6. Por supuesto que existe, así como en el lenguaje, una dependencia directa entre la comprensión conceptual y la terminología que caracteriza a la respectiva disciplina, en particular a las matemáticas. Esta dependencia está mediatizada por la acción y el pensamiento. En

> la medida que se comprenden términos, conceptos, propiedades y procedimientos mediante la interacción y la acción por parte de quienes participan en el proceso de aprendizaje y enseñanza, en esa misma medida se aplican a situaciones problemáticas dentro y fuera de las matemáticas, convirtiéndose en un proceso recursivo, cíclico y dialéctico. La elaboración de un sistema terminológico no puede ser pensado sin su aplicación inmediata y, al mismo tiempo, el tratamiento inicial de situaciones problemáticas generadoras de aprendizaje-enseñanza, como punto de partida de la interacción sociomatemática que permitirá la construcción del bagaje terminológico necesario para seguir aumentado las habilidades y destrezas matemáticas.

Hemos visto, en este trabajo, la importancia que tiene el lenguaje para la comprensión matemática e, igualmente, el gran significado que tiene el lenguaje, no solamente para el aumento de la capacidad lingüística, sino también para el desarrollo del pensamiento. Las situaciones matemáticas comprendidas conscientemente por los seres humanos pueden ampliar enormemente sus significados, si ellas son explicadas mediante palabras no necesariamente matemáticas.

Podríamos decir, que la cognición se refiere, primeramente, al reconocimiento y a la representación. Ella comprende de manera convencional todos los procesos intelectuales, los cuales tienen que ver con percepción, registro, retención, producción de ideas y conocimientos, así como la re-elaboración de lo comprendido con la finalidad de externalizar nuevas ideas y nuevos conocimientos. En este proceso de internalización y externalización del pensamiento interviene el lenguaje y los fenómenos sociales y naturales. El pensamiento cumple con la tarea de ordenar, comparar, diferenciar, inducir-deducir, clasificar, crear, abstraer, idealizar, imaginar, etc. lo cual queda de manifiesto externamente mediante el lenguaje. Este pensamiento está determinado por las estructuras lingüísticas innatas, culturales y contextuales, donde las matemáticas también forman parte de ellas. Estos procesos cognitivos complejos requieren necesariamente del pensamiento y del lenguaje.

En el acuerdo sobre los diversos significados que poseen diferentes sujetos, en correspondencia con sus procesos de socialización y formación, se produce la capacidad y la interacción comunicativa, lo cual queda de manifiesto a través del lenguaje. El entendimiento que construye un sujeto sobre un objeto o hecho es reelaborado mediante su propio lenguaje para que las y los otros puedan comprender lo que ella o él ha pensado. Se establece, entonces, un proceso de construcción e intercambio de significados, lo cual ocurre de manera clara y natural con el lenguaje y forzada con las matemáticas. Aquí hay probablemente una diferencia fundamental entre el dominio/comprensión del lenguaje y el de las matemáticas, convirtiéndose esta hipotética apreciación en una tarea básica para la didáctica de las matemáticas, la didáctica interdisciplinaria y, sobre todo, para la investigación en el campo de las teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza, las cuales podrían encontrar explicaciones importantes en el mundo de las neurociencias, concretamente de la neurodidáctica. El proceso de traducción pone de manifiesto una relación recíproca entre cognición y comunicación, para lo cual deben existir necesariamente interacciones socioculturales. El pensamiento es mostrado, externalizado, mediante el mundo del lenguaje, el cual a su vez permite que los seres humanos internalicen el mundo para seguir construyendo significados y explicaciones creativas sobre las diversas realidades.

Para finalizar, queremos resaltar que aún quedan muchos aspectos pendientes en cuanto a la relación entre matemáticas, lenguaje, pensamiento y realidad. Es necesario seguir discutiendo e indagando sobre la posibilidad de la existencia de una similitud, desde el punto de vista de las estructuras mentales, entre la universalidad del lenguaje y la universalidad de las matemáticas. De acuerdo con las investigaciones recientes parece ser que en efecto existe también una estructura modular matemática en la mente de los seres humanos. Se considera entonces que nuestro cerebro comprende y representa los conceptos matemáticos de diversas formas: a) discretamente , b) lingüísticamente, c) aproximadamente y d) espacialmente. Todo lo cual, de manera similar que con el lenguaje, está altamente influenciado por los contextos auténticos y reales donde interactúan los sujetos. Esta será, en consecuencia, una de las tareas básicas de nuestras reflexiones e investigaciones en el campo de las teorías sobre el aprendizaje y enseñanza y, muy especialmente, sobre la didáctica de las matemáticas.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

**Adorno, T**. 1998. *Educación para la emancipación*. Madrid: Morata.

**Aguilera, M**. de. 1990. *La infografía*. Madrid: Fundesco.

**Apple, M**. 1982. *Education and Power*. New York/London: Routledge and Kegan Paul.

**Apple, M**. 1996. *Política cultural y educación*. Madrid: Morata.

**Apple, M**. 1997. Tomar en serio el poder: nuevas orientaciones en la equidad en la educación matemática y más allá. En Walter, Secada, Elizabeth, Fenema y Lisa, Adajian. *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. Madrid: Morata, pp. 346-365.

**Arnold, M**. 2002. *Aspekte einer modernen Neurodidaktik : Emotionen und Kognitionen im Lernprozess*. München: Verlag Ernst Vögel.

**Bardín, L**. 1986. *Análisis de Contenido*. Madrid: Akal.

**Bergson, Henri**. 1972. *El pensamiento y lo moviente*. Buenos Aires: La Pléyade.

**Bernstein, B**. 1990. *Poder, educación y conciencia*. Barcelona: El Roure.

**Bernstein, B**. 1993. *La estructura del discurso pedagógico*. Madrid: Morata.

**Bernstein, B**. 1998. *Pedagogía, control simbólico e identidad*. Madrid: Morata.

**Beuchot, M**. 2004. *La semiótica. Teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Beyer, W**. 1994. *El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

**Beyer, W**. 2003. *Didáctica de la matemática*. Mérida: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

**Bickmore-Brand, J**. 1990 (Eds.).Language in Mathematics. Australian Reading Association, 1-6.

**Bishop, A**. 1999. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

**Bruer, J**. 1995. *Escuelas para pensar*. Una ciencia del aprendizaje en el aula. Barcelona: Paidós.

**Bruner, J**. 1969. *Hacia una teoría de la instrucción*. México: Uteha.

**Bruner, J**. 1984. *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza.

**Bruner, J**. 1987. *La importancia de la educación*. Buenos Aires: Paidós.

**Bruner, J**.1988a. *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid: Morata.

**Bruner, J**. 1988b. Realidad mental y mundos posibles. Trad. de Beatriz López. Barcelona: Gedisa.

**Bruner, J**. 1997. *La educación, puerta de la cultura*. Barcelona:Visor.

**Bühler, K**. 1933. *Axiomatik der Sprachwissenschaften*. Frankfurt: Klostermann.

**Bühler, K**. 1934. *Sprachtheorie. Die Darstellungsfunktion der Sprache*. Jena: Gustav Fischer Verlag.

**Caivano, J. L**. 2005. *Semiótica, cognición y comunicación visual: los signos básicos que construyen lo visible*. Disponible en: www.fadu.uba.ar/ sitios/ sicyt/color/2005topi.pdf.

**Carey, S. y Spelke, E**. 2002. Conocimiento dominio-específico y cambio conceptual. En: Lawrence, Hirschfeld y Susan, Gelman. *Cartografía de la mente. La especificidad de dominio en la cognición y en la cultura*. Barcelona: Gedisa, pp. 243-284.

**Carraher, T.; Carraher, D. y Schliemann, A**. 1991. *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI Editores.

**Cauty, A**. 2001. *¿Matemática y lenguaje. Cómo seguir siendo amerindio y aprender la maemática de la que se tiene y se tendrá necesidad en la vida?* En: Lizarzaburu, Alfonso y Zapata, Gustavo (Comps.). Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina. Experiencias y desafíos. Madri: Editorial Morata.

**Chomsky, N**. 1970. *Aspectos de una teoría de la sintaxis*. Madrid: Aguilar.

**Chomsky, N**. 1973. *El lenguaje y el entendimiento*. Barcelona: Seix-Barral.

**Chomsky, N**. 1974. *Estructuras sintácticas*. México, Siglo XXI.

**Chomsky, N**. 1989. *El lenguaje y los problemas del conocimiento*. Madrid: Visor.

**Chomsky, N**. 1992. *El lenguaje y el entendimiento*. Barcelona: Planeta.

**Chomsky, N**. 1981. Reflexiones acerca del lenguaje: adquisición de las estructuras cognoscitivas. México: Trillas.

**Cobb, P. y Bauersfeld, H**. 1995 (Eds.). Interaction in Classroom Cultures. Hillsdale: Erlbaum.

**Cole, M**. 1999. *Psicología cultural*. Madrid: Ediciones Morata.

**Cole, M. y Means, B**. 1986. *Cognición y pensamiento*. Buenos Aires: Paidós.

**Cole, M.y Scribner, S**. 1977. *Cultura y pensamiento*. Relación de los procesos cognoscitivos con la cultura. México: Editorial Limusa.

**Colectivo de Autores**. 1995/2000. *Psicología para educadores*. Habana: Pueblo y Educación.

**Cooper, J. D**. 1990. *Cómo mejorar la comprensión lectora*. [Trad. de Jaime Collyer]. Madrid: Visor Distribuciones.

**Damasio, A**. 2004. *Descartes´ Irrtum. Fühlen, denken und das menschliche Gehirn*. München: List Verlag.

**Davis, Philip y Hersh, R**. 1989. *El sueño de Descartes. El mundo según las matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Labor.

**De Saussure, F**. 1973. *Curso de lingüística general*. Buenos Aires: Losada.

**Delamont, S**. 1984. *La interacción didáctica*. Madrid: Cincel-Kapelusz.

**Dennett, D**. 1995. Lenguaje e inteligencia. En: *¿Qué es la inteligencia?* Madrid: Alianza.

**Devlin, K**. 2004. Das Mathe-Gen. Oder wer sich das mathematische Denken entwickelt + Warum Sie Zahlen ruhig vergessen können. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

**Echeverría, M. del Puy**. 1998. La solución de problemas en matemáticas. En: Juan Ignacio pozo, María del Puy, Pérez; Jesús, Domínguez; Miguel Ángel Gómez y Yolanda Postigo. *La solución de problemas*. Madrid. Editorial Santillana, pp. 51-83.

**Eco, U**. 1977. *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

**Eco, U**. 1990. *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Barcelona: Lumen.

**Edwards, D.** 1992, 75. Discurso y aprendizaje en el aula. En: Colin, Rogers y Peter, Kutnick (compiladores). *Psicología social de la escuela primaria*. Madrid: Paidós, pp. 63-82.

**Engeström, E**. 1987. *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

**Engeström, Y**. 1999. *Lernen durch Expansion*. Marburg: BdWi-Verlag.

**Engeström, Y**. 2005. Developmental Work Research. Expanding Activity Theorie In Practice. Lehmanns.

**Fernández, M**. 1999. *Introducción a la lingüística*. Barcelona, España: Ariel.

**Fischer, R**. 1986. *Zum Verhältnis von Mathematik und Kommunikation*. En: mathematica didactica 9, 119-131.

**Fitzgerald, J**. 1995. "Investigaciones sobre el texto narrativo. Implicaciones didácticas" en Denisse Muth. El texto narrativo. 2a. ed., trad. de Isabel Stratta. Buenos Aires: Aiqué Grupo Editor.

**Flanders, N. J**. 1977. *La interacción didáctica*. Madrid: Anaya.

**Fodor, J. A**. 1984. *El lenguaje del pensamiento*. Madrid: Alianza.

**Freire, P**. 1969. *Pedagogía de la libertad*. México: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1971. *Pedagogía del oprimido*. Madrid: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1973. *¿Extensión o comunicación? La concientización en el medio rura*l. México: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1974. *¿Extensión o comunicación? La concientización en el medio rural*. México: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1979. *Política y educación*. México: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1981. *Der Lehrer ist Politiker und Künstler. Neue Texte zu befreiender Bildungsarbeit*. Hamburg.

**Freire, P**. 1985. *La naturaleza política de la educación. Cultura, poder y liberación*. Barcelona, España: Paidós.

**Freire, P**. 1997. *Pedagogía de la autonomía*. México: Siglo XXI.

**Freire, P**. 1998. *Pedagogía de la esperanza*. México: Siglo XXI.

**Freire, P. y Shor, I**. 1987. *A Pedagogy for Liberation Dialogues on Transforming Education*. London: Bergin y Garvey.

**French, J**. 1992. La interacción social en el aula. En: Colin, Rogers y Peter, Kutnick (compiladores). *Psicología social de la escuela primaria*. Madrid: Paidós, pp. 43-61.

**Gallin, P. y Ruf, U**. 1993. Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. En. Journal für Didaktik der Mathematik 14(1), 3-33.

**Gallin, P., Ruf, U. y Sitta, V**. 1985. Verbindung von Deutsch und Mathematik -ein Angebot für entdeckendes Lernen- En: mathematik lehren, Nr. 9, pp. 17-27.

**García-Carpintero, M**. 1996. *Las palabras, las ideas y las cosas*. Barcelona.

**Gerdes, P**. 1997. *Ethnomathematik*. Heidelberg.

**Germain, C**. 2003. As interações sociais em aulas de uma segunda língua ou de idioma estrangeiro. Em: Garnier, Catherine; Nadine, Bednarz e Irina, Ulnovskaya e Colaboradores. *Após Vygotsky e Piaget. Perspectivas social e construtivista escolas russa e ocidental*. São Paulo: Artmed, pp. 92-110.

**Goodman, Y. y Goodman, K**. 1993. Vygostky desde la perspectiva del lenguaje total (whole-language). En: Luis, Moll (Comp.). *Vygotsky y la educación. Connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación*. Buenos Aires: Aique.

**Greeno, J**. 1998. The Situativity of Knowing, Learning, and Research. *American Psychologist*, January, Vol. 53, No.1, 5-26.

**Habermas, J**. 1966. *Teoría y Práctica: ensayos de filosofía social*. Buenos Aires: Sur.

**Habermas, J**. 1981/1999. *Teoría de la acción comunicativa*. Madrid: Taurus.

**Halliday, M. A. K**. 1986. *El lenguaje como semiótica social: La interpretación social del lenguaje y del significado*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Harlen, W**. 1989. *Enseñanza y aprendizaje de las ciencias*. Madrid: Morata.

**Hierro, S**. Pescador, J. 1986. *Principios de filosofía del lenguaje*. Madrid, Alianza.

**Hirschfeld, L. y Gelman, S**. 2002. *Cartografía de la mente. La especificidad de dominio en la cognición y en la cultura*. Barcelona: Gedisa.

**Hußmann, S**. 2003. Umgangsprache – Fachsprache. En: Timo, Leuders (ed.). *Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlín: Cornelsen, pp. 60-75.

**Ifrah, G**. 1997. *Historia universal de las cifras: La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe.

**Jakobson, R**. 1963. *Ensayos de lingüística general.* México: Siglo XXI Editores.

**Jaulin-Mannoni, F**. 1980. *La reeducación del razonamiento matemático*. Madrid: Visor Libros.

**Kandel, E. R., Schwartz, J. H. y Jessell, T. M**. 1999. *Neurociencia y Conducta*. España: Prentice Hall.

**Köhler, H**.1992. *Über Relevanz und Grenzen von Mathematisierungen*. Buxheim/Eichstätt: Polygon Verlag.

**Krippendorff, K**. 1990. Metodología del análisis de contenido. Teoría y Práctica. Barcelona: Paidós.

**Krummheuer, G**. 1982. Rahmenanalyse zum Unterricht einer achten Klasse über Termumformung. En: H. Bauersfeld. *Analysen zum Unterrichtshandeln*. Köln: Aulis, 41-103.

**Krummheuer, G**. 1994. Der mathematische Anfangsunterricht. Anregungen für ein neues Verstehen früher mathematischer Lehr-Lern-Prozesse. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

**Lauter, J**. 1997. *Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch¬ didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule*. Donauwörth: Auer Verlag.

**Lave, J**. 1991b. Situating Learning in Communities of Practice, In: Resnick,L.B./Levine,J.M./Tealey,S.D.(Eds.): Perspectives on Socially Shared Cognition, Washington, D.C.

**Lave, J**. 1997. The culture of acquisition and the practice of understanding. En D. Kirshner y J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition. Social, semiotic and psychological perspectives* (pp. 17-35). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

**Lave, J**. 1991a. *La cognición en la práctica*. Madrid: Paidós.

**Lave, J. y Wenger, E**. 1991. *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

**Lemke, J**. 1997. *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores*. Barcelona: Paidós.

**Lemke, J**. 1997. *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores*. Trad. de Ana García y otros, Barcelona: Paidós Ibérica.

**Leontiev, A**. 1968. *El hombre y la cultura problemas teóricos sobre educación*. México D.F.: Grijalbo.

**Leontiev, A**. 1978. *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ciencias del Hombre.

**Leontiev, A**. 1979. *La actividad en la psicología*. La Habana: La Habana.

**Leontiev, A**. 1986a. Sobre la formación de capacidades, en: *Antología de la psicología pedagógica y de las edades*. La Habana: Ediciones Pueblo y Educación.

**Leontiev, A**. 1986b. *Psicología y pedagogía*. Madrid: Akal.

**Leóntiev, A**. 1987. El desarrollo psíquico del niño en la edad preescolar. En: M. Schaure (eds.). *La psicología evolutiva y pedagogía en la URSS.* Moscú: Progreso, 57-70.

**Licon Khisty, L**. 1997. La creación de la desigualdad: problemas del idioma y de los significados en la enseñanza de las matemáticas con alumnos hispanos. En: W. G. Secada, E. Fennema y L. B. Adajian (Comps.). *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. Madrid: Ediciones Morata, pp. 297-315.

**Linke, J**. (Editor). 2002. *Schulbegleitforschung – forschend lernen in der Praxis*. Bremen: Eine Ringvorlesung an der Universität Bremen, Fachbereich 12.

**Lorenz, J. H**. 1997. *Kinder entdecken die Mathematik*. Braunschweig: Westermann Verlag.

**Luria A. R., A. N. Leontiev y L. S. Vygotsky**. 1973. *Psicología y pedagogía*. Madrid: Akal

**Luria, A**. 1993. *Lenguaje y pensamiento*. Santafé de Bogotá D.C.: Martínez Roca.

**Luria, A**. 1977. *Introducción evolucionista a la psicología*. Barcelona: Fontanella.

**Luria, A**. 1979. *El cerebro en acción*. Barcelona. España: Fontanella.

**Luria, A**. 1987. *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos*. Madrid: Akal.

**Luria, A**. 2000. *Conciencia y lenguaje*. Madrid: Visor.

**Maier, H. y Schweiger, F**. 1999. *Mathematik und Sprache. Zum verstehen und verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: Verlagsgesellschaft.

**Manturana, H. y Varela, F**. 1996. *El árbol del conocimiento. Las bases biológicas del conocimiento humano*. Madrid: Debate.

**Mayer, R**. 1986. *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona, España: Paidós.

**Maza, C**. 1995. *Aritmética y representación. De la comprensión del texto al uso de materiales*. Barcelona, España: Paidós.

**Medina Revilla, A**. 1989. *Didáctica e interacción en el aula*. Bogotá: Cincel.

**Minick, N**. 2001. Instrucciones de la maestra: la construcción social de «significados literales» y «mundos reales» en el discurso del aula. En: Seth, Chaiklin y Jean, Lave. *Estudiar las prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires: Amoeeortu Editores, pp. 368-299.

**Mora, D**. 2005a, 2005b. (Coordinador). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. La Paz, Bolivia: Campo Iris.

**Mora, D**. 2006a. *Desarrollo teórico de la neurodidáctica*. Documento no publicado, La Paz, Bolivia.

**Mora, D**. 2006b. *Aprendizaje orientado en la investigación*. Mimeografiado: La Paz.

**Mora, D**. 2006c. *Niveles de abstracción de la realidad*. Material mimeografiado aún no publicado. La Paz, Bolivia.

**Mora, D**. 2006d. Libro que se publicará pronto.

**Morris, C**. 1985. *Fundamentos de la teoría de los signos*. Barcelona, España: Paidós.

**Morris, C**. 1994. *Fundamentos de la teoría de los signos*. Barcelona: Paidós

**Moysés, L**. 2004. *Aplicações de Vygotsky. Á educação matemática*. São Paulo: Papirus.

**Munro, J**. 1990. Mathematics and Language: A Subset of Language? En: G. Davis y R. P. Hunting. *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics*. Bundoora, Australian: La Trobe University, 7-24.

**Nesher, P**. 2000. Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En: N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona, España: Editorial Graó, pp. 109-123.

**Newman, D., Griffin, P. y Cole, M**. 1991. *La zona de construcción del conocimiento*. Madrid: Morata.

**Olson, D**. 1998. *El mundo sobre papel. El impacto de la escritura y la lectura en la estructura del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

**Orton, A**. 1990. *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata.

**Panizza, M**. 2005. Reflexiones generales acerca de la ensenanza de la matemática. En: Mabel, Panizza (comp.). Ensenar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de la EGB. *Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós, pp. 31-57.

**Peirce, C**. 1990. *Semantische Schriften*. Edición y traducción de Christian Kloesel. Frankfurt/Main: Suhrkamp, 1990.

**Perero, M**. 1994. *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Idetorial Iberoamerica.

**Pérez Serrano, G**. 1984. El análisis de contenido de la prensa. La imagen de la universidad a distancia. Madrid. UNED.

**Perkins, D**. 1995. *La escuela inteligente*. Barcelona, España: Gedisa.

**Perkins, D**. 1995. *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*. Barcelona, España: Gedisa.

**Perkins, D**. 1997. *Un aula para pensar*. Buenos Aires: Aique.

**Perkins, D**. 2003. *La bañera de Arquímedes y otras historias del descubrimiento científico*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

**Perrenoud, P**. 1998. *La construcción del éxito y del fracaso escolar*. Madrid: Morata.

**Perrenoud, P**. 2004. *Desarrollar la práctica reflexiva en el ofi cio de enseñar*. Barcelona, España: Graó.

**Piaget, J**. 1961. *La formación del símbolo en el niño*. México, FCE.

**Piaget, J**. 1970. *La epistemología genética*. Barcelona, A. Redondo Editor.

**Piaget, J**. 1971. *Psicología y epistemología*. Barcelona: Ariel.

**Piaget, J**. 1978. *Seis estudios de psicología*. Barcelona: Barral.

**Pimm, D**. 1990. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

**Pinker, S**. 2001. *El instinto del lenguaje*. Madrid: Alianza.

**Pinto, B**. 1998. *Neuropsicología de los problemas del aprendizaje escolar*. La Paz: Punto Cero.

**Pizarro, B**. 2003. *Neurociencia y educación*. Madrid: La Muralla.

**Postigo, Y. y Pozo, J. I**. 2000. Hacia una nueva alfabetización: el aprendizaje de información gráfica. En: Juan Ignacio, Pozo y Carles, Monereo. *El aprendizaje estrategico*. Madrid: Santillana, pp. 251-267.

**Preiß, G**. 1998. *Neurodidaktik. Theoretische und praktische Beiträge*. Herbolzheim: Centaurus.

**Puig, L**. (s/f). *Signos, textos y sistemas matemáticos de signos*. Disponible en: http://www.uv.es/puigl/mexico00.pdf.

**Putnam, H**. 1995. *Representación y realidad. Un balance crítico del funcionalismo*. Barcelona, España: Gedisa.

**Resnick, L**. 1999. *La educación y el aprendizaje del pensamiento*. Buenos Aires: Aique.

**Resnick, L. y Ford, W**. 1990. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, España: Paidós.

**Ricoeur, P**. 1980. *La metáfora viva*. Madrid: Cristiandad.

**Robinson, I**. 1990. Mathematics and Language. The Experiences of EMIC and Key Grup. En: G. Davis y R. P. Hunting. *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics*. Bundoora, Australian: La Trobe University, 84¬99.

**Rodríguez Diéguez, J. L**. 1985. *Curriculum, acto didáctico y teoría del texto*. Madrid: Anaya.

**Rojano, T**. 1994. *La matemática escolar como lenguaje*. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45-56.

**Romaine, S**. 1996. *El lenguaje en la sociedad. Una introducción a la sociolingüística*. Barcelona, España: Ariel.

**Rosas, R. y Sebastián, C**. 2004. *Piaget, Vigotski y Manturana. Constructivismo en tres voces*. Buenos Aires: Aique.

**Ruiz Morón, D**. 2003. *Lenguaje en clases de matemática*. Mérida: Universidad de Los Andes, Consejo de Publicaciones.

**Sapir, E**. (1884-1939). 1962. *El lenguaje: introducción al estudio del habla*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Sapir, E**. 1977. *El lenguaje*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Saussure, F. d**. 1969. *Curso de lingüística general*. Buenos Aires: Losada.

**Saussure, F.** 1977. *Curso de lingüística general*. Buenos Aires: Losada.

**Searle, J. R**. 1980. *Actos de habla. Ensayo de filosofía del lenguaje*. Madrid: Cátedra.

**Selter, Chr**. 1997. Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept. En: mathematik lehren (83), pp. 4-8.

**Serrano, W**. 2002. *El discurso matemático en el aula*. Un análisis desde la observación del curso Sistemas Numéricos. *Sapiens*, Año III, Nº 1, 81-103).

**Serrano, W**. 2005a. *El significado de objetos en el aula de matemáticas.* Revista de Pedagogía, XXVI(75), 131-164.

**Serrano, W**. 2005b. *Elementos de Álgebra*. [Unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez". Tesis de Maestría no publicada], Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

**Skemp, R**. 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

**Skovsmose, O**. 1994. Towards a philosophy of critical mathematics education. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

**Spitzer, M**. 2002. *Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lernens*. Heidelberg y Berlín: Spektrum Akademischer Verlag.

**Spitzer, M**. 2005. *Nervensachen. Geschichten vom Gehirn*. Suttgart: Suhrkamp.

**Squire, L. y Kandel, E**. 2003. *Memória. Da mente às moléculas*. Porto Alegre: Artmed.

**Titone, R**. 1986. *El lenguaje en la interacción didáctica: teoría y modelos de análisis*. Madrid: Narcea.

**Ullmann, S**. 1976. *Semántica: Introducción a la ciencia del significado.* Madrid: Aguilar.

**Van Dijk, Teun A**. 2000. *El discurso como estructura y proceso*. Trad. de Elena Marengo, Barcelona: Gedisa.

**Vygotsky, L**. 1988. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.

**Vygotsky, L**. 1998. *Pensamiento y lenguaje*. La Habana: Pueblo y Educación.

**Vygotsky, L. S**. 1995. *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós.

**Vygotsky, L**. 1986. *Interacción entre aprendizaje y desarrollo. En Los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.

**Vygotsky, L**. 1992. *Geschichte der höheren psychischen Funktionen*. Münster/ Hamburg.

**Vygotsky, L**. 1995. *Obras Completas. Fundamentos de defectología*. Tomo cinco. Habana: Pueblo y Educación.

**Vygotsky, L**. 1998. *El desarrollo cultural del niño y otros textos inéditos*. Buenos Aires.

**Vygotsky, L**. [1926]. 2001. *Psicología pedagógic*a. Buenos Aires: Aique.

**Weiller, C. y Musso, M. C**. 2006. Wissenschaftler fi nden heraus, welche Hirnregion die Basis für das Erlernen von Fremdsprachen bildet. En: http://www.innovations-report.de/html/berichte/studien/ bericht-19508.html.

**Weinrich, H**. 1968. *Estructura y función de los tiempos en el lenguaje*. Madrid: Gredos.

**Wenger, E**. 2001. *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Madrid: Paidós.

**Wertsch, J**. 1981. *Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: Armonk.

**Wertsch, J**. 1988. *Vygotsky y la formación social de la mente.* Buenos Aires: Paidós.

**Wertsch, J**. 1993. Voces de la mente, Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada. Madrid: Visor.

**Wertsch, J**. 1998. *La mente en acción*. Buenos Aires: Aique.

**Whorf, B. L**. 1971. *Lenguaje, pensamiento y realidad*. Barcelona: Barral.

**Young, R**. 1993. *Teoría crítica de la educación y discurso en el aula*. Barcelona: Paidós.

**Zavaleta, J**. 1991. *Lenguaje y pensamiento*. Cochabamba: Impresiones Poligraf.

**Zech, F**. 1995. *Mathematik erklären und verstehen*. Berlin: Cornelsen Verlag.

**Zech, F**. 1996. *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehre und Lernen von Mathematik*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

**Zöllner, C**. 2004. *Untersuchung der zeitlichen und räumlich-hemisphäriellen Wortverarbeitung bei Mutter- und Fremdsprachlern mittels Magnetenzephalographie*. Universidad de Hamburgo. [Tesis Doctoral]. En: http://deposit.ddb.de/ep/dissonline/frontpool/97554244x.htm.

# JUEGOS DE LENGUAJE EN EL CONTEXTO DEL AULA DE MATEMÁTICAS

*Dr. Wladimir Serrano Gómez*
*Profesor Asociado del Instituto Pedagógico de Miranda*
*J.M.S.M., U.P.E.L.*
*wserranog@gmail.com*

## INTRODUCCIÓN

*¿Qué es el significado?* es una pregunta que ha embarcado a teóricos en campos tan diversos como la filosofía, la lingüística, la antropología, la semiótica, la psicología, la educación, e incluso, en la historia. En Serrano W. (2005a) se discuten algunas de las corrientes más relevantes sobre el significado. Además, resulta confuso pensar que términos de los que a primera vista parecen naturales, e incluso, básicos, son precisamente los más difíciles de abordar teóricamente. Considere, tal como planteó San Agustín, al *tiempo*. Término del cual expresó: *cuando no se me pregunta qué es, lo conozco*; pero cuando se me pregunta, no lo conozco. Es precisamente el significado una de las nociones básicas en toda discusión sobre Educación Matemática, así como también lo son *aprendizaje*, *enseñanza*, *conocer* y *actividad*. Sin embargo, no todos los desarrollos de la Educación Matemática como disciplina científica han centrado su investigación en el significado, aún cuando, como hemos advertido, es una noción central. Y no lo es sólo por declaración: todo proceso de enseñanza/aprendizaje, más allá de la matemática, tiene que ver con ello. La comunicación y el lenguaje de un grupo no escapan a ello. En Beyer (1994 y 1999), así como en Serrano W. (2002a, 2002b, 2004a, 2004b, 2004c, 2005a, 2005b y 2005c) se concibe a la construcción de significados en el contexto del aula de matemáticas como un proceso que es parte de la adquisición y/o estructuración del lenguaje matemático en el seno de un grupo. Las estructuras dadas por *la Matriz de Lacombe-Adda-Beyer*, la *Matriz de Lacombe-Adda-Beyer-Serrano* y los *Juegos de Lenguaje*; las *concepciones*, las *situaciones didácticas*, los *malentendidos* y los *errores*, y la *actividad*, se soportan en el significado.

Se pudiera pensar en que esta discusión resulta inútil en tanto que el significado de los objetos matemáticos está establecido, existe ya en el *edificio matemático*. La educación consistiría entonces en enseñar o transmitir el significado de estos objetos. La tarea del estudiante sería, básicamente, captar o entender el significado que transmite el profesor de matemática. Esta es una posición bastante común entre los profesores de matemática, tanto en Venezuela como en el ámbito mundial. Sin embargo, nosotros la criticamos, pues se corresponde con una visión de la educación que se vincula con lo que Freire (1969, 1970), en el campo de la pedagogía y filosofía de la educación, llamó *concepción bancaria*. En esta visión, aprender matemáticas se relaciona con recibir información (o el saber) de parte del docente. Ello conforma un esquema de trabajo ya superado desde hace mucho por el desarrollo teórico-práctico de la Educación Matemática, en particular desde la Educación Matemática Crítica. Lo destacamos aquí ya que, quizás sin percatarnos, es una visión que nos impide pensar en la naturaleza del significado en Educación Matemática y en la construcción o asociación de significados en el contexto del aula.

Destacamos entonces, la importancia que el estudio del significado puede tener en la Educación Matemática. Si vemos a la Educación Matemática con una mirada amplia, más allá de la concepción bancaria o de lo que algunos autores denominan *paradigma del ejercicio*, no es racional suponer que existe un significado único para cierto objeto matemático. Reflexionar sobre estas ideas pasa por entender que ello no es así en la práctica. Mucho de este problema radica en que los profesores de matemática piensan como los matemáticos; esto es, se centran en el edificio en que se han organizado las matemáticas a lo largo de los siglos, y no ven las matemáticas como una actividad sociocultural.

Este marco de ideas nos lleva a caracterizar el significado en un sentido similar al planteamiento que hizo el segundo Wittgenstein para con el lenguaje natural. Nosotros desarrollamos una idea de significado en la Educación Matemática vinculada al uso que de cierto objeto matemático se haga y a la explicación que de él se dé. Además, sostenemos que no sólo a los objetos matemáticos se le construye o asocia significado, sino que también a la actividad matemática en sí.

## EL SIGNIFICADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El estudio y la reflexión sobre el significado y los procesos de enseñanza/aprendizaje de la matemática han adquirido relevancia en algunos programas de investigación de la Educación Matemática. Posiciones filosóficas (en la Educación Matemática) que van más allá de la idea de asociar el signifi cado de una proposición con su valor de verdad o con la posibilidad de que sea verdadera, con asociar el significado de un signo o símbolo con el objeto por el cual está, o bien con un único pensamiento, han dado paso a otras en las que se toma en cuenta el contexto en el que se da el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática, así como a los sujetos que en ella participan y, a considerar que las acciones, así como las proposiciones o los símbolos, son también susceptibles de poseer significados. Entonces, apropiarse de una idea de significado en Educación Matemática pasa por valorar y estudiar el proceso comunicativo que se desarrolla en un grupo como el del aula de matemáticas. Es una visión que no se centra exclusivamente en la matemática como cuerpo de referentes para el o los significados de ciertos signos o símbolos, sino que se enriquece, por ejemplo, de perspectivas filosóficas, educativas, psicológicas, lingüísticas y sociológicas.

En lo que sigue, discutiremos algunas de las perspectivas teóricas en Educación Matemática sobre el significado, así como el planteamiento que al respecto se ha hecho en trabajos como Skemp (1999), Godino y Batanero (1994), Godino (2002), Orton (1996), Pimm (1995, 1999), Christiansen (1997), Beyer, (1999), Filloy (1999), Bishop (1999), Alson (2000), Serrano W. (2005b), entre otros.

El significado es una noción central para la educación matemática (Cobb y Bauersfeld, 1995; Pimm, 1995; Orton, 1996; Beyer, 1999, Alson, 2000; Godino, 2002, Serrano W., 2005a, 2005b). Esta es la tesis general que se sigue en este trabajo. No obstante, será necesario discutir la naturaleza de esta noción a partir del estudio de las perspectivas con que estos autores la han abordado. En la Educación Matemática se presentan, tal como en la filosofía y en la lingüística, posiciones contrapuestas [ver, por ejemplo: los planteamientos de Aristóteles, San Agustín, Carnap (1965), Frege (1974), Christensen (1968), Saussure (1990), Ogden y Richards (1946), Hockett (1958), Ullmann (1967) y Wittgenstein (2002, 2003)]. Nuestro interés general aquí será acercarnos a la naturaleza del significado en el seno de la educación matemática.

Para Orton (1996) el objetivo de la enseñanza (de la matemática) es la transmisión del significado al estudiantado y agrega que *la comunicación del significado supone frecuentemente la interpretación por parte del receptor y ello debe prevenirnos de que, a menudo, los mensajes pueden ser objeto de interpretaciones incorrectas* (p. 170). Orton no ahonda en la discusión sobre su idea de que el objetivo de la educación matemática es *transmitir* significados a las y los estudiantes. Si bien es cierto que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática se transmiten significados, por ejemplo, a través de la exposición o explicación del profesor o de un libro de texto, no toda la educación se basa o debería basarse en la transmisión de significados. La transmisión de significados en educación, y en la educación matemática en particular puede asociarse con la *concepción bancaria* que describió Freire (1969, 1970). Concepción en la que el profesor es visto como la autoridad en el contexto del aula, como la única fuente del saber matemático; es una concepción que guarda relación con el esquema de trabajo exposición (del profesor)-ejercicios que criticamos.

La advertencia que hace Orton: *los mensajes pueden ser objeto de interpretaciones incorrectas* (o más generalmente de malentendidos), la concebimos como algo natural al proceso de comunicación. De hecho, es difícil imaginar un lenguaje que sirva al común de las personas en el que no se den malentendidos, o interpretaciones incorrectas, en la terminología de Orton. Con respecto al lenguaje matemático, es un error pensar que éste es un sistema de comunicación donde los términos y proposiciones escapan a los malentendidos, incluso entre quienes se forman para matemáticos de profesión. La noción de *límite*, por ejemplo, no es algo que comúnmente sea fácil de comprender, incluso después de aprobar varios cursos de cálculo; observación que puede hacerse sobre otras ideas matemáticas tanto de la matemática superior como de la básica o escolar.

Queremos destacar aquí la idea de la transmisión de significados. Transmitir significados puede vincularse, además, con transmitir un saber. La *transposición didáctica* (Brousseau, 1986) es un proceso que lleva adelante el profesor en el que se adapta, modifica o reorganiza un saber matemático (o saber sabio). Proceso que lleva a un *saber a enseñar*. El saber es entonces, en la *Didáctica Fundamental*, algo que poseen o a que han llegado los matemáticos: es el saber del sabio. El saber a enseñar es determinado por el profesor. Nuestra posición aquí es distinta a la que subyace en Brousseau: pensar o hacer matemáticas no es algo que se restrinja a pensar en el marco del edificio en que se han estructurado las teorías algebraicas, geométricas, etc., ni algo exclusivo de los matemáticos de profesión; así como filosofar no ha sido algo exclusivo de Aristóteles, Kant, Adorno, Russell o Wittgenstein (por solo mencionar algunos de los grandes fi lósofos), filosofar es algo que también pueden hacer todos. Entendemos entonces que la transposición didáctica, en los términos que la define Brousseau (1986) puede asociarse a la concepción bancaria de la educación. En estos constructos teóricos, la matemática que se tiene como referencia es la que se ha estructurado a través de los siglos en teorías; no se tiene como referencia al hacer matemáticas en un sentido amplio, a la actividad matemática, tal como se entiende en la *Etnomatemática*, en el *Enfoque Sociocultural* o en la *Educación Matemática Crítica*. La *Didáctica Fundamental* se centra entonces en el método didáctico.

En este marco se inscribe el trabajo *Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering* (Winsl∅w, 2003), aunque también se relaciona con la teoría que ha desarrollado el Pensamiento Matemático Avanzado. En él se estudia la actividad semiótica de las y los estudiantes en el marco de la Didáctica Fundamental. Se describen, por ejemplo, algunos de los efectos o problemas de naturaleza didáctica que tienen que ver con el apoyo de la enseñanza en los CAS: el efecto Jourdain, entre otros. Winsl∅w se centra en el papel que tiene la utilización de sistemas de álgebra computacional (computer algebra systems –CAS), por parte de estudiantes universitarios, en permitir una actividad matemática sobre un nivel conceptual más elevado que el usual.[1]

Pero, ¿qué es el significado? Pimm (1995) explica que el significado no es algo que sea claro u obvio, y sin embargo, es una idea básica en cualquier discusión sobre los procesos de aprendizaje/enseñanza de la matemática. En el trabajo de Alson (2000), *Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathé-matiques*,[2] se explica que: Cualquier palabra evoca su significado (a quien conoce su significado) [...] La palabra en general juega el papel de signo (o significante). ¿Cómo se forma el signo en el lenguaje?: es una gran incógnita. Cuando la palabra es captada, el significado de ella no suele ser construido a través de un proceso del cual el individuo esté consciente hasta el punto de percibir sus diferentes pasos. Sin saber cómo, él logra asociar la palabra con un significado apropiado. Existe sin embargo la asociación (Alson, 2000, p. 7).

---

[1] Ver también Doerr y Zangor (2000) en relación con la construcción de significado, por parte de profesores y alumnos, de la calculadora graficadora como heramienta para el aprendizaje matemático en el aula.

[2] Tesis doctoral dirigida por G. Brousseau. Alson, aunque en el marco de la Didáctica Fundamental, critica que las notas o la cuantificación sea una medida del saber individual. También considera que una sociedad del conocimiento debe implicar cambios en la concepción de enseñanza y en la manera como se conciba el saber.

Así, al hablar del *núcleo de un grupo G*, de la *base de un espacio vectorial*, de la *irracionalidad de* $\sqrt{2}$ o del *mínimo común múltiplo de 10, 22 y 5*, etc. se evoca su significado a quien conoce su significado, como afirma Alson. Nuestra posición aquí es que sería un error pensar que a través del esquema exposición (del docente) – ejercicios todos los estudiantes comprenderán los objetos y relaciones matemáticas que se traten en la clase. Una educación matemática basada en la *transmisión de significados* o *del saber* descarta la actividad matemática del estudiante (en su sentido amplio) como medio para la construcción de significados; descarta las actividades que se encuentran fuera de la *estructura del edificio matemático*, tal es el caso de contar, medir, calcular, representar, estimar y modelar (Serrano W., 2005a).[3] De hecho, el trabajo de Christiansen (1997) sostiene que la negociación de significados está estrechamente relacionada con la negociación de tareas, esto es, de las actividades a desarrollar en el contexto del aula de matemáticas.

La idea de significado apropiado se relaciona con el significado institucional que definen Godino y Batanero (1994). Para estos autores el significado de un objeto institucional ($O_I$) o matemático, como por ejemplo el de *media aritmética*, es *el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge $O_I$ en un momento dado*; distinguen además otra dimensión para el significado de los objetos matemáticos: el significado de un objeto personal ($O_P$), éste *es el sistema de prácticas personales del que emerge el objeto $O_P$ en un momento dado*. Godino y Batanero (1994) sostienen que un sujeto en una situación e institución en particular comprende o ha captado el significado de un $O_I$ si reconoce sus propiedades, si lo relaciona con varias situaciones problemáticas en el marco de la institución correspondiente.

Godino y Batanero (1994) entienden como institución a una comunidad de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas en la cual se llevan a cabo prácticas socialmente compartidas. Hablan de (a) la institución matemática, constituida por los matemáticos, *los productores del saber matemático*, (b) otras instituciones en las que se utiliza el saber matemático formada por los matemáticos aplicados

---

[3] **Bishop (1999)** distingue también seis actividades: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Explica que éstas han permitido a un grupo relacionarse entre sí y con el entorno cultural que los envuelve.

y, (c) la institución escolar, en la que se enseña el saber matemático. Como se observa Godino y Batanero se apoyan en la noción de transposición didáctica que nosotros criticamos, y en general inscriben su trabajo en la Didáctica Fundamental. Sin embargo, la idea de distinguir entre el significado institucional, por ejemplo el que se da a los objetos en el edificio matemático, y el significado que *comprenden* las personas en situaciones específicas, es natural e importante. Esto es, la discusión sobre el significado en educación matemática debe atender también al significado que tienen o construyen los estudiantes en situaciones particulares; no debe olvidar esta discusión considerando a los significados alejados de los significados en el seno del edificio matemático como *simples errores*, sin considerar la naturaleza de estos, su evolución y relaciones con las actividades matemáticas que se han desarrollado en el contexto del aula, o bien con otros objetos y fenómenos no-matemáticos, así como su potencial didáctico.

En otro trabajo, Godino y Batanero (1998), partiendo de la clasificación de las entidades en (a) ostensivas: términos, expresiones, notaciones, símbolos, gráficos, tablas, etc., (b) extensivas: problemas, fenómenos, aplicaciones, etc., (c) intensivas: conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías, y (d) actuativas: describir, operar, argumentar, etc., diferencian cuatro tipos de funciones semióticas[4] y, por tanto, de significados: (1) funciones ostensivas, (2) extensivas, (3) intensivas y (4) actuativas. Para Godino y Batanero la función del tipo (1) tiene que ver con el uso de los signos para nombrar objetos y estados del mundo, para indicar cosas existentes y, para expresar que existe algo y que ese algo tiene determinadas características. La función de tipo (2) se relaciona, por ejemplo, con la descripción de una situación-problema. La del tipo (3) tiene como contenido un objeto intensivo, por ejemplo, en las definiciones. Y la del tipo (4) tiene como contenido a una acción del sujeto.

La importancia de esta clasificación radica en que el significado en educación matemática, esto es, el significado que tiene una o un estudiante de un objeto dado en una situación particular, debe buscarse, de acuerdo con Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino y Arrieche (2001), mirando los cuatro tipos de funciones semióticas, junto con la idea de significado institucional y personal de los objetos matemáticos.

[4] Estas funciones las entienden metafóricamente como correspondencias entre conjuntos.

En Godino (2002) se define al significado como *el contenido asignado a una expresión [...] No tiene por qué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo: es sencillamente aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas* (p. 242). Para este autor el significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo que se desarrolle, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional (p. 257). Estos pueden ser: términos, expresiones, gráficos, problemas, acciones del sujeto (aplicación de técnicas, etc.), propiedades, argumentaciones, etc. Es decir, cualquier objeto, técnica o acción es susceptible de construirle significado; idea que amplía su visión con respecto a las tesis sostenidas en sus primeros trabajos sobre el significado.

Para Skemp (1999) *un símbolo es un sonido, o algo visible, conectado mentalmente a una idea. Esta idea es el* ***significado*** *del símbolo. Sin una idea ligada, un símbolo es vacío, carente de significación* (p. 74). Definición que se asocia a las posturas de Saussure y Ogden y Richards, por ejemplo (ver el *triángulo semiótico de Ogden y Richards*). El trabajo de Skemp se inscribe en la corriente psicologista de la Educación Matemática, enfoque en el que se prioriza a la psicología como fuente teórica y experimental para la Educación Matemática. Skemp (1999) expone como ejemplo el término *campo*; este puede evocar conceptos (significados) diferentes, para un granjero, deportista, matemático o para un físico (p. 79). También, la palabra *línea* se usa comúnmente con, al menos, tres significados diferentes: (a) una recta de longitud indeterminada, prolongándose indefinidamente en ambas direcciones, (b) una que parte de un punto dado y se extiende indefinidamente en un sentido y (c) una de longitud finita, limitada por dos puntos (pp. 81-82).

Más adelante (pp. 82-83), Skemp sostiene que un símbolo debería tener asociado un solo significado, o bien, que a varios símbolos le puede corresponder un mismo significado. Pero considera que no debería pasar que a un mismo símbolo le correspondan varios significados (ver Figura 1). Esta idea de Skemp recuerda hasta cierto punto los planteamientos del primer Wittgenstein (2003) sobre la posibilidad de establecer una biyección *lenguaje-objetos y hechos del mundo* basado en la función descriptiva y representativa del lenguaje natural. No obstante, el hecho de asociar un símbolo a varios conceptos o significados es común tanto en el lenguaje natural como en el matemático.

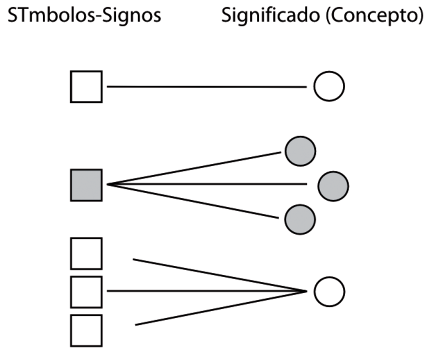



*Figura 1. La asociación símbolo-significado en Skemp (1999). Adaptado de Skemp (1999). En la enseñanza/aprendizaje de la matemática no debería pasar, según Skemp, el caso marcado en gris, es decir, que a un símbolo se le asocien varios significados o conceptos*

Por ejemplo, en una misma situación de clase los participantes pueden usar el término *grupo* con dos significados distintos: como reunión de personas y como estructura algebraica. Situaciones como ésta son muy comunes en la práctica. También, términos matemáticos como *adición* refieren, en geometría lineal, a significados distintos, esto es, se usa el símbolo + en una misma expresión y sin embargo significan operaciones distintas; o bien, en expresiones como $f(a+b)=f(a)+f(b)$ en el álgebra de funciones, etc.

Las posiciones de Godino y Batanero (1994, 1998), Godino (2002), Skemp (1999) y Beyer (1999) dan una especial importancia al contexto en la significación, en la construcción de significados en Educación Matemática. El trabajo de Bishop (1999) desarrolla esta idea: en *Enculturación matemática*, concibe a la educación matemática mucho más allá de la enseñanza de algoritmos (lo cual guarda relación, como dijimos, con el paradigma del ejercicio) y la centra más bien en la comprensión, en formas de conocer. Para Bishop la educación matemática es un proceso social, *esta afirmación parece trivial pero [...] la naturaleza social, humana y esencialmente interpersonal de la educación se suele ignorar por las prisas en adquirir técnicas matemáticas y por el deseo de lograr una educación matemática <<eficiente>>* (p. 31). En este marco teórico, Bishop sostiene que el significado se logra estableciendo conexiones entre la idea matemática concreta que se discute y el restante conocimiento personal del individuo. Para este autor, una nueva idea es significativa si el individuo la puede conectar con su conocimiento previo (p. 190). Bishop agrega que el significado *se logra de una manera personal y es una respuesta <<integradora>> del alumno a un fenómeno nuevo y potencialmente perturbador de su entorno* (Ibíd.).

Así, enfoques culturales de la Educación Matemática como el de Bishop (1999); el de Godino y Batanero (1994, 1998) y Alson (2000), cercanos a la Didáctica Fundamental y a los planteamientos de Brousseau (1986), el de Skemp (1999) en el marco de una Educación Matemática apoyada básicamente en la psicología, y el de Orton (1996), colocan al significado en una posición importante al estudiar los procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática. La posición que toman con respecto a lo que es y cómo se construye o *transmite* el significado, como vimos, es distinta. Somos más cercanos a la posición de Bishop (1999), en tanto que explicita el papel del contexto en la manera como se construyen significados al estudiar ideas matemáticas, tal como hizo el segundo Wittgenstein al hablar del lenguaje natural.

Para Bishop (1999), por ejemplo, contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, son las actividades a través de las cuales el sujeto se relaciona con su entorno cultural; el significado de estas actividades se encuentra en la forma en que se dan las relaciones sociales. Ciertamente el significado es algo personal, pero se relacionan con otras ideas y con el entorno; su construcción se realiza socialmente (p. 192). Este punto es importante, pues a nuestra manera de ver, en algunas de las otras perspectivas teóricas en Educación Matemática el significado es estudiado atendiendo solamente a cierta concepción de la matemática, y no, a las y los estudiantes (o a un grupo) en un contexto. Esto se puede comparar a la forma de pensar del primer y segundo Wittgenstein al estudiar el lenguaje natural o materno: en el primer Wittgenstein, se quiere desvelar su estructura lógica;[5] en cambio, en el segundo, se piensa en el uso del lenguaje.

---

[5] Así como advertir de los malentendidos en que se puede incurrir al fi losofar. El *Tractatus logico philosophicus* busca, como hemos señalado, trazar un límite al pensamiento, que, en palabras de Wittgenstein, únicamente puede trazarse en el lenguaje.

Por ejemplo, Voigt (1995), investigador perteneciente al programa de investigación en Educación Matemática denominado interaccionismo simbólico,[6] entiende al significado compartido por un grupo no como la intersección (en términos de la teoría de conjuntos) de lo que cada miembro del grupo comprende, éste más bien se refiere a una interpretación de la que quizás no sean conscientes, pero que les permite interactuar y hacer predicciones acertadas sobre las acciones de los demás miembros del grupo. Se actúa como si se estuviera pensando de manera similar, aunque Voigt advierte que se pueden considerar varias interpretaciones; de hecho, en el interaccionismo todo objeto o evento de la interacción humana es plurisemántico. La posición de Voigt, así como la del interaccionismo simbólico, concuerda con una visión sociocultural del conocimiento matemático, tal como ha enfatizado Bishop, por ejemplo. Además, esta perspectiva es cercana a los planteamientos filosóficos del segundo Wittgenstein.

En *Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics* (Voigt, 1994) sostiene que *el significado matemático se toma como un producto de procesos sociales, en particular como un producto de las interacciones sociales* (p. 276). En un sentido similar, Radford (2000) sostiene que los signos tienen un doble filo, o una doble vida: por una parte, son como herramientas para la cognición, y por otra, trascienden al individuo y le proveen de medios sociales de interacción semiótica.

Entonces, tal como lo hace ver Beyer (1999) *un acercamiento al estudio de la problemática del significado [en el campo de la Educación Matemática] puede ser hecho mediante el supuesto de* ***negar la existencia de significados absolutos*** *y que éstos dependan de la representación particular que se emplee* (p. 11). He allí la importancia de considerar al contexto y al uso que las y los estudiantes, la y el profesor, los textos y el grupo, hacen de los objetos y técnicas de la matemática escolar. La suposición contraria, esto es, considerar que el significado de los objetos en Educación Matemática no es otro que el que se da a éstos en alguno de los *edificios matemáticos*, conlleva a obviar el problema del significado en los procesos de enseñanza/

---

[6] **Perspectiva que tiene raíces en el *interaccionismo simbólico* de Mead (1932) y de su discípulo Blumer (1969).**

aprendizaje de la matemática, y restringiría su interpretación teórica y desde la práctica. Una educación así, se apoya en *transmitir* el significado que se le da a los objetos matemáticos en el seno de las teorías matemáticas. Se asumiría entonces que el significado está dado por la definición del objeto, o bien, por medio de una demostración. Otras interpretaciones del estudiantado serían entendidas como *errores*. Es una educación en la que se habla, tal como lo expresa Brousseau al describir los posibles efectos de la transposición didáctica, de un *conocimiento verdaderamente matemático*, es decir, encerrado en el edificio en que se han estructurado las matemáticas.

Nuestra visión, creemos, toma en cuenta otros aspectos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. ¿Qué es el conocimiento verdadero? y ¿qué es un conocimiento verdaderamente matemático?, son cuestiones que escapan del alcance de esta investigación, incluso, el análisis de si tiene sentido o no plantearlas. Consideramos que *¿Qué es el conocimiento matemático?* o *¿En qué consiste el conocimiento matemático?* deben responderse atendiendo al papel social y político que debe desempeñar la educación y la educación matemática en particular. En esta perspectiva, es importante considerar el papel del diálogo en el aprendizaje y en la construcción de significados, tal como se ha hecho en trabajos como Zack y Graves (2001) y Valero (1999), así como el importante rol que tiene la forma como se asuma la comunicación y el lenguaje en el aula de matemáticas [ver Serrano W. (2005a)].

## ¿CÓMO ENTENDEMOS AL SIGNIFICADO?

Entendemos que **el significado de un objeto matemático (como el punto, recta, conjunto, algoritmo, etc.) o de una actividad relacionada con la matemática escolar (como explicar, definir, probar, dar contraejemplos, etc.) está dado por el uso que de ese objeto se haga y, por otra parte, por la explicación que se dé del objeto**.

En esta manera de ver al significado se toma en cuenta que no sólo a objetos como punto, recta, etc., se les construye significado en un grupo, sino que también a las actividades (matemáticas) que median en ello. El estudiantado y la o el profesor en un grupo específico poseen una manera específica de concebir actividades como *explicar*, *probar*, *dar contraejemplos*, etc. Esta manera, naturalmente, se ve influenciada por su participación en otros grupos, tal es el caso de otros cursos en años anteriores, etc., pero el punto que queremos destacar aquí es que los miembros de un grupo van estableciendo sus propias formas de interacción, y entre ellas están las actividades que hemos denominado *relacionadas con la matemática escolar*.

Por otra parte, definir al significado como *el uso que un grupo haga de* junto con *la explicación que se dé de*, marca distancia en relación con las definiciones analíticas del significado en la que se inscriben los aportes de Saussure, y de Ogden y Richards. Nuestra posición se acerca más bien a la concepción pragmática en la que destaca el trabajo del segundo Wittgenstein, que como vimos se aboca al análisis del lenguaje ordinario o materno, no al de la matemática.

En esta investigación desarrollamos, hasta cierto punto, una manera de entender al significado en Educación Matemática cercana a algunos de los planteamientos que hizo Wittgenstein en la segunda etapa de su pensamiento y obra. De hecho, Wittgenstein no estuvo desligado a la matemática; se relacionó con matemáticos como Bertrand Russell y Frege, de quienes el *Tractatus logico-philosophicus* recibe una notable influencia logicista, y también de Brouwer y la corriente intuicionista de la matemática: su obra *Matemáticas sin metafísica* (Wittgenstein, 1981) es un ejemplo de ello. Nuestra manera de pensar se diferencia así de las posiciones teóricas en Educación Matemática que hemos discutido aquí.

El significado como uso y como explicación no es, como en Frege y Carnap, el valor de verdad de cierta proposición ni el poder ser verdadera como expuso Christensen. Ello, como vimos, se basa en pensar en un plano lógico. Esta concepción se basa en el importante papel que tiene la interacción y la actividad que se da en un grupo en la construcción o asociación de significados. Es una posición que se da al considerar al grupo en interacción. Es una posición que parte, tal como lo señala Beyer (1999), de entender que una aproximación al estudio del significado en la educación matemática pasa por negar la existencia de significados absolutos o únicos para los objetos, términos y acciones. Tampoco es correcto, a nuestro modo de ver, asumir una posición en la educación matemática como la que expone Pierce (1974) para el caso de la ciencia, o la de Skemp (1999); posiciones en las que se defiende la tesis de los significados únicos.

Así, la diversidad de significados que tienen las y los estudiantes de un mismo objeto matemático puede ser explicada atendiendo a las componentes uso y explicación que abarca la definición que se ha dado aquí de significado. Definición que, de acuerdo a la posición del autor, aporta mayores elementos de análisis que las definiciones analíticas. Es una definición que, entre otros aspectos, permite mirar reflexivamente la actividad matemática que desarrollan las y los estudiantes junto a la del docente, así como a los textos y a otros grupos; de allí la discusión inicial que hemos hecho sobre la comunicación y el lenguaje en la Educación Matemática.

Hay muchas preguntas que se pueden plantear ante esta manera de definir el significado. Una de ellas es ¿cuál es la relación de este significado con la forma en que se define cierto objeto en el edificio en que se han organizado las matemáticas? Tal como hemos venido argumentando nuestras ideas, este último consiste en una definición o convención en el seno del edificio matemático. En cambio, el primero obedece a la interacción en un grupo, interacción en la que es natural que se discutan las definiciones y convenciones del edificio matemático; se construye socialmente. Ello se puede comparar con la forma en que Godino y Batanero (1994) definen *significado personal*, como asociado a prácticas personales, y no, como entendemos aquí: construido socialmente.

Además, el significado institucional a que refieren estos autores se asocia básicamente al seno de la comunidad de matemáticos; nosotros vemos a la matemática más allá del ámbito de su estructuración formal y lógica, la vemos como una actividad de naturaleza social en tanto que está presente y se ha desarrollado con sus especificidades y convenciones en los distintos grupos sociales y culturales a lo largo de la historia de la humanidad.

De seguidas, discutiremos la noción de *juegos de lenguaje* del segundo Wittgenstein con la intención de desarrollar nuestra concepción del lenguaje y de la comunicación en la Educación Matemática. En esta óptica encuentran explicación algunas de las tesis que hemos discutido aquí sobre el significado, en especial la que lo relaciona con el uso.

## LOS JUEGOS DE LENGUAJE EN WITTGENSTEIN

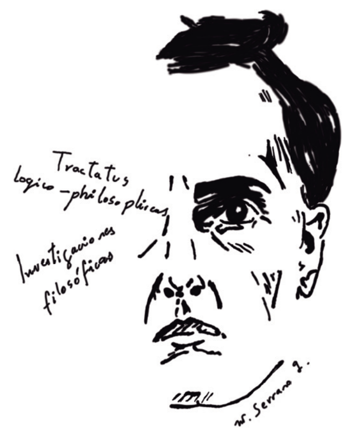
Aquí estudiamos el concepto de *juego de lenguaje* en el segundo Wittgenstein. Este concepto permite entender al lenguaje en un sentido más dinámico que como se hizo en el primer Wittgenstein. De hecho, la manera con que se entiende al lenguaje natural en el primer Wittgenstein, lenguaje en que los significados se explican en un plano lógico y el aprendizaje de este lenguaje se corresponde con una visión restringida de éste [aquí se inscriben también las interpretaciones analíticas del significado –entre las que pueden ubicarse los trabajos de Saussure (1990) y de Ogden y Richards (1946)], guarda cierta relación con algunas posturas teóricas y prácticas en Educación Matemática con respecto a la naturaleza del lenguaje matemático, a la comunicación y al significado. Asumir que los significados de los objetos matemáticos para el estudiantado son precisamente los que estos poseen en el edificio en que se han organizado las matemáticas, puede implicar pasar por alto el estudio del significado que construyen las y los estudiantes en los procesos de enseñanza/aprendizaje de la matemática y la manera en que el significado se da en un grupo. En este sentido, diferenciamos nuestra posición teórica sobre el significado de la que se asume en la Didáctica Fundamental y la que expone Orton (1996), en especial por la idea que allí se sostiene de la *transmisión* de significados y del saber; así como de la posición de Skemp (1999) en la que un símbolo no debería tener varios significados. Somos del criterio, tal como lo expresó Beyer (1999), de *negar la existencia de signifi cados absolutos* en la Educación Matemática, y de considerar al contexto social como una componente importante en la construcción de significados. En esta tarea es precisamente Wittgenstein, desde la filosofía (aunque también ligado al intuicionismo en la matemática), quien ha hecho importantes aportes al estudio de la naturaleza del lenguaje natural y del significado.

Entendemos entonces, al significado como un problema didáctico. Nuestra intención es caracterizar *juegos de lenguaje* o sistemas de comunicación en uso en la Educación Matemática. Concepto a través del cual puede verse al lenguaje matemático más allá de su estructura lógica y considerar el uso que de él se haga en un contexto específico. La naturaleza del significado tendrá entonces una explicación en relación con los juegos de lenguaje, en la manera como se entienda al uso del lenguaje matemático.

## LA NOCIÓN

Ludwig Wittgenstein definió los *juegos de lenguaje* en relación con las funciones que desempeña el lenguaje natural; cada función permite definir un juego de lenguaje. Además, ve al lenguaje como una multitud de juegos de lenguaje. Y concibe los juegos de lenguaje no como partes incompletas del lenguaje, sino como lenguajes completos en sí mismos.

La expresión *lenguaje completo en sí mismo* hace referencia al lenguaje que se usa en cierto contexto o situación. Son completos en el sentido de que constituyen un *sistema de comunicación* (Wittgenstein, 1998, p. 115). En este sentido, la descripción que hace del lenguaje en cuanto conducta humana incluye una característica que le es común: *cierto aire de vaguedad*. Esta última característica es la que lleva a Wittgenstein a describir una variedad de juegos de lenguaje tanto en *Los cuadernos azul y marrón* como en uno de sus trabajos más influyentes en el pensamiento filosófico moderno: *Investigaciones filosóficas*.




Las tesis de Wittgenstein se sustentan en que los signos, palabras y proposiciones propias de un lenguaje (el natural) pueden ser usados de distintas formas por las personas, incluso por una misma persona y en una misma situación comunicativa. Es por ello que ejemplifica una multiplicidad de estos juegos:

Veamos, con los siguientes ejemplos, y con otros, la multiplicidad de los juegos del lenguaje:

*Dar órdenes y obedecerlas.*
*Describir un objeto por su aspecto o tomando sus medidas.*
*Fabricar un objeto mirando su descripción (dibujo).*
*Informar de un acontecimiento.*
*Hacer conjeturas sobre un acontecimiento.*
*Establecer y probar una hipótesis.*
*Mostrar los resultados de un experimento con tablas y diagramas.*
*Inventar una historia, y contarla.*
*Representar un papel en el teatro.*
*Cantar canciones.*
*Acertar enigmas.*
*Hacer un chiste, contarlo.*
*Resolver un problema de aritmética aplicada.*
*Traducir de una lengua a otra [cursivas añadidas].*
*(Wittgenstein, 1963, pp. 11-12).*

Observe que incluye *Establecer y probar hipótesis* y *Resolver un problema de aritmética aplicada*. Aunque en la educación matemática se dan también los que tienen que ver con *Dar órdenes y obedecerlas*, *Informar de un acontecimiento*, etc. Éstas se pueden ver como funciones del lenguaje matemático en un grupo específico; Wittgenstein sostiene, como vimos, que a estas funciones se le asocian ciertos juegos de lenguaje.

En el Cuaderno Azul[7] (Wittgenstein, 1998, p. 44), *los juegos de lenguaje son entendidos como modos de utilizar signos, más sencillos que los modos en que usamos los signos de nuestro altamente complicado lenguaje ordinario [cursivas añadidas]*. Y en el Cuaderno Marrón (ob. cit., p. 115) explica que *consisten en sistemas de comunicación* ***más o menos similares a lo que en el lenguaje ordinario llamamos juegos [cursivas añadidas]***.

---

[7] **Tanto el *Cuaderno Azul* como el *Cuaderno Marrón* fueron preparados por el autor con antelación a sus más conocidas y principales obras *Tractatus Logico-philosophicus* (1922) y *Philosophical investigations* (1953), no publicó los cuadernos -ni les asignó esos nombres-, el primero fue dictado a un curso en Cambridge durante el año 1933-1934, y el segundo fue dictado a dos de sus *discípulos* (Francis Skinner y Alice Ambrose) durante 1934 y 1935. Estas obras tienen infl uencia del *Círculo de Viena* y de lo que se denomina *filosofía analítica*. El mismo Bertrand Russell leyó el Cuaderno Azul y escribió el prólogo del *Tractatus Logico-philosophicus*.**

Estos modos o sistemas de comunicación *más sencillos ¿cumplen su objetivo?*; esto es, ¿constituyen *un* sistema de comunicación? Wittgenstein no los ve como partes incompletas de un lenguaje, sino como lenguajes completos, como sistemas completos de comunicación humana (ob. cit., p. 116). Esta idea es importante.

El autor entiende los ejemplos dados por Wittgenstein como algunas de las funciones que cumple el lenguaje. Planteamos entonces: **¿Son las funciones del lenguaje juegos de lenguaje? El autor no lo ve así: estas funciones están asociadas a juegos de lenguaje. Para cierto tipo de función del lenguaje (si se está interesado en resolver un tipo de problemas de aritmética, por ejemplo) se construye un sistema de comunicación basado en ciertos signos y reglas para usarlos, ello define un juego de lenguaje**. Esta es nuestra posición en este punto.

Por otra parte: ¿qué poseen los juegos de lenguaje que los hace lenguajes en sí mismos? Wittgenstein aporta muchos ejemplos de juegos de lenguaje en su Cuaderno Marrón[8], comienza exponiendo cinco de ellos (ob. cit., pp. 111-115) basados en dar órdenes y obedecerlas y, en describir objetos por su aspecto. El primer ejemplo que da tiene que ver con un juego de lenguaje cuya función es la comunicación entre un albañil y su ayudante. El albañil requiere que su ayudante le traiga ciertos tipos de materiales (piedras cúbicas, losetas, ladrillos, vigas y columnas). El lenguaje consta de las palabras:

*cubo*
*ladrillo*
*loseta*
*viga y*
*columna*

---

[8] Su intención en la obra va más allá de la descripción de juegos de lenguaje, su investigación filosófica parece abordar *malentendidos filosóficos*, en cuanto a conceptos y análisis, motivados en gran parte por el *uso* que se hace del lenguaje. Aborda también -desde la perspectiva de quien esto escribe-problemas concernientes a la significación y la comprensión de signos, palabras y proposiciones, en general, de la comprensión del lenguaje, su aprendizaje, enseñanza y uso.

El albañil pronuncia una de estas palabras y su ayudante le trae el material descrito. Se podría argüir que decir *ladrillo* significa querer decir *tráeme un ladrillo* y además que esto es comprendido por el ayudante, es decir, que ello consiste en un *abuso* del lenguaje; no obstante, si se piensa que las reglas y principios del lenguaje (referidas a sonidos, signo, formas y signifi cado) no son usadas de manera estricta, ni se aprenden de manera estricta, y además que en estas condiciones se sucede la comunicación, entonces no *calificaríamos* de *abuso* este uso del lenguaje.

El albañil puede enseñar a su ayudante a qué objeto se refiere cuando da la orden *viga* o *columna*, por ejemplo, señalando al tiempo el material requerido (de acuerdo con Wittgenstein, 1998). El ayudante aprende así las relaciones palabra-material (palabra-objeto) y puede obedecer al tipo de proposiciones (citadas) enunciadas por el albañil; **el uso media en ese aprendizaje de ese lenguaje.**

En la Educación Matemática podríamos pensar en un juego de lenguaje que conste de las palabras:

*ecuación lineal*
*solución*
*resolver*
*despejar*
*pasar sumando (restando, multiplicando, dividiendo)*[9]

Aquí, el docente o un miembro del grupo pueden representar el objeto al cual se refiere cuando habla de *ecuación lineal* o de *solución de una ecuación lineal*. El grupo se apropia de estas representaciones y usa también estos términos. Con ello van construyendo un sistema de comunicación, sustentado, naturalmente, en el significado que otorgan a estos objetos. Además, incorporan a su sistema de comunicación términos como *resolver*, *pasar sumando*, etc. Este sistema es característico de un grupo en particular, obedece en gran medida a la interacción que se da entre sus miembros.

---

[9] Idea que, como vimos (p. 6), puede constituir un malentendido.

Esto permite suponer lo siguiente (y ello se ilustra en los análisis que hace Wittgenstein en el *Cuaderno Marrón* sobre los juegos que expone): a los juegos de lenguaje se asocian ciertos tipos de enseñanza y aprendizaje. ¿Enseñanza y aprendizaje de qué? Por una parte, esta enseñanza y aprendizaje se refieren:

a. (Naturalmente) al uso del lenguaje.

Y por otra,

b. (Consecuentemente) al *conocimiento* de los objetos tratados.

La afirmación *a* tiene fundamento en la idea de que el uso del lenguaje media sobre el aprendizaje del lenguaje mismo; y la afirmación *b* encuentra fundamento no en la idea de concebir al lenguaje como representación *exacta* del mundo (por ejemplo, como se ve en el primer Wittgenstein), sino en la importancia que tiene el uso del lenguaje en el conocimiento de las cosas (por ejemplo, como lo ilustra Wittgenstein en los Cuadernos Azul y Marrón).

Los juegos de lenguaje y en especial los tipos de enseñanza y aprendizaje asociados pueden ser muy importantes para la actividad en el aula y para la didáctica en general. En ese sentido se escriben las secciones que siguen.

## JUEGOS DE LENGUAJE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Aquí destacan tres preguntas básicas: ¿Por qué hablar de juegos de lenguaje en educación matemática? ¿Qué importancia pueden tener en el análisis de la práctica de aula y en la práctica misma? ¿Cómo afectan los juegos de lenguaje a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática? No se pretende dar respuestas acabadas a estas cuestiones; sin embargo, una idea que puede ser importante al abordarlas es que **un juego de lenguaje caracteriza a un grupo en particular, constituye un sistema de comunicación en uso en un contexto determinado.**

Se espera, por tanto, que grupos distintos posean distintos usos del lenguaje, otorguen funciones particulares al lenguaje y, construyan y asuman significados válidos en ese contexto. Esto contrasta con la idea del *lenguaje universal* de Leibniz y su *entusiasmo* por una *máquina de calcular* que en caso de suscitarse opiniones e interpretaciones distintas de los discursos aportara una única y correcta interpretación (y opinión); lo que supone una *formalización* del lenguaje natural, ya no solamente el de las matemáticas. Un lenguaje universal, en el sentido de Leibniz, o la *formalización del lenguaje* en aula son absurdos si se piensa en la educación en el marco de una institución escolar (e incluso, en el contexto social).

No hay pues una interpretación única de la palabra, proposición y registro del lenguaje (bien sea este natural o matemático). Es una idea sencilla desde el punto de vista de la significación o construcción de significado, pero suscita complejas implicaciones en la construcción del significado en el aula, en la práctica. ¿Cómo enfrentar en el aula fenómenos como *sinonimia*, *ambigüedad* (polisemia y homonimia)? Y en otro plano: ¿cómo construir la *lengua*[10] o *habla* matemática en los estudiantes? Más generalmente: ¿cuál debe ser el enfoque de la educación matemática ante los juegos de lenguaje de los grupos con grandes diferencias (culturales, por ejemplo)? ¿Cómo afrontar desde los juegos de lenguaje las crisis[11] de ese grupo o desde ese grupo? Planteamientos estos que se relacionan con las discusiones sobre el tratamiento de la educación matemática según los contextos socioculturales.[12]

Los juegos de lenguaje abren varios puntos de vista que pueden ser importantes para la interpretación de formulaciones teóricas en Educación Matemática y de la práctica en sí. Pueden ilustrar (a) la extensión y uso del vocabulario matemático, (b) la concepción de la comunicación, (c) forma de intercambio comunicativo entre sus miembros, (d) formas de razonamiento matemático y (e) el mismo concepto de actitud crítica (ver Skovsmose, 1999) que se pudieran manejar-desarrollar. En fin, un grupo

---

[10] Ver Ullmann (1967).
[11] En el sentido que se le da en Skovsmose (1999).
[12] Ver, por ejemplo, Mora (2002) para una discusión sobre ello en el marco de la educación venezolana bajo la perspectiva de la educación crítica.

(aula, escuela, de estudio, etc.) y sus juegos de lenguaje representan bajo esta óptica un objeto de estudio importante para la educación matemática.

La sección que sigue, expone, entre otros, los *casos* del *punto* y del *triángulo*. Esto es, describimos algunas de las situaciones de enseñanza/ aprendizaje de estos conceptos con la intención de mostrar la diversidad de significados que construyen los estudiantes sobre estos objetos. Se destaca aquí el papel del docente y de los textos en la significación y, se da una idea de la variedad de juegos de lenguaje que se dan en la práctica escolar.

## SOBRE LOS SIGNIFICADOS QUE CONSTRUYEN LOS ALUMNOS Y LOS JUEGOS DE LENGUAJE

### A – El punto

Para Euclides, en los *Elementos*, y para los geómetras de su época, un punto *es algo que carece de partes*. Su definición, como en general sucede con los objetos matemáticos, busca desprenderse de las representaciones, tal como observó Beyer (1999). Ciertamente Euclides se apoyó en representaciones como ".", tal como lo hacemos en la Educación Básica hoy en día, pero su definición, en tanto que abstracción de lo que observaba, respondía a ¿qué es realmente un punto?, ¿cuál es el significado de punto? Este contraste con la definición de Euclides y su búsqueda, nos hace observar que los estudiantes de los niveles de Educación Primaria y Media, comúnmente representan puntos (para trazar segmentos, triángulos, etc., gráficos de funciones reales, ...), y sin embargo, su respuesta ante *¿Qué es un punto?* es, en muchos casos, la representación de un punto. Tal vez este hecho se deba a que en la geometría escolar se enfatiza en técnicas como el cálculo de áreas y perímetros y no en la comprensión de los conceptos en sí.

El caso del punto, de los significados que se pueden asociar a este término, es notorio (así como el de otros objetos de la matemática escolar: segmento, recta, círculo, circunferencia, triángulo, etc., número, conjunto, ecuación, solución de una ecuación, raíz de un polinomio, entre otros). Son objetos importantes en el currículo y, no obstante, encuentran variedades de malentendidos entre las y los estudiantes.

Ya hemos observado que, (fundamentalmente) en el contexto de la educación preuniversitaria, una definición, en general, no es suficiente para construir el significado de un objeto. Si el profesor dice a sus estudiantes *el punto es algo que carece de partes* y cree que con ello se asigna *el* significado a *punto*, olvida que otros factores influyen en el significado. El significado no es algo a lo que se llegue a través de una enseñanza y evaluación basada en la repetición de definiciones (y mucho de nuestra educación se caracteriza de ese modo). El repetir una definición, en este contexto, no dice mucho del significado que tiene la y el estudiante del objeto que involucra la definición. Es en el uso y en la explicación que la y el estudiante hacen del objeto que se haya su significado.

Campedelli (1972) en *Fantasía y lógica en la matemática*, comenta, al hablar del concepto abstracto de las figuras geométricas, que

> *Cuando el profesor quería considerar un <<punto>>, iba hacia la pizarra y hacía un pequeño signo con la tiza; punto al que ponía una letra, por ejemplo <<A>>, para indicar que a tal punto le atribuía un nombre: lo llamaba el punto <<A>>. Pero tanto el profesor como los alumnos saben que el punto no es aquel círculo minúsculo trazado sobre la pizarra ni los gránulos que lo constituyen: el punto es algo abstracto, y aquello que sirve para relacionarlo con la idea, a la vez da un burdo modelo concreto (p. 17).*

Coincidimos con Campedelli en que la representación de los objetos matemáticos es importante, de hecho, sustenta la comunicación de ideas matemáticas y al lenguaje matemático. La abstracción está ligada al uso de representaciones.[13] Pero no coincidimos en que en una situación de enseñanza/aprendizaje cualquiera, quede claro, tal como se ha descrito, el significado de punto.

Trabajos como Serrano W. (2005b) dan una idea de esto último al reportar una diversidad de significados para algunos términos geométricos

[13] De hecho, es a través de estas que puede abstraerse un concepto matemático.

en estudiantes de 7º grado de la Educación Básica venezolana. En Serrano W. (2002b) se refiere al significado que para *función*, función *inyectiva*, *sobreyectiva* y *biyectiva*, así como para la construcción del gráfico de $h: R^* \to R$ definida por $h(x) = \frac{sen\, x}{x}$, en un grupo de estudiantes que se inician en la Universidad.

Si se piensa que una definición transmite el significado de un término en el marco de la matemática escolar, ¿qué sucede con los términos no-definidos?, tal es el caso del punto, la recta, y el plano en la geometría euclídea, es decir, en el desarrollo de la geometría estudiada en los *Elementos* (las definiciones de estos objetos, contenidas en los *Elementos*, generaban ambigüedades; ello motivó que éstos se asumieran como términos no-definidos). En Moise y Downs (1986), por ejemplo, se explica que las ideas de punto, recta y plano están sugeridas por objetos reales: *si se hace una marca en una hoja de papel con la punta de un lápiz, se obtendrá una representación bastante fi el de punto. La representación será mejor, cuanto más afilado sea el lápiz* (p. 9). Moise y Downs agregan que un dibujo siempre será aproximado, ya que tendrá un área, y el punto carece de ésta. Las representaciones a que aluden Campedelli (en la pizarra) y Moise y Downs (en una hoja de papel), entre otras (como la que puede hacerse a través de un programa de graficación, etc.), tienen un papel especial en la construcción de significados tanto de términos no-definidos, como *punto* (en la geometría euclídea), como de los términos que sí son definidos.

Ciertos tipos de representación de un objeto, pueden influir en el significado, en el sentido de que se abstraen propiedades que no son propias al objeto. Este tipo de representaciones es llamada por Beyer (1999), *prototípicas*. Aquí, el docente y los textos pueden contribuir o no con el establecimiento de malentendidos, o bien, con la discusión de éstos. Por otra parte, el docente y los textos deben explorar las ideas previas o concepciones que tienen los estudiantes sobre los objetos matemáticos, pues como sabemos, fenómenos como la sinonimia y homonimia, por ejemplo, pueden ser motivo de confusión.

Esta actividad abre espacios para la discusión de ideas matemáticas en el contexto del aula y rompe con el esquema de trabajo exposición-ejercicios que hemos criticado. Manifestar las ideas previas sobre un término matemático es también, motivo para la reflexión y auto-evaluación.

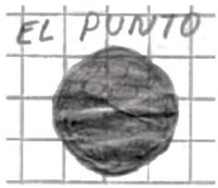
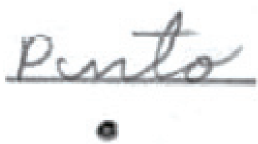
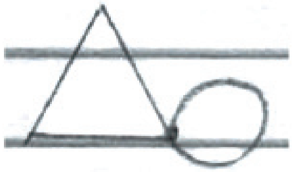
En Serrano W. (2005b) se reporta, a través de un estudio de caso, el significado que tenían los objetos geométricos punto, recta, segmento, circunferencia, círculo, triángulo y cuadrilátero, en un grupo de estudiantes del 7º grado de la Educación Básica venezolana. Las respuestas de las y los estudiantes en relación con *¿Qué es un punto?* se exponen en el siguiente cuadro.[14] En éstas se puede apreciar que algunos estudiantes describieron al punto en un contexto distinto a la matemática, por ejemplo: *Un punto cuando un parrafo se termina se pone un punto (sic)*, o bien *Para mi un punto es un círculo pequeño en negro que se les pone a las letras o cuando termina un párrafo*. Se dan en un marco gramatical, en el seno de la lengua natural. He aquí los malentendidos en los que interviene la homonimia.

En otras de las respuestas se observa la inclusión de características que no son intrínsecas al punto: se da la descripción del punto como *mancha*, *mancha oscura*, de color *negro*, etc. Esto se corresponde con las representaciones prototípicas (Beyer, 1999). Quizás la y el estudiante, partiendo del hecho de que en los textos que ha consultado los puntos siempre son representados en color negro o en un color oscuro, considera que ésta debe ser también una propiedad de los puntos.

---

[14] Se copian textualmente.

*Cuadro 1. Respuestas de los estudiantes ante ¿Qué es un punto?*

| Punto - Descripción de los estudiantes |
|---|
| • Es el eje de la circunferencia.<br>• Un punto cuando un parrafo se termina se pone un punto.<br>• Figura geométrica que puede formar una o más líneas.<br>• Para mi un punto es un círculo pequeño en negro que les pone a las letras o cuando termina un párrafo.<br><br><br>• Es lo que utilizamos para enpesar a escrivir o azer divujo etc.<br>• Es un redondo chiquito.<br>• Es la huella de un punto movil.<br>• Es todo principio de una figura geométrica.<br><br><br>• Es como una mancha minúscula.<br>• Es una mancha oscura, que llamamos punto.<br>• Es como algo que se puede apartar de las cosas.<br>• Es cuando toca una figura geométrica a otra.<br> |

Nota. Tomado de Serrano W. (2005b).

Hay además, respuestas que se encuentran en el plano de la representación, pero que hacen pensar que no se ha dado el paso hacia la abstracción del concepto, tal es el caso de *Es un redondo chiquito*, entre otras. E incluso, representar un punto como en la Figura 3, se corresponde con una representación no-fi el de punto (comparar con el proceso de representación que describen Moise y Downs, 1986, p. 9; en la que una representación más fiel se da cuando el lápiz está más afilado). Idea que no se asocia a un significado apropiado [en la terminología de Alson (2000)] o institucional [de acuerdo con Godino y Batanero (1994)]. En cambio, hay otras muy interesantes desde el punto de vista didáctico y matemático (sin embargo, nuestra posición es que todas estas respuestas son importantes para la educación matemática, en especial para la discusión de las ideas matemáticas que se pueden asociar a ellas). Son ejemplos de ello:

(a) *Es el eje de una circunferencia*,

(b) *Figura geométrica que puede formar una o más líneas*, y

(c) *Es la huella de un punto móvil*.


Destacan, en este sentido, *es como algo que se puede apartar de las cosas*, descripción que recuerda la definición que dio Euclides en sus Elementos; y *Es cuando toca una figura geométrica a otra*, la cual supone un pensamiento abstracto y la capacidad de generalizar la idea de punto.

Como se ve, en un mismo grupo escolar, sus miembros tienen diversos significados para un mismo objeto. Objeto del cual se espera, desde el currículo, que no sea motivo de malentendidos, aún cuando haya sido un tema de intenso debate entre los matemáticos que precedieron y siguieron a los Elementos. Debate que, como observamos, llevó a considerar al punto como un término no-definido en la geometría euclídea. Pero, ¿qué sucede con respecto a un objeto matemático como el triángulo?, objeto del cual puede entenderse *a priori* que no se presta a malentendidos, o bien, por no ser, como el punto, una de las bases o fundamentos de la geometría. La sección que sigue se ocupa de esta discusión.

### B – El triángulo

Como en el caso del punto, aquí también se tiene una diversidad de significados para el término *triángulo*. Aquí es notoria la incidencia de las representaciones prototípicas en el concepto que se forman las y los estudiantes. Beyer (1999, p. 7) da el ejemplo de la forma en que usualmente se representan los triángulos: son representaciones que se corresponden con un triángulo isósceles y además, tienen uno de sus lados paralelo a una horizontal imaginaria (la que define la base del cuaderno o de la pizarra). *Estas características [...] parecen o pudieran ser intrascendentes. No obstante, pueden tener un impacto didáctico inmenso* (p. 7). Son comunes este tipo de representaciones en los textos y en la exposición del profesor. En Moise y Downs (1986), al defi nir los triángulos, se dan los ejemplos de la Figura 4.

Un triángulo es una fugura como una de las siguientes:

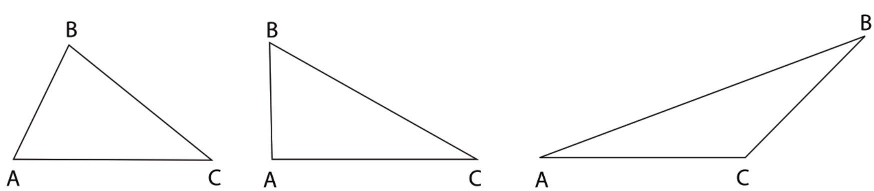



*Figura 4. Ejemplos de triángulos en Moise y Downs (1986, p. 76)*

No son triángulos isósceles, pero todos tienen un lado paralelo a la horizontal imaginaria. De hecho, en su trabajo *Geometría moderna*, todos los ejemplos de triángulos que se dan previo a la definición que se da (en la página 76) tienen esta característica (ver páginas 2, 3, 17, 19 y 63). Solo después es que se estudian problemas en los que se representan triángulos de manera no-prototípica.

En *Matemática, Cuaderno de trabajo 7º*, (Rodríguez, s.f.), en una sección de trabajo basada en la resolución de problemas en los cuales se utilicen relaciones entre los elementos de un triángulo, se dan representaciones de los tipos de triángulos (de acuerdo con la comparación métrica de sus lados y de sus ángulos), así como de la mediatriz, bisectriz, mediana, altura y ángulos adyacentes. En un solo caso se da una representación de triángulo que no tenga un lado paralelo a la horizontal que define la base del texto (ver Figura 5). Es en páginas siguientes (páginas 54 y 63) que no se da esta representación prototípica. Los estudiantes, entonces, basados en estas representaciones construyen significados en los que se suman propiedades que no son propias del objeto, tal como se le entiende en la matemática.

En lo que sigue se ilustra (ver Cuadro 2), como en el caso del punto, la diversidad de significados que pueden construirse al término *triángulo* en un grupo de estudiantes de 7º grado (los datos son tomados de Serrano W., 2005b). Nuestra tesis es que esta situación también se da para otros términos matemáticos y en otros niveles educativos, no solamente en el 7º grado a que hemos hecho referencia. Los malentendidos son parte de la naturaleza de la comunicación y de la comunicación de ideas matemáticas en particular, contrariamente a como pudiera entenderse si se asume una posición teórica que no permita mirar el proceso comunicativo y de aprendizaje del lenguaje matemático en una extensión amplia. Observar e interactuar con un grupo que estudie matemáticas o que tenga que ver con ideas matemáticas puede aportar mucho a la comprensión de estos procesos. La significación, entonces, no es algo que se circunscriba al edificio en que se han estructurado las matemáticas; ésta se da en interacción con un grupo.

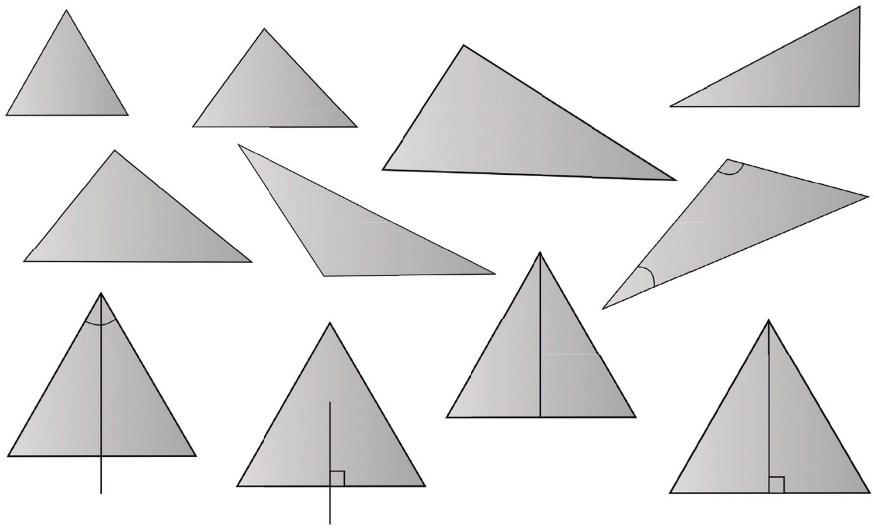


*Figura 5. Representación prototípica de triángulos.*
*Basado en Rodríguez (s.f., p. 53)*

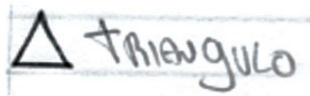
Responder que *es el que tiene tres lados iguales* o *son dos líneas que miden lo mismo y otra que no mide lo mismo*, por ejemplo, no es algo imputable únicamente a estos estudiantes. Como hemos visto,

> (a) las representaciones prototípicas que hacen los profesores y las que se dan en los textos,
>
> (b) asumir que una definición de un objeto *transmite* el significado del término por el cual está; idea que se encuentra ligada a un esquema de trabajo en clase que se sustenta en la exposición-ejercicios –en el *paradigma del ejercicio*,
>
> (c) la manipulación que los estudiantes, y el grupo en general, hacen de estos objetos (o mejor, de sus representaciones) y,
>
> (d) la discusión de las ideas de las y los estudiantes,

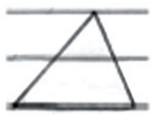
Constituyen algunos de los factores que intervienen en la significación.

***Cuadro 2. Respuestas de los estudiantes ante ¿Qué es un triángulo?***

**Punto - Descripción de los estudiantes**




- Son tres rectas unidas en forma de pirámide.
- Como la misma palabra lo indica significa 3 angulo y es una figura geométrica. Se representa



- Parece como un cuadrado pero a su vez no lo es porque el cuadrado son varias lineas rectas y el triángulo son lineas recta pero hrizontales y verticales. Ejemplo:


- Es una pirámide q´ tiene tres estremos de lineas rectas.
- Es el que tiene tres lados iguales.
- Son dos lineas que miden lo mismo y otra que no mide lo mismo.

- Es una figura que tiene tres angulos.
- Son tres lineas dos entrecruzadas y una recta que se unen y forman un triangulo.
- Son los que están formados por tres lados.

Nota. Tomado de Serrano W. (2005b). Todas las representaciones de los estudiantes se correspondieron con representaciones prototípicas.

## C – El cuadrilátero[15]

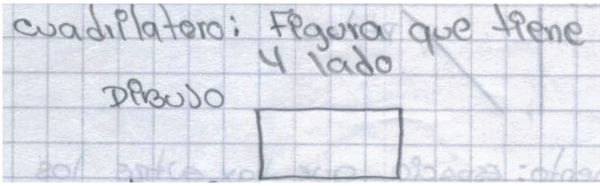



*Figura 6. Representación prototípica de un cuadrilátero.*

La Figura 6 expone una representación prototípica de un cuadrilátero. Observe que, además de tener un lado paralelo a la horizontal que define el cuaderno o la hoja, tiene sus lados paralelos dos a dos. ¿Cómo se salvan estos malentendidos en un grupo escolar? Vemos en la discusión una respuesta a esto. Insistimos en que una definición expuesta por el profesor o la contenida en un libro no garantiza que los estudiantes comprendan el objeto matemático por el cual están. Es por esta razón que hemos criticado a la idea de transmitir significados y a la educación matemática como simple entrega/recepción de información y del saber. La Figura 7 es similar, en este sentido a la 6. Estas representaciones denotan significados no-apropiados para esta figura geométrica. Observe que aunque el niño de la Figura 6 expresó *[es una] figura que tiene cuatro lados*, la representación que hace, aún cuando posea estas características hace pensar en que se incluyen otras propiedades (como las ya indicadas) a la definición de cuadrilátero. Muchas veces, los textos (ver el caso de la Figura 5) y el profesor no ayudan a que este tipo de cosas se discutan en el grupo.

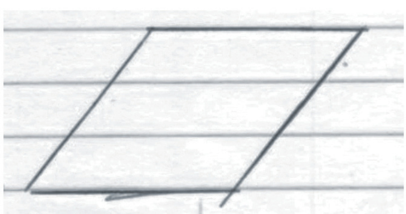


*Figura 7. Representación de un cuadrilátero hecha por un niño.*

[15] Los datos que siguen forman parte del estudio publicado en Serrano W. (2005b), pero no están reportados en él.

Comparemos estas representaciones con las que se hacen en la Figura 8. Aquí el niño expresa que los cuadriláteros *son figuras planas que tienen cuatro lados*. Y es consciente de la existencia de varios tipos, es por ello que hace varias representaciones de estos. Incluye al cuadrado, rectángulo, trapecio, romboide y trapezoide. Pero, incluye también una figura espacial (y no plana),[16] el tetraedro, a la que llama rombo.[17] Sin embargo, es la respuesta más rica en información que se aportó en el grupo. Aquí se ve claramente que la explicación que da una o un estudiante de cierto objeto debe complementarse con el uso que haga de ese objeto, en este caso con las representaciones que ha expuesto.

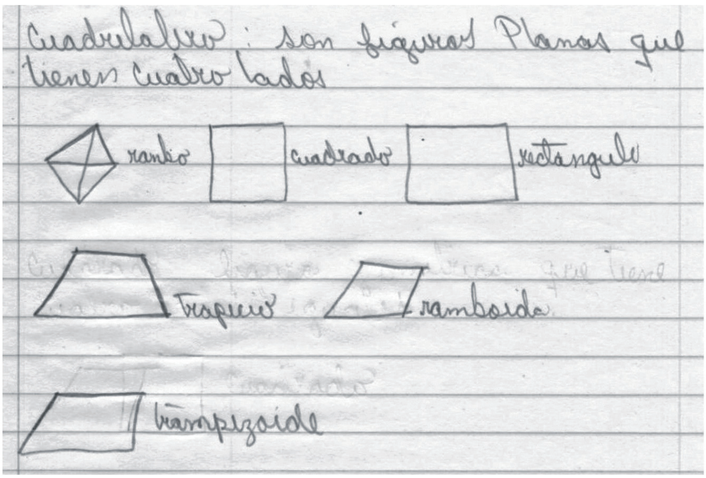



*Figura 8. El cuadrilátero y sus tipos*

Pudiera pensarse en este caso, como en el del triángulo, que son objetos de los cuales no se espera que haya malentendidos, puesto que se estudian desde la primaria o Educación Básica, o porque no se relacionan con un pensamiento matemático avanzado, tal es el caso de nociones como las de límite, derivada, integral, espacio vectorial, espacio afín, etc. Esto es, estos malentendidos, desde esta perspectiva pudieran imputarse a los estudiantes. Nuestra posición aquí no es esta. Creemos que ellos, y en general el significado, obedecen al contexto de la enseñanza-aprendizaje, y, como hemos señalado, a la interacción en un grupo como el del aula.

---

[16] El hecho de que su representación se corresponda con el tetraedro se comprobó a través del intercambio de ideas con el alumno.

[17] Escribe *ranbo*.

## D – El Máximo Común Divisor

Este ejemplo (Serrano W., 2002a, pp. 99-100), se corresponde con la transcripción de parte de las grabaciones magnetofónicas realizadas en varias sesiones de clase del curso *Sistemas Numéricos*,[18] dictado en el Instituto Pedagógico de Miranda, en el marco del estudio del discurso matemático desarrollado en clase, llevado a cabo por el autor. Tiene que ver con el cálculo del máximo común divisor (MCD) de números enteros[19].

> P[20]: Bueno, entonces fíjense este el para el cálculo del máximo común divisor vamos a repetir lo que ya hicimos en los números naturales...
>
> Hay algo nuevo que vamos a tener aquí. Es lo siguiente, que es lo que dice el lema que viene ahí (se refiere a la guía de clase diseñada por él). El lema dos punto dos. Que dice: para cualesquiera pares de enteros a y b no nulos existen x y z tales que el máximo común divisor, o sea aquí lo que voy a tener adicional a lo que ya conocemos de los números naturales es que el máximo común divisor, el máximo común divisor de dos números se puede escribir como combinación de ellos. Es decir, a por x más b por y.
>
> A: (Comentarios generales).
>
> P: A un a x por, a un a por x más un b por y.
>
> A: O sea viene siendo como
>
> P: Se puede escribir como combinación lineal de los dos números.
>
> A: (Una alumna responde a otro). O sea 3 por 2 más 6 por 8.
>
> P: Por ejemplo eel, el que tú tenías: el máximo común divisor de 18 y 24... Me daba 6 ¿no? Pero 6 tú lo puedes escribir como 24 menos 18,
>
> o sea, menos 1 por 18.
>
> A: 24 menos
>
> P: 24 menos 18. Eso lo puedes escribir así...
>
> Este es fácil ¿no?, pero ya vamos a ver vamos a ver un proceso para conseguir ese x y y.

---

[18] Este curso se dicta a estudiantes del profesorado en matemáticas de este Instituto en su tercer semestre, aunque muchos alumnos esperan varios semestres más para cursarlo por vez primera.

[19] El curso versa sobre la *construcción* de los sistemas de Números Naturales, Enteros, Racionales y Reales. Por ejemplo, en los naturales se parte de la axiomática de Peano, los enteros se defi nen vía relaciones de equivalencia y los números reales vía *Cortaduras de Dedekind*. También, se construye el sistema de los Números Complejos.

[20] ***P*** representa al profesor del curso, y ***A*** un(os) alumno(s). En la trascripción se escribió *estee*, por ejemplo, para representar la articulación que se hizo de la palabra *este*. Los puntos suspensivos "..." indican pausa en la emisión de mensajes verbales; en algunos casos se dieron mientras se escribía en la pizarra.

La explicación que hace el profesor del lema referido, la ejemplificación y en particular el cálculo del máximo común divisor de dos o más números enteros, son tres funciones que cumple el lenguaje. Estas se pueden asociar a juegos de lenguaje. Si los signos utilizados y las reglas que le son propias permiten (o incluso, se orientan a) la comunicación en el grupo, entonces ese sistema de comunicación es en sí un juego de lenguaje. En este caso se distinguen los términos:

*Máximo común divisor,*
*Cálculo del máximo común divisor,*
*Combinación de ellos*
*y Entero.*

Naturalmente, el sistema de signos abarca gran número de ellos, no sólo los indicados arriba, pero muchas veces un juego de lenguaje se distingue de otros por los términos que abarca y el uso que se hace de ellos en un determinado contexto. Esta observación, aunque natural, soporta una idea más profunda, ya indicada en la sección anterior: los juegos de lenguaje permiten estructurar formas de enseñanza y aprendizaje matemático.

En el ejemplo D, se observó que la y el docente y las y los estudiantes usaban indistintamente las expresiones:

a. *Combinación lineal de los números...*

b. *Combinación de los números...*

Además de determinar el MCD buscaban expresarlo en función de los enteros dados.

**Cálculo del MCD** de los números ...

*se asocia a*

Juego de Lenguaje

- Uso de términos como *entero, combinación de,* entre otros.
- Técnica o procedimiento para calcular el MCD de ...
- Asociación entre el cálculo del MCD de ... y el hecho de expresarlo como combinación lineal de ...
- Entre otros.

*Figura 9. Sobre el juego de lenguaje asociado al cálculo del MCD de dos o más enteros*

*Todo esto forma parte del juego de lenguaje asociado al cálculo del MCD (Figura 9)*

### E – El procedimiento para calcular el MCD

Por otra parte, el *procedimiento para calcular el MCD* puede también conformar un juego de lenguaje en cierto contexto; esto es, en un grupo en particular. Piénsese por ejemplo en la idea que puede tener un niño del procedimiento para calcular el máximo común divisor (*multiplico entre sí los factores comunes con el menor exponente*) y la idea que puede tener del concepto de máximo común divisor (esto es, aún conociendo el algoritmo para calcular el MCD de dos o más números puede no entender qué propiedad cumple este número en relación con *esos* dos o más números). Esto se puede deber al uso que se ha hecho en la clase (o en otro contexto) del término *máximo común divisor*. Este uso puede que no vaya más allá de efectuar el cálculo del MCD dados ciertos números por la vía de la descomposición de éstos en sus factores primos, para luego aplicar la regla *se toman los factores comunes con su menor exponente*. Puede que no se estudie la misma definición de MCD ni que se estudien otras vías, quizás más ilustrativas, para calcular el MCD.

Por ejemplo, dado el problema:

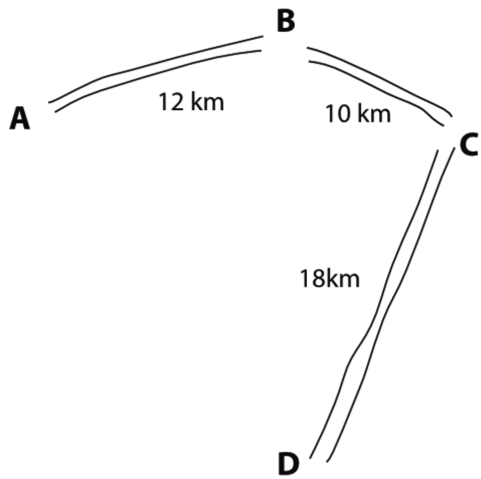



*Figura 10. Distancia entre las ciudades A, B, C y D.*

Debemos disponer unas señales de tránsito entre cuatro ciudades A, B, C y D (ver Figura 10) de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(1) Que quede una señal en cada ciudad.

(2) Que la distancia entre dos señales consecutivas sea

la misma.

(3) Que la distancia entre dos señales sea lo mayor posible.

¿A qué distancia debe colocarse una señal de la que le sigue?

Otra vía de solución consiste en calcular los divisores de 12, 10 y 18: D(12)={1, 2, 3, 4, 6, 12}, D(10)={1, 2, 5, 10} y D(18)={1, 2, 3, 6, 9, 18}. Y compararlos. Es decir, determinar el mayor de los comunes a las tres listas (en este caso es el 2).

### F – Operaciones con expresiones radicales

En una serie de observaciones de aula llevadas a cabo por el autor en un curso de 9º grado del Liceo *Santiago Key Ayala*[21] en octubre de 2000,[22] se registraron hechos como los siguientes: la o el profesor del curso, en el marco del estudio de radicales y operaciones entre ellos, da sugerencias para la solución de los ejemplos y ejercicios que expone como: *lo sacamos en grupos de tres*, *los extremos de la raíz*, *ahí termina el ejercicio*, *¿Cuántas equis tengo arriba?, ¿cuántas abajo? Y entonces, ¿cuántas quedan?*, *el exponente dos y el índice dos se pueden simplificar*, *sale un tres, sale una A y sale una B*, entre otros. Muchos de las y los estudiantes también manejan este vocabulario. Con ello, van construyendo un sistema de comunicación.

Por ejemplo, el profesor aclara que en el tipo de ejercicios que estudiarán (en los que se multiplican expresiones radicales de distinto índice):

> *No podemos hacer la misma gracia: colocábamos una raíz y poníamos todo adentro [se refiere al caso en que se multiplican radicales de igual índice]. Ahora debemos calcular el mínimo común múltiplo de las raíces. Que aquí lo vamos a llamar mínimo común índice.*

En este grupo resultó notorio el hecho de que la y el profesor, y posteriormente algunos de las y los estudiantes, utilizaban comas "," para separar factores en una expresión radical. Por ejemplo, dada la expresión:

$$\sqrt[5]{8H^2I^4}\ \sqrt[4]{32H^3}\ \sqrt{16I}\ \sqrt[6]{64H^4I^3}$$

Luego de calcular el mínimo común múltiplo de los índices, escriben:

$$\sqrt[60]{2^{36}H^{24}I^{48},2^{75}H^{45},2^{120}I^{30},2^{60}H^{40}I^{30}}$$

---

[21] Ubicado en Caracas.

[22] Actividad que forma parte de una investigación más amplia del GIDEM (Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática).

Aquí, el profesor comenta:

> *Voy a colocar las comas. Bueno, esto no se hace, pero lo voy a hacer para diferenciar dónde termina cada uno. Dónde comienza y dónde termina.*

El grupo, además de utilizar un sistema de comunicación, se apropia de formas particulares de enseñaza/aprendizaje. En este caso, cuando se exponía un ejercicio o problema, el profesor hacía preguntas y encomendaba parte de su solución al estudiantado. La parte final de ésta era retomada por el profesor, el cual continuaba haciendo preguntas. Éstas, sin embargo, eran del tipo *¿Estamos?*, *¿Ok?*, *¿Aquí se puede simplificar?*, entre otras; con lo cual, la gama de respuestas de las y los estudiantes era limitada: *Sí*, *Ahh*, *sesenta*, *él no entendió profe*, etc. Además, la forma característica de enseñanza/aprendizaje en este grupo se basó en el desarrollo de ejercicios por parte de las y los estudiantes.

### G – La demostración

Consideremos por caso la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ en un curso de Educación Media, o incluso, por estudiantes de un primer año universitario. Las y los estudiantes pudieran comprender la argumentación y estructura lógica de la prueba; esto es, proceder por reducción al absurdo, suponer que $\sqrt{2 \in Q}$, concluir que $\sqrt{2}$ se puede expresar como $\frac{m}{n}$, y además que puede considerarse, sin pérdida de generalidad, a n m irreducible, manipular la expresión:

$$\sqrt{2 = \frac{m}{n}}$$

y llegar a un absurdo (que $m$ y $n$ tienen un factor en común), contrario a como se había supuesto. Sin embargo, si ven esta prueba como un *ejercicio difícil*, como un ejercicio más, y no el papel de la demostración en este caso y en la matemática, no estarán construyendo el significado apropiado de la demostración. Parece una observación obvia, pero en realidad es algo muy común en la práctica. Es claro que pensar de esta manera guarda relación con una educación matemática signada por el paradigma del ejercicio. Es así como problemas sobre las propiedades de los límites (en el cálculo), de la adición de naturales (en el marco de la construcción axiomática de *N*), de los sistemas de ecuaciones lineales, por sólo poner unos pocos ejemplos, son vistos como ejercicios difíciles, y junto con ello a la *demostración de*.

Si la demostración no se usa como lo que es, el grupo escolar construirá significados alejados de esta noción. Esta tesis se soporta en la manera como entendemos al significado en la Educación Matemática.

Esta discusión nos lleva al terreno de los significados apropiados. Demostrar es concluir lógicamente una propiedad matemática. No se puede hablar de *he demostrado que* $\sqrt{2}$ *es irracional* si lo que se ha hecho es reproducir, sin entender, la demostración que hizo Euclides o el profesor. Se puede reproducir la demostración de la asociatividad de la adición en *N*[23] *de memoria*, sin entenderla; pero, esto no es demostrar. De forma similar puede pensarse en otros casos.

En un grupo la demostración puede jugar papeles muy diferentes. Puede ser la herramienta a través de la cual se construye (o reconstruye) parte de la matemática, y así concluir el valor de verdad de ciertas proposiciones. Por otra parte, se le puede ver, como vimos, como un ejercicio difícil, entre otras. Cuando decimos que *...puede jugar papeles diferentes en un grupo*, es porque se emplea con tales fines por sus miembros. La comunicación se apoya en estos fines.

Si en cierto grupo se dice:

- *¿Cómo sabes que* $\sqrt{2}$ *es irracional?*

- Fíjate bien. Trata de encontrar dos enteros a y b tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$....

- Ya lo he intentado. Sé que $\sqrt{2}$ es un número entre 1 y 2: 1,4142... Pero... Por ejemplo:

[23] En la construcción de N a partir de la axiomática de Peano.

$\frac{3}{2} = 1,5 > \sqrt{2}$, $\frac{4}{3} = 1,\widehat{3} < \sqrt{2}$, $\frac{5}{4} = 1,25 < \sqrt{2}$ Pero, ¿cómo pruebo todos los casos? ¡Son infinitos!

- Si podemos asegurar que en ningún caso $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, entonces $\sqrt{2}$ no es racional, sino irracional.

- ¿Y cómo aseguramos eso?

- Podemos suponer que existen dos enteros a y b, con b distinto de cero, tales que ...

Se advierte que la demostración como medio para convencerse de la validez de $\sqrt{2}$ *es irracional* es un tema central es este grupo. También es fácil encontrar ejemplos donde ello no sea así. Demostrar, pues, adquiere significado en un grupo en particular. Como vemos, **el uso de un sistema de comunicación por parte de un grupo, su juego de lenguaje, incide en la construcción o asociación de significados para los objetos matemáticos, así como para las acciones propias de la actividad matemática**. Esta es una tesis central en nuestra investigación.

Un caso que queremos destacar está relacionado con la proposición:

*Por un punto A exterior a una recta L, pasa una única recta L´ paralela a L.*

En la Geometría Euclídea, como sabemos, este es el Postulado que generó debate e investigación entre los matemáticos hasta la modernidad. Se buscaba una demostración, pues se pensaba que ello podía deducirse de los otros postulados; hecho que no se dio, pero que condujo al nacimiento de otras geometrías ya en los siglos XVIII y XIX.

Convencerse de que dada una recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que es paralela a la primera, en el marco de la Geometría de Euclides, es una tarea que puede estar apoyada de diversas representaciones. Podemos trazar una recta L, un punto A no contenido en L y, tratar de encontrar otra recta L´ que contenga a A y que intercepte a L. La idea que tenemos de recta (*Una longitud sin anchura*, tal como se expresó en los

*Elementos*), las representaciones que hagamos y quizás la intuición, nos convencerán de la verdad de esta proposición. Su *simpleza* llevó a Euclides a considerarlo un Postulado, algo no demostrable; precisamente una de las bases desde las cuales construir el edificio geométrico.

Esta proposición, entonces, puede ser usada en estos términos: estando convencido de ella, de su verdad. Así, un grupo (por ejemplo: uno escolar) puede construir un sistema de comunicación con términos distinguidos como *postulado*, *recta*, *punto*, *paralela*, entre otros. La proposición que discutimos se usa como un postulado, no se discute sobre si en realidad esta puede demostrarse. De esta forma, el grupo construye significados para estos y otros términos.

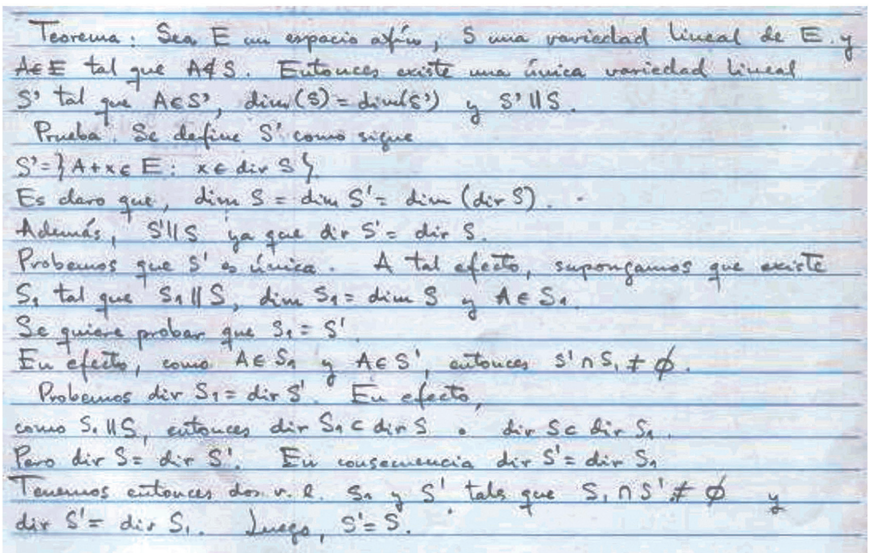

Teorema: Sea $E$ un espacio afín, $S$ una variedad lineal de $E$ y $A \in E$ tal que $A \notin S$. Entonces existe una única variedad lineal $S'$ tal que $A \in S'$, $\dim(S) = \dim(S')$ y $S' \parallel S$.
Prueba: Se define $S'$ como sigue
$S' = \{A + x \in E : x \in \operatorname{dir} S\}$.
Es claro que, $\dim S = \dim S' = \dim(\operatorname{dir} S)$.
Además, $S' \parallel S$ ya que $\operatorname{dir} S' = \operatorname{dir} S$.
Probemos que $S'$ es única. A tal efecto, supongamos que existe $S_1$ tal que $S_1 \parallel S$, $\dim S_1 = \dim S$ y $A \in S_1$.
Se quiere probar que $S_1 = S'$.
En efecto, como $A \in S_1$ y $A \in S'$, entonces $S' \cap S_1 \neq \emptyset$.
Probemos $\operatorname{dir} S_1 = \operatorname{dir} S'$. En efecto,
como $S_1 \parallel S$, entonces $\operatorname{dir} S_1 \subset \operatorname{dir} S$ o $\operatorname{dir} S \subset \operatorname{dir} S_1$.
Pero $\operatorname{dir} S = \operatorname{dir} S'$. En consecuencia $\operatorname{dir} S' = \operatorname{dir} S_1$
Tenemos entonces dos v. l. $S_1$ y $S'$ tales que $S_1 \cap S' \neq \emptyset$ y $\operatorname{dir} S' = \operatorname{dir} S_1$. Luego, $S' = S$.

*Figura 11. De esta demostración se sigue como corolario que* ***Por un punto A exterior a una recta, pasa una única recta paralela a la primera****. Tomado de las notas del autor en un curso de Geometría Lineal*

Un profesor, por ejemplo, puede moverse entre este juego de lenguaje, con sus significados, y un juego de lenguaje en el que *Por un punto A exterior a una recta L, pasa una única recta L´ paralela a L* no es un Postulado, sino un corolario de un Teorema. Ello, naturalmente en el contexto de la construcción algebraica de la geometría de Euclides, o también denominada Geometría Lineal. Así, el profesor de Geometría Euclídea, usa otro sistema de comunicación con los miembros del grupo que estudia Geometría Lineal. Aquí, los postulados ya no son tales. La demostración adquiere un matiz adicional: el de poder demostrar proposiciones que en otra teoría matemática no son demostrables.

Cuando este profesor escribe lo expuesto en la Figura 11, está convenciéndose de la verdad del enunciado del Teorema, y con ello, como Corolario, de la verdad de lo que Euclides llamó V Postulado. En este juego de lenguaje, el grupo ha construido significados para objetos como:

*suma de un punto y un vector,*
*espacio afín, variedad lineal,*
*dimensión, director,*
entre otras.

Además, la demostración tiene, como señalamos, un ingrediente adicional a construir o reconstruir parte de la matemática. Es un medio para sustentar algebraicamente las *cosas* que la Geometría Euclídea no probó, y que, de acuerdo con algunos matemáticos, estaba asociado a cierta vaguedad en las primeras definiciones que se dieron en esta teoría (las de punto, recta, plano, etc.). La demostración pues, adquiere un significado distinto en cada grupo; y ello puede caracterizar ciertos juegos de lenguaje.

### H – La actividad matemática: el caso de los sistemas de ecuaciones lineales

Este caso ilustra que en un juego de lenguaje se construye significado a la actividad matemática en sí, no solo a los objetos matemáticos, tal como hemos señalado antes. Pensemos, por ejemplo en el tema de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales contemplado en el plan de estudios del 2º año del Ciclo Diversificado de nuestra educación. El profesor puede propiciar su estudio, partiendo de la definición de lo que un sistema de tal tipo, algunos ejemplos, y seguir con la caracterización del método de Gauss-Jordan, por ejemplo. Seguidamente, las y los estudiantes deberían ser capaces de resolver algunos problemas que asigne la o el profesor. Como vimos, es una educación matemática *encerrada* en la misma matemática. Utilizamos este término (encerrada), por cuanto creemos que la Educación Matemática tiene objetivos más allá de la construcción (o reconstrucción) formal del edificio matemático, como se plantea desde la Educación Matemática Crítica.[24] En cambio, el profesor junto con los estudiantes pueden buscar, en el marco de la relación *educación matemática-sociedad*, modelar ciertos fenómenos o problemas con base en la matemática. Ello implica una actividad matemática, dentro de la matemática escolar, muy distinta a la que podemos estar acostumbrados, o a la que está signada por el paradigma del ejercicio.

Naturalmente, este tipo de educación matemática acarrea tareas que pueden generar incertidumbre en tanto que involucra que estudiantes y profesor, así como, eventualmente, otros miembros del grupo escolar, *escapen* de la común aplicación de herramientas matemáticas y del abordaje de ejercicios, y se relacionen tanto con la aplicación de la matemática en situaciones del contexto social, como con la construcción de modelos matemáticos que representen ciertos fenómenos de este contexto. Tarea de por sí compleja; pero, son consideradas centrales si se entiende la matemática como una actividad social y cultural. Como puede apreciarse, este marco de ideas no puede ser impuesto por el profesor, sino que debe desarrollarse a través de la interacción del grupo.

---

[24] Ver Skovsmose (1999). En este trabajo se desarrolla una filosofía de la educación matemática en relación con el contexto y las crisis que están presentes en él. Es una perspectiva que hace explícito el rol sociopolítico de la educación, y de la educación matemática en particular. Aquí destaca la discusión de preguntas como: ¿Cuál es el papel de este tipo de educación matemática en la formación del ser crítico o en la ciudadanía?, ¿qué relación guarda con las crisis o conflictos que envuelven o afectan al grupo y, en general, a la sociedad? y ¿qué naturaleza adopta el conocimiento y la actividad matemática escolar? Ver, también, Mora (2002).

**INFORMACIÓN NUTRICIONAL**
Una porción 56g - Porciones por paquete: 4
Cada porción de 56g (1/4 paq.) aporta:

| | | Porcentaje de la recomendación diaria de nutrientes para adultos(*) |
|---|---|---|
| CALORÍAS | 220 | |
| Proteínas (g) | 8 | 7% |
| Grasa Total (g) | 3 | 5% |
| Saturada (g) | 0.5 | 2% |
| Colesterol (g) | 35 | 12% |
| Sodio (mg) | 10 | 0% |
| Carbohidratos (g) | 42g | 14% |
| Fibra Dietaria (g) | 1 | 4% |
| Azúcares (g) | 2 | - |
| Complejo (g) | 39 | - |

(*) De acuerdo a las recomendaciones nutricionales del Instituto Nacional de Nutrición y del F.D.A. de Estados Unidos

*Figura 12. Tabla con información nutricional de un alimento básico*

Así, el grupo puede estudiar problemas relacionados con la cantidad de nutrientes que aportan al cuerpo humano cierta cantidad y combinación de alimentos. En esta tarea, el grupo, organizado en subgrupos, por ejemplo, debe recopilar información y datos sobre el componente nutricional de algunos alimentos (ver, por ejemplo, la tabla expuesta en la Figura 12), escoger y justificar los nutrientes que considerarán en el estudio, investigar las sugerencias que diversos organismos recomiendan para la dieta diaria de las personas, deben discriminar esto según el sexo, edad, etc. Aún cuando aquí estamos aclarando algunas de las actividades a seguir por el grupo, éstas no son asignadas por el profesor; deben nacer de la discusión de cada subgrupo. Pensamos que ello es una característica importante de una educación matemática que busque alcanzar los objetivos que hemos delineado. Además, el grupo, vía aplicaciones o modelación, aborda la solución de un problema cuyo planteamiento se debe, en gran medida, a la actividad grupal y a la discusión.

Así, el método de Gauss-Jordan, por ejemplo, constituye una herramienta en el contexto de esta investigación que ha emprendido el grupo. Entonces, no se estudia el método *centrado en el método*, sino en relación con un problema que puede responder a la necesidad de comprender ciertos fenómenos. Por ejemplo, a través de estas herramientas matemáticas pueden estudiarse problemas como el alcoholismo, la drogadicción y el hábito de fumar (basándose en estadísticas reportadas por los organismos nacionales e internacionales, como la Organización Mundial de la Salud, etc., o bien en estadísticas levantadas por los mismos estudiantes en su comunidad). No es una educación matemática que se vincule con las matemáticas como disciplina, con lo que suele llamarse matemática pura.

Con relación al problema sobre la cantidad de nutrientes que aporta cierta cantidad de alimentos al organismo, un grupo, basándose en la información nutricional de tres alimentos básicos (A, B y C) con respecto a su contenido de grasa, proteínas y carbohidratos y, en la cantidad de ellos que es recomendada para el consumo diario (según cierta edad, sexo, actividad, etc.), puede construir, por ejemplo, el siguiente sistema de ecuaciones:[25]

$$\begin{cases} 0,005x + 0,002y + 0,005z = 51 \\ 0,08x + 0,04y + 0,074z = 77 \\ 0,78x + 0,25y + 0,81z = 33 \end{cases}$$

Cuya solución da respuesta a:

¿Qué cantidad de alimentos A, B y C se deben consumir para que juntos aporten 51 g de grasa, 77 g de proteínas y 33 g de carbohidratos?

La interpretación de su solución y el estudio de la validez de este modelo matemático son dos de los temas importantes para la discusión del grupo. Esto contrasta con una educación en la que se busque que las y los estudiantes resuelvan problemas como:

$$\begin{cases} -x + 4y + z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3z = -1 \end{cases}$$

[25] Aquí el alimento A contiene un aproximado de 0,005 g de grasa, 0,08 g de proteínas y 0,78 g de carbohidratos, etc.

Sin que ello refiera a una situación específica del contexto. Ello describe lo que denominamos educación centrada en el método.

Queremos ilustrar con esto que en la Educación Matemática **se construye significado no sólo a objetos matemáticos como punto, recta, segmento, triángulo, número, mínimo común múltiplo, sistema de ecuaciones, límite, derivada, grupo, espacio vectorial, y a procesos como el cálculo del mínimo común múltiplo, resolución de ecuaciones, etc., sino también a la actividad matemática en sí.** Contar, medir, calcular, representar, estimar y modelar, entre otras, tienen un significado en un grupo en particular.

Por otra parte, si una educación así aborda problemas como los referidos antes (sobre alcoholismo, drogadicción, hábito de fumar, uso de Uranio empobrecido en los conflictos bélicos e invasiones a países, transporte, distribución de gas a las comunidades, acceso a ciertos niveles de la educación pública tanto en nuestro país como en el ámbito internacional, entre otros), haría explícito el papel social y político que se le plantea desde la Educación Matemática Crítica. Sin embargo, como sabemos, en la práctica se desarrolla también una educación matemática asociada a otras perspectivas teóricas que se diferencian en la manera como se entiende a la educación en sí, a la actividad matemática, al conocimiento y al papel de la matemática y de la misma educación matemática en la sociedad.

Esta discusión sobre la actividad matemática y los significados distintos que adquiere en diferentes grupos nos recuerda el planteamiento de Wittgenstein (2002) sobre los juegos de lenguaje entre un albañil y su ayudante. El albañil y su ayudante no sólo construyen significado a órdenes como *ladrillo, viga*, etc., sino que las asocian a ciertas acciones; en este caso, con *buscar y llevar ladrillos*, etc. Esto es, los juegos de lenguaje se asocian a acciones.

Es claro que, de acuerdo con lo que hemos discutido, éstas adquieren un significado característico en cada grupo. Ello puede parecer de Perogrullo, pero comporta una educación matemática distinta: compare el caso en que contar, medir, calcular, representar, estimar y modelar, entre otras, se dan *intramatemáticamente*, es decir, en el seno de lo que denominamos edificio matemático, con el caso en que estas acciones o actividades se dan en el marco de una investigación y en relación con el contexto sociocultural.

Desde esta óptica podemos preguntarnos: ¿qué papel se otorga a la actividad matemática en una educación matemática que concibe a la comunicación en clase como entrega/recepción de información y del saber? Como sabemos, es muy común que siguiendo esta idea la clase de matemáticas siga el esquema exposición-ejercicios. Sin embargo, la actividad del estudiante se restringe a tomar apuntes, responder a las preguntas que plantee la o el profesor y resolver los ejercicios que le sean asignados. La o el docente busca aquí, *desarrollar el pensamiento matemático* separándose de actividades que son naturales a la matemática como:

*contar,*
*medir,*
*calcular,*
*modelar,*
*entre otras.*

las cuales se pueden dar, no intramatemáticamente, sino en relación estrecha con el contexto sociocultural. Es por esta razón que en nuestro análisis del significado y de los juegos de lenguaje en Educación Matemática, hemos dejado ver la posición que seguimos en torno a lo que es la educación y la educación matemática, así como la concepción que tenemos del lenguaje y de la comunicación.

Entonces, los juegos de lenguaje son a la vez reflejo de la educación matemática que se desarrolla en un grupo y, en cierto modo, una directriz para una educación matemática, para un tipo de educación matemática. La primera aseveración tiene que ver con que en el lenguaje y la comunicación de un grupo se pueden observar las formas de enseñanza/aprendizaje que le son características y cómo usan las ideas matemáticas (ver también, los ejemplos A, B, D, E y G antes expuestos). La segunda, se corresponde con la tesis de que el lenguaje, en nuestro caso el lenguaje matemático, es una especie de lente a través del cual se interpreta al mundo. Es por ello que empleamos la expresión *directriz para una educación matemática*.

## A MANERA DE CONCLUSIÓN

- El *significado* es una noción básica para la Educación Matemática, tanto como *enseñanza/aprendizaje*, *pensamiento* y *acción*. Estudiar su naturaleza pasa por entender que no existen significados únicos o absolutos, o que éstos estén dados *a priori* por la representación que se haga. ¿Qué es el significado? Nuestra posición aquí es que, identificarlo con la verdad de una proposición, con la posibilidad de que ésta sea verdadera, con el objeto en sí, o con la representación del objeto (con lo que está por el objeto), no toma en cuenta la incidencia que de hecho tiene el contexto en la asociación o construcción de significados. En la educación matemática es común que se entienda al significado en un plano lógico, esto es, en el marco del edificio en que se han organizado las matemáticas.

- El significado no es algo que se asocie o construya únicamente para términos o proposiciones, sino que se asocia o construye también para las acciones y procesos que realiza el grupo, a la aplicación de algoritmos, a la explicación, discusión, etc., y a contar, medir, modelar, entre otras.

- Entendemos entonces al significado de un objeto matemático o de una actividad relacionada con la matemática escolar **como dado por el uso que de este objeto o actividad se haga y por la explicación que se dé de estos**. Entender los *juegos de lenguaje en educación matemática* como sistemas de comunicación en uso en un contexto determinado, por ejemplo, los expuestos en los *casos* del punto, triángulo, demostración, operaciones con radicales y sistemas de ecuaciones lineales, permite entender al lenguaje matemático en un sentido más dinámico, lo cual creemos es la justa dimensión en que debe estudiarse. Posición que toma en cuenta al contexto social como una componente importante en la construcción o asociación de significados y destaca a la comunicación como un proceso central en la interacción grupal.

- Grupos distintos poseen distintos juegos de lenguaje, éstos se pueden asociar a las funciones del lenguaje matemático. Además, a los juegos de lenguaje se relacionan ciertos tipos de enseñanza/aprendizaje, tanto del lenguaje en sí como de los objetos matemáticos tratados.

- Los significados reportados en esta investigación (para los objetos *punto*, *triángulo*, *cuadrilátero*, *máximo común divisor*, así como para la *demostración*, la *actividad matemática*, entre otros) muestra, por una parte, la diversidad de significados que puede encontrarse en grupos que estudian ideas matemáticas, y por otra, se advierte que éstos se dan en correspondencia con los juegos de lenguaje que desarrolla el grupo.

- Más aún, los juegos de lenguaje son, a la vez, reflejo de la educación matemática que se lleva a cabo en un grupo y una directriz u orientación para la misma educación matemática. De hecho, en la comunicación y en el lenguaje descansa, en gran medida, la educación.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA


**Alson, P**. 2000. *Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques*. [Tesis doctoral: L´Universite Bordeaux 1, Ecole Doctorale de Mathèmathiques-Informatique] Francia.

**Beyer, W.** 1994. *El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula*. [Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas] Caracas.

**Beyer, W**. 1999. El significado en matemática: un problema didáctico. *Enseñanza de la matemática*, 8(1), 3-13.

**Bishop, A**. 1999. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

**Blumer, H**. 1969. *Symbolic interactionism: Perspective and method*. NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

**Brousseau, G**. 1986. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

**Carnap, R**. 1965. La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje. En: A. Ayer (Comp.). *El positivismo lógico* (pp. 66-87). México: Fondo de Cultura Económica.

**Christensen, N**. 1968. *Sobre la naturaleza del significado*. Barcelona: Labor.

**Christiansen, I**. 1997. When negotiation of meaning is also negotiation of task. *Educational Studies in Mathematics*, 34(1), 1-25.

**Cobb, P. y Bauersfeld, H**. (Eds.) 1995. *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. NJ: Lawrence Erlbaum.

**Doerr, H. y Zangor, R**. 2000. Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 143-163.

**Filloy, E**. 1999. *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.

**Frege, G**. 1974. *Escritos lógico-semánticos*. Madrid: Tecnos.

**Freire, P**. 1969. *La educación como práctica de la libertad*. México: Siglo Veintiuno.

**Freire, P**. 1970. *Pedagogía del oprimido*. México: Siglo Veintiuno Editores.

**Godino, J**. 2002. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.

**Godino, J. y Arrieche, M**. 2001. El análisis semiótico como técnica para determinar significados. Comunicación presentada en la Reunión del Grupo DMDC-SIIDM. V Simposio de la SEIEM, Almería, España. [Documento en línea]. Disponible: www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisissemiotico_conjunto s.PDF [Consulta: 2004, Marzo 9].

**Godino, J. y Batanero, C**. 1994. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

**Godino, J. y Batanero, C**. 1998. *Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. [Ponencia presentada en el IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática] Guimaraes, Portugal.

**Hockett, C**. 1958. *A course in modern linguistics*. New York: Macmillan.

**Mead, G**. 1981. *Espíritu, persona y sociedad*. Barcelona: Paidós. Traducido del original en inglés *Mind, self and society* de 1932.

**Moise, E. y Downs, F**. 1986. *Geometría moderna*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

**Mora, D**. 2002. *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Caracas: Universidad Central de Venezuela – Ediciones de la Biblioteca (EBUC).

**Ogden, C. y Richards, A**. 1946. *El significado del significado*. Buenos Aires: Paidós. [Traducido por Eduardo Prieto de la 10ª ed. en inglés de *The meaning of meaning*, Londres: Rootledge & Kegan Paul].

**Orton, A**. 1996. *Didáctica de las matemáticas* (2ª ed.) Madrid: Morata.

**Pierce, C**. 1974. *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Nueva Visión.

**Pimm, D**. 1995. *Symbols and meaning in school mathematics*. London: Routledge.

**Pimm, D**. 1999. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

**Radford, L**. 2000. Signs and meaning in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.

**Rodríguez, E**. (Dir.) (s.f.). *Matemática. Cuaderno de trabajo 7º*. Caracas: Romor.

**Saussure, F**. 1990. *Curso de lingüística general* (20ª ed.). Buenos Aires: Losada. [Publicado originalmente en francés con el título Cours de linguistique générale, 1916. Traducción de A. Alonso].

**Serrano, W**. 2002a. *El discurso matemático en el aula*. Un análisis desde la observación del curso sistemas numéricos. *Sapiens, Revista Universitaria de Investigación*, 3(1), 81-103.

**Serrano, W**. 2002b. *Concepciones de los estudiantes sobre la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función y la gráfica de h: R* R sen x definida por* $h(x)=\frac{sen\,x}{x}$ [Trabajo no publicado].

**Serrano, W**. 2004a. Algunos malentendidos y errores en educación matemática. [Ponencia presentada en el II Simposio Venezolano de Investigación en Educación Matemática y 6ta Sesión del Seminario Nacional Permanente de Enseñanza de la Matemática, Universidad Nacional Abierta] Caracas.

**Serrano, W**. 2004b. El discurso matemático en el aula. En D. Mora (Ed.), A. Rivera, E. Reverand, W. Beyer, W. Serrano, O. Brito, y C. Torres, *Tópicos en educación matemática* (pp. 203-228). Caracas: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM).

**Serrano, W**. 2004c. *Elementos de álgebra: unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez"*, [Trabajo de grado de Maestría no publicado] Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Caracas.

**Serrano, W**. 2005a. Juegos de lenguaje en educación matemática. [Trabajo de ascenso no publicado] Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Miranda.

**Serrano, W**. 2005b. *El significado de objetos en el aula de matemáticas. Revista de Pedagogía*, 75, 131-164.

**Serrano, W**. 2005c. *¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático? Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 6(1), 47-59.

**Skemp, R**. 1999. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (3ª ed.). Madrid: Morata.

**Skovsmose, O**. 1999. *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente. [Traducción al español por Paola Valero del original en inglés *Towards a philosophy of critical mathematics education*, 1994, Kluwer Academic Publishers B.V.]

**Skovsmose, O**. 2000. *Escenarios de investigación. Revista EMA*, 6(1), 3-26.

**Ullmann, S**. 1967. *Semántica. Introducción a la ciencia del significado* (2ª ed.). Madrid: Aguilar. [publicado originalmente en inglés con el título *Semantics, an introduction to the science of meaning* por Basil Blackwell and Mott Limited, Oxford, 1962].

**Valero, P**. 1999. *Deliberative mathematics education for social democratisation in Latin America*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1, 20-26.

**Voigt, J**. 1994. *Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

**Voigt, J**. 1995. Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En: P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.) *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. NJ: Lawrence Erlbaum.

**Winsl w, C**. 2003. Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 271-288.

**Wittgenstein, L**. 1963. *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell.

**Wittgenstein, L**. 1981. *Matemáticas sin metafísica*. Caracas: Ediciones de la Biblioteca de la Universidad Central de Venezuela.

**Wittgenstein, L**. 1988. *Sobre la certeza*. Barcelona: Gedisa. [Traducción del original en alemán *Über gewissheit* por J. Prades y V. Raga, Basil Blackwell, 1969].

**Wittgenstein, L.** 1998. *Los cuadernos azul y marrón* (3ª ed.). Madrid: Tecnos. [Traducción de la segunda edición inglesa de *The Blue and brown books* por F. Gracia, Basil Blackwell & Mott].

**Wittgenstein, L**. 2002. *Investigaciones filosóficas* (2ª ed.). Barcelona: Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM / Crítica.

**Wittgenstein, L.** 2003. *Tractatus logico-philosophicus* (2a ed.). Madrid: Tecnos.

**Zack, V. y Graves, B**. 2001. *Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird". Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), 229-271.

# EL LABERINTO DEL SIGNIFICADO: LA COMUNICACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

*Dr. Walter O. Beyer K.*
*Profesor de la Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática, IPC-UPEL y del Doctorado en Educación, UCV.*

## INTRODUCCIÓN

Freudenthal, hace ya más de veinte años, *consideraba importante abordar la relación entre matemáticas y lenguaje sin presuponer ningún tipo de primacía de lo uno sobre lo otro, al subrayar que se desconocía qué había inventado primero el hombre, si la escritura o la aritmética.* (Filloy, 1999, p. 57) De hecho, Freudenthal en su libro *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas* estudia la caracterización del **lenguaje algebraico.**

Esta relación entre matemática y lenguaje es de vital importancia y es un elemento indisolublemente ligado al **acto didáctico**.

No obstante el punto anterior merece varias aclaratorias. Presupone, entre otras cosas, una conceptuación de lo que es la matemática y de lo que es su lenguaje; supone definir o al menos describir las complejas relaciones entre matemática y lenguaje así como entre pensamiento y lenguaje. Y más allá, en el trasfondo, subyace otro concepto difícil de tratar: el de significado.

En lo que sigue discutiremos esta problemática, y más que proporcionar respuestas abordaremos y abriremos el debate sobre esta temática a fin de sensibilizar acerca de su complejidad; así como también queremos mostrar, por un lado, diversas concepciones que se manejan sobre el tema; y por el otro, ilustrar con ejemplos palpables la importancia de su consideración y estudio por parte de la didáctica de las matemáticas. En medio de esto, el autor, pretende dar un pequeño aporte mostrando su posición personal en torno a los diversos y polémicos aspectos tratados, así como presentar algunos ejemplos tomados de transcripciones de la comunicación oral de clases observadas, extractos de libros y de exámenes los cuales reflejen la presencia de algunos de los elementos aludidos en este capítulo.

En lo que se refiere a qué es la matemática podemos encontrar variadas concepciones, las cuales van desde la clásica definición aristotélica según la cual la matemática se remite a ser el estudio de la cantidad; pasando por la concepción bourbakista de considerarla el estudio de las estructuras, hasta llegar a la visión de Steen enmarcada en el estudio de los patrones. Pero, también, están aquellas concepciones que la asumen sólo como un lenguaje.

Además de lo antes señalado, podemos encontrar consideraciones acerca de la matemática como las de Luca Pacioli, Galileo, Pierce, Russell, etc.

Luca Pacioli (1445-1514) respecto de lo que debe entenderse por los vocablos *matemático* y *disciplinas matemáticas*, señala:

> *Este vocablo, Excelso Duque, es griego, derivado de la palabra que en nuestra lengua significa disciplinable; y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de éstas. Sin embargo, comúnmente, los sabios consideran como tales a las cuatro primeras, es decir, la aritmética, geometría, astronomía y música, llamando a las demás subalternas, es decir, dependientes de estas cuatro. Así lo quieren Platón y Aristóteles, Isidoro en sus Etimologías y Severino Boecio en su Aritmética...*

Galilei, en *El Ensayador*, 1610, afirma que

> *La filosofía [la naturaleza] está escrita en ese gran libro que tenemos siempre delante de nuestros ojos -quiero decir el universo- pero no podemos entenderla si primero no aprendemos el lenguaje y captamos los símbolos con los que está escrita. El libro está escrito en el lenguaje matemático y los símbolos son los triángulos, los círculos y otras figuras sin cuya ayuda es imposible entender una sola palabra sin la que caminamos errantes por un oscuro laberinto. (Dudley, 1993 , p. 157)*

A su vez,

> *Según otro punto de vista, especialmente sostenido por John Stuart Mill,* ***la matemática es en sí misma una ciencia empírica****, que difiere de las demás ramas, como la astronomía,*

*la física, la química, etc., principalmente en dos aspectos: su tema es más general que el de cualquier otro campo de la investigación científica y sus proposiciones han sido contrastadas y confirmadas en mayor medida que las de las partes más firmemente establecidas de la astronomía o de la física [negrillas añadidas]. (Hempel, 1976, p. 8)*

Como vemos existen muy diversas conceptuaciones de la matemática. Hemos presentado algunas para que se note lo difícil que resulta conceptuar esta disciplina y con cuanta facilidad mencionamos comúnmente la palabra matemática sin percatarnos de la carga semántica profunda que engloba dicho vocablo.

Pasemos a otro asunto: el aula de matemáticas.

Dado que nuestro interés se centrará en el aula de matemáticas, hemos de modelarla a fin de poder proceder a estudiar la problemática de la comunicación en ella, y en particular los aspectos vinculados al significado.

Adoptaremos, a los fines de nuestro análisis, una visión del aula de corte sistémico. Los **actos didácticos** circunscritos al ámbito del **aula** se producen alrededor de tres elementos fundamentales que conforman el sistema **didáctico**; éstos son: la y el **estudiante**, la y el **docente** y el **saber**. En este último elemento la corriente llamada Didáctica Fundamental suele diferenciar entre el **saber sabio** y el **saber enseñado**, los cuales relacionan a través de la **transposición didáctica**.

No obstante, vale la pena realizar aquí varias acotaciones. Por una parte, que esta manera de conceptuar el aula no es nueva ni tampoco privilegio único de la Didáctica Fundamental, como equivocadamente algunas veces se piensa. Stöcker[1] (1964) señala al respecto, refiriéndose a la estructura de la enseñanza, que *como **esquema** de esta situación se considera tradicionalmente el **triángulo didáctico***. (p. 21) De seguidas este autor formula una crítica a este esquema, señalando que,

[1] Es de hacer notar que la cita es tomada de la traducción al español proveniente de la 5ª edición alemana.

> *La forma básica del triángulo didáctico* ***se considera*** *desde hace mucho como andamio metodológico de la enseñanza escolar y* ***evidentemente ninguna didáctica puede prescindir de ella.*** *Pero ¿aún puede tener vigencia según nuestra concepción moderna? Tenemos que expresar nuestras dudas, por dos razones [negrillas añadidas]. (p. 21)*

Una de las razones esgrimida por Stöcker es, el que *el enunciado sobre el peso de los distintos factores, sobre su contenido y función, es insuficiente. Pues según la acentuación de los factores cambia fundamentalmente el sentido del proceso didáctico.* (Ibíd.)

También hay que acotar que el esquema como era planteado para ese momento era una representación del modelo tradicional de enseñanza/aprendizaje, en el cual las funciones del estudiante y del maestro estaban preestablecidas y eran rígidas: el maestro quien enseña la materia al estudiante; y éste como receptor quien aprende dicha materia a través del maestro.

La segunda objeción tiene que ver con la primera. *El triángulo didáctico no concuerda con los hechos en cuanto a la buena enseñanza escolar se refiere, por que ésta, al menos en sus formas elevadas y finales, aspira a lograr el encuentro directo del niño y la materia formativa*. (Ibid.)

Estos puntos, pensamos, no deslegitiman el esquema, por cuanto en trabajos como los de Charnay (1994) son tomados en cuenta. En lo que concierne al peso relativo que ejerce cada uno de los tres elementos constituyentes del triángulo didáctico se originan tres modelos: **normativo** (centrado en el contenido), **incitativo** (centrado en el estudiante) y **aproximativo** (centrado en la construcción del saber por el estudiante).

Cada uno de estos modelos está centrado en uno de los polos del triángulo didáctico e involucra un tipo determinado de relaciones entre éstos. Charnay con ello pareciera responder a las dos críticas formuladas por Stöcker.

La crítica del peso relativo de cada componente queda zanjada ya que diferentes pesos originan diferentes modelos.

El primer modelo sería el tradicional, en el cual está pensando Stöcker al mirar el triángulo didáctico. Mientras, el último, el aproximativo, estaría cerca de *la buena enseñanza* a la que alude el didacta alemán.

El asunto entonces pareciera que se convierte en reinterpretar el esquema. De hecho eso es lo que hizo la Didáctica Fundamental.

La novedad de los teóricos de la Didáctica Fundamental estaba en incorporar la teoría de sistemas dentro del esquema trino y además el considerar que su funcionamiento se asemejaba a un juego, en el sentido de la Teoría de Juegos. Todo ello permitía una modelación matemática de dicho sistema y tenía así cabida allí la Teoría de Situaciones Didácticas creada por Brousseau. Asimismo, en el marco de dicha corriente didáctica se crearon diversos constructos, como Contrato Didáctico, Obstáculo, Transposición Didáctica, a los fines de poder explicar el funcionamiento del sistema didáctico, las relaciones entre sus elementos, así como las relaciones con su entorno.

Por otra parte, se le señala -y con razón según nuestro pensar- el insuficiente (¿poco?) peso que le atribuye la Didáctica Fundamental a los factores sociales y extra-áulicos cuando adopta dicho esquema de análisis.

Habría que aclarar, no obstante, dado que algunos críticos llegan a afirmar la ausencia total de nexos entre el sistema didáctico y su entorno en esta teoría, que esto no es cierto. De hecho, Chevallard (2000, p. 28) presenta un esquema en el cual el sistema didáctico está inmerso en el sistema de enseñanza (conjunto de sistemas didácticos) y éste a su vez lo está en un sistema que él denomina **noosfera** y este último lo está en un sistema más amplio que es denominado de manera genérica **entorno**. La noosfera se convierte aquí en un puente entre la sociedad y el sistema didáctico. La noosfera la integran los académicos, los padres, las instancias gubernamentales dedicadas a tomar decisiones sobre el hecho educativo. Además, se reconoce que el sistema didáctico es un sistema abierto.

Chevallard (op. cit.) expresa que *el sistema de enseñanza –la 'miniatura' de la que hablé anteriormente– posee a su vez un entorno, que podemos denominar, si lo deseamos, la sociedad, la sociedad 'laica', por contraste con esa sociedad de expertos que es el sistema de enseñanza/educativo. Ese entorno se caracteriza evidentemente por una estructuración en extremo compleja.* (p. 27)

No cabe duda pues que Chevallard está consciente de la presencia de las influencias sociales y aún más de la complejidad de éstas. Sin embargo, el problema se suscita al empezar su análisis desde la noosfera y en la no explicitación del cómo y del por qué surge ésta, cuáles necesidades de la sociedad obligan a los cambios educativos, la influencia de factores determinantes como los económicos, etc. La conciencia de estas relaciones con la sociedad en su conjunto parecería ser la motivación principal para la elaboración del *Posfacio a la segunda edición*, mediante el cual hace entrar en juego la antropología, abriendo así el camino a la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Chevallard (op. cit.) reduce su explicación de los cambios que se suscitan en el saber a enseñar a que *el saber enseñado se encontraría en desacuerdo con la sociedad en un sentido amplio, aunque, llegado el caso, si se lo juzgara estrictamente según los criterios de la disciplina correspondiente no habría nada que reprocharle. En resumen, una cuestión de época o de estado de ánimo.* (p. 31) Obviamente, es ésta una explicación muy superficial que básicamente no permite comprender las profundas fuerzas sociales que se mueven tras el hecho educativo.

Chevallard (op. cit.) alude que *el desgaste del saber enseñado supone como resultado la incompatibilización del sistema de enseñanza con su entorno.* (p. 31)

También alude este didacta a un saber social que denomina *banalizado* (término que juzgamos poco afortunado). Se pareciera desconocer aquí la producción social del conocimiento en general y del matemático en particular. Se minimiza (¿desconoce?) así la importancia del conocimiento matemático (conocimiento no institucionalizado) que circula en la sociedad, como es el caso de las medidas no métricas, por sólo citar un ejemplo.

El análisis realizado por Chevallard le da demasiado peso al desfase que se produce entre el *saber sabio* y el *saber enseñado* y a la influencia del mundo académico. También manifiesta la presión de los padres. Aquí pareciera traslucirse que la noosfera tiene motivaciones propias –que de hecho sí las posee– y que sólo éstas son las presiones que originan el cambio, son los motores que obligan a la transposición didáctica.

Un ejemplo que nos ofrece Chevallard, el de la incorporación de la *matemática moderna*, trata de ilustrar su postura. Pero, es justamente uno de los mejores ejemplos para hacer notar el influjo de las fuerzas sociales, el cómo el lanzamiento del Sputnik soviético causó un revuelo en la sociedad occidental obligando al remozamiento de los currículos en las áreas científicas. Pero fueron las fuerzas sociales (económicas, militares, políticas) las verdaderas impulsoras de este movimiento. La noosfera, como la llama Chevallard, fue sólo un agente de este cambio.

En razón de lo antes expuesto queremos aclarar que coincidimos con aquellos que según Stöcker, al referirse a la forma modélica del triángulo didáctico, expresan que *ninguna didáctica puede prescindir de ella*; pero, también estamos en coincidencia con muchas de las críticas que se le formulan al uso de esta herramienta. En consecuencia, hemos de explicar un poco la visión y (re)visión que haremos de ella.

En primer lugar hemos de aclarar que pensamos a **la matemática como un producto sociocultural**. Ya esto nos marca de una vez y nos hace mirar al triángulo didáctico dentro del marco sociocultural. Es decir, el aula de matemáticas como sistema contextuado, o como mejor se diría dentro del ámbito de la teoría de sistemas, como un subsistema que a su vez desarrolla su propia cultura y relaciones sociales, marcadas ellas por las relaciones sociales y la cultura externas al aula.

Adoptaremos también una visión dialéctica del triángulo, la cual nos permitirá visualizar cada sistema dualmente: como parte de un sistema mayor y a la vez como un todo. Al fin y al cabo, no estamos inventando nada nuevo sino retomando la noción de **Holon** que popularizara el filósofo Arthur Koestler. El término es una combinación de **Hol** (refiriéndose a holismo, 1993odo) y **on**[2] (refiriéndose a partícula).

También es de hacer notar, que aún tomando en cuenta las acotaciones de Charnay cuando establece sus tres modelos, el triángulo es insuficiente para expresar la complejidad del aula. Podría ser de gran interés para la (re)construcción completa del modelo la consideración de otros elementos. Una guía pudiese ser la propuesta de Flórez Ochoa

---

[2] Recuérdese que los nombres de muchas partículas atómicas terminan en on: protón, electrón, neutrón, muón, etc.

(1996) quien toma en cuenta cinco elementos: las metas de la educación, el tipo de desarrollo que se persigue en el individuo a ser formado, los métodos de enseñanza, los contenidos y la relación maestro-estudiante. Este autor, a partir de aquí construye cinco modelos diferenciados.

Como podemos observar, de alguna manera, podríamos ver al triángulo didáctico subsumido en los modelos de Flórez Ochoa.

Nuestra visión compleja y sociocultural nos hará ver el saber diferenciado en **un saber institucionalizado** el cual a su vez subdividiremos en dos categorías: **el académico o formal** del cual se ocupan los matemáticos y los profesionales de áreas afines como informáticos, ingenieros, etc.; y el **saber escolar**. Pero, también existe **un saber matemático no institucionalizado en el marco de la sociedad** de cuyo estudio se han ocupado en gran medida los cultores de la etnomatemática y de la educación matemática crítica. Importantes para el estudio del saber no institucionalizado son los trabajos de Bishop.

La importancia de ese saber matemático no institucionalizado es grande, por cuanto entre otras cosas la y el estudiante se encuentra en constante contacto con él, aún dentro de la escuela por ejemplo en los juegos infantiles en el recreo. Un ejemplo creemos que baste para aclarar lo queremos decir aquí. El niño está expuesto en su vida cotidiana a muchas **medidas** de carácter no métrico, siendo estas últimas las que se estudian en el currículum escolar. Así, cuando va de compras o juega con sus amigas y amigos emplea de manera natural esas medidas no métricas, las cuales también con seguridad empleará en muchos de los juegos escolares. Un ejemplo de un juego tradicional en la cultura infantil de la niña y del niño venezolano lo constituyen las metras (canicas) y en algunas de sus variantes la niña y el niño mide por medio de cuartas o palmos, jemes, etc.

Usualmente, los estudios didácticos prestan poca atención a dichos elementos socioculturales, aquí pretendemos colocarlos en su justa dimensión. De hecho ellos podrían en algunas oportunidades convertirse en obstáculos para el aprendizaje (en el sentido que le da a este término la Didáctica Fundamental), en razón de su no consideración como elementos de importancia para y en el acto didáctico. Mientras que, por el contrario, su incorporación al proceso de enseñanza/aprendizaje los convertiría en poderosos catalizadores para el aprendizaje significativo.

Desde esta visión que apenas estamos esbozando aquí las interacciones del sistema didáctico, de ese Holon, no se podrían explicar sin crear y agregar nuevas categorías a las de Contrato Didáctico, Obstáculos y Transposición Didáctica que reiterativamente se emplean dentro de la escuela de la Didáctica Fundamental.

Son de interés, para realizar una (re)construcción teórica de este tipo, elementos como los que señala y estudia Postic (2000), así como el modelo de Pêcheux (Rodríguez Diéguez, 1985), los cuales giran en gran medida en torno a las percepciones recíprocas entre los diferentes holons (totalidades/elementos) que integran el sistema didáctico y a éste con los diversos ámbitos dentro de los cuales se inserta: escuela, sociedad, etc.

Sin embargo, hemos de acotar aquí que no pretendemos en este escrito hacer una reelaboración teórica de las nociones más caras a la Didáctica Fundamental. Esto lo dejamos como tema para ser desarrollado en otro lugar. Aquí sólo abordamos algunos elementos críticos que justifican tal reelaboración así como daremos algunas características de ésta, las necesarias, para tratar el análisis del tema que nos ocupa.

Una vez hechas las aclaraciones anteriores, abordaremos el tópico central del cual nos ocuparemos de aquí en adelante, cual es el proceso de comunicación en el aula de matemáticas.

Los actores antes señalados (profesor y estudiantes) interactúan mediante un complejo sistema comunicacional, siendo uno de los códigos fundamentales de tal sistema el **lenguaje matemático**, el cual funge como **lenguaje objeto**, siendo acompañado por otro código - no menos complejo-, el **lenguaje materno**, el cual juega en muchas ocasiones el papel de **metalenguaje**. Lo interesante es que ambos códigos no actúan de manera independiente, sino que se encuentran imbricados continuamente.

En el estudio de las interacciones comunicativas del aula existen diversas tendencias. Una de ellas es *considerar a la Matemática como un Lenguaje, cuyo aprendizaje se relaciona más con procesos de adquisición* *y uso de dicho lenguaje que con su construcción concepto a concepto.* (Editorial, 1992, p. 3) Otro punto de vista es considerar que *la matemática es una ciencia, que tiene asociado un lenguaje a través del cual se estudian y se manipulan sus objetos*. (Beyer, 1996, p. 94) Un punto de vista intermedio es el considerar metafóricamente las matemáticas como un lenguaje. Pimm (1990) explota esta vertiente. No estamos aquí haciendo una lista exhaustiva de las diferentes concepciones, sólo mencionamos algunas para hacer notar lo disímil de las diferentes posiciones adoptadas al respecto.

Hemos aquí también de precisar nuestra posición. No pretendemos definir o caracterizar lo que es la matemática; ni mucho menos abordar los problemas ontológicos y epistemológicos que ella suscita. Sólo tomaremos distancia con algunas posiciones y afirmaremos rotundamente que **no consideraremos que la matemática sea un lenguaje**. Asumiremos que la matemática es un producto socio-cultural el cual tiene asociado un lenguaje que se convierte en el medio de comunicación de las ideas matemáticas. En otras palabras, estamos realizando o queremos realizar una distinción clara y nítida entre el objeto matemático (por ejemplo un triángulo) y la representación de éste (por ejemplo la palabra triángulo o un dibujo que lo represente).

**La teoría de las comunicaciones, la lingüística y la semiología** nos proporcionan herramientas para estudiar la dinámica comunicacional del aula y, muy especialmente, para analizar el lenguaje matemático.

Por supuesto que otros enfoques, como los de tipo psicológico, son posibles y fructíferos.

## EL MODELO COMUNICACIONAL DE JAKOBSON

Uno de los instrumentos de análisis lo constituye el modelo comunicacional elaborado por Roman Jakobson.

El modelo de Jakobson puede verse esquemáticamente así:

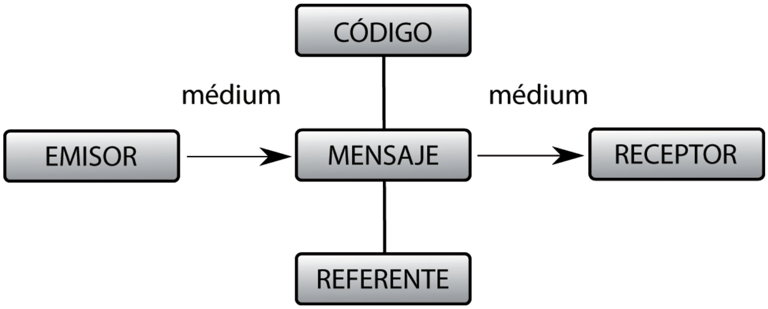



*Figura 1: Modelo de Jakobson, tomado de Guiraud, s.f., p. 11*

Los papeles de **emisor** y **receptor**, los dos factores humanos en el **modelo comunicacional de Jakobson**, pueden ser asumidos indistintamente por la o el profesor y el estudiantado, dos de los elementos constitutivos del **sistema didáctico**. El tercer elemento de este sistema, el **saber**, se encuentra asociado con el **mensaje**, el **código** y el **referente** (contexto).

Como puede observarse, el modelo de Jakobson es una herramienta mediante la cual es posible explicar diversas interacciones entre los elementos/totalidades (Holons) del sistema didáctico. Específicamente las interacciones de tipo comunicativo, siendo la diana del análisis ese elusivo aspecto denominado el **significado**.

De seguidas, se hará un breve estudio del esquema de Jakobson, observando cada una de sus partes componentes y estableciendo su conexión con el hecho educativo.

El primer elemento presente es el **emisor**. Este es, en esencia, quien produce el mensaje y en el caso educativo, en las interacciones docente-estudiante, es - en gran medida en la educación tradicional- el docente quien lleva o dirige la acción comunicativa. Pero, aún en otros modelos distintos al tradicional, es el docente un importante emisor de mensajes en el desarrollo del acto didáctico. En las interacciones estudiante-estudiante, evidentemente, el estudiante el productor de mensajes. Sin embargo, es menester señalar aquí a otro emisor importante, aunque no presente físicamente en el aula: el autor de los textos escolares.

Al final del esquema aparece el receptor. Este es, por naturaleza, a quien va dirigido el mensaje. En el caso educativo, el receptor por antonomasia es el estudiante. Esto es así dado que el modelo prevaleciente de enseñanza/aprendizaje es el tradicional. Pero, aún en otros esquemas didácticos puede ocurrir que así sea.

Sin embargo, emisor y receptor –como señalamos antes– pueden (y es deseable que así sea) intercambiar sus roles durante el desarrollo del acto comunicativo. Sin embargo, el mero intercambio de roles no es garantía de una verdadera participación del estudiante. Se encuentran, aún dentro de los esquemas relativamente tradicionales, modelos didácticos centrados en preguntas y respuestas, como el denominado **catequístico**, los cuales no responden a un verdadero diálogo. Este tipo de enfoque se encuentra en libros de texto que incluso en sus títulos aluden a él llamándose catecismos. En nuestra realidad este tipo de libros fue característico del siglo XIX. Así tenemos, por ejemplo, el famoso *Catecismo del Sistema Métrico Decimal* elaborado por Jesús Muñoz Tébar y publicado en Caracas en 1872.

Lo que se denomina un **coloquio**, es decir, el verdadero **diálogo**, esto es, como ya dijéramos, lo deseable en el desarrollo del acto didáctico dentro de un esquema de enseñanza/aprendizaje en el cual el estudiante sea un ente activo, un agente de su propio aprendizaje.

Entre los modelos que propenden a un verdadero diálogo están aquellos que se basan en técnicas como la discusión, el debate, etc.

En medio del esquema está el **mensaje**. Esto es, lo que se transmite del emisor al receptor. En nuestro caso éste podría ser un concepto, un teorema, un problema, una instrucción, una ayuda, etc.

Acotamos aquí que el término *transmisión* es un tecnicismo propio del ámbito comunicacional y en ese sentido lo empleamos aquí. No lo queremos identificar aquí con el clásico significado que éste adopta en la educación tradicional, la cual es (o pretende ser) básicamente transmisora de conocimientos, en el sentido de que la y el docente (poseedor del conocimiento según ese modelo) se lo *inyecta* vía transmisión al estudiante(agente pasivo y receptor de éste).

El mensaje tiene asociado un **significado**. Al respecto se afirma que *un proceso de comunicación en el que no exista* ***código*** *[negrillas añadidas], y por consiguiente en el que no exista significación, queda reducido a un proceso de* ***estímulo-respuesta.*** (Eco, 1988, p. 22) Además, afirma este autor que *entre el emisor y el destinatario ha de haber un código común [negrillas añadidas]* (Eco, 1988, p. 22), entendiéndose que *un código está, en general, formado por un alfabeto y un sistema de restricciones prefijadas.* (Cullmann y otros, 1967, p. 62).

El **médium** es el vehículo de transmisión del mensaje. Es, en otras palabras, *un sistema que permite transmitir las sucesiones de símbolos de un código dado* (Cullmann y otros, 1967, p. 62). En el ámbito educativo se pueden hallar medios muy diversos que van desde la comunicación oral, pasando por los textos, hasta los medios audiovisuales y el ordenador, así como diversos elementos que incluyen lo icónico, lo gestual, lo kinestésico, etc. Diversos materiales como las regletas Cuisenaire o los bloques de Dienes son otros tantos medios disponibles para la acción educativa.

Por último, se tiene el **referente**. Este alude al **contexto** o contextos que rodean el mensaje; esencialmente, en el ámbito educativo, el contexto queda demarcado por la **temática o contenido** de que se trate, estando ésta a su vez ubicada en alguna(s) área(s) disciplinar(es). Pero, más allá, están los contextos socioculturales dentro de los cuales se desarrolla la acción comunicativa entre el emisor y el receptor, empezando por la cultura del aula.

Una de las características resaltantes del modelo comunicacional de Jakobson es la definición que éste hace de seis **funciones del lenguaje**. A saber:

1. **La función referencial**: Esta función **define las relaciones existentes entre el mensaje y el objeto de éste**. El papel esencial de esta función reside en e*vitar toda confusión entre el signo y la cosa, entre el mensaje y la realidad codificada* (Guiraud, s.f., p.12). Esta función también se le denomina función denotativa o cognitiva.

Lo **denotativo** *es el significado común o de diccionario, que será aproximadamente el mismo para todas las personas que usen idéntico diccionario.* (Orive, 1978, p. 86)

2. **La función connotativa: conativa o conminativa**: Esta función **define las relaciones existentes entre el mensaje y el receptor.**

   Lo **connotativo** *es el significado emocional o evolutivo, que varía notablemente entre los individuos y aun con el tiempo para un mismo individuo.* (Orive, 1978, p. 86)

3. **La función emotiva**: Esta función **define las relaciones existentes entre el mensaje y el emisor**. En cierta forma, esta función es la manifestación de los juicios de valor y actitudes que tiene el emisor acerca del mensaje.

4. **La función fática**: Esta función tiene la finalidad de ser un elemento regulador el cual **sirve para afirmar, mantener o detener la comunicación**. Un ejemplo típico de esta función lo constituye el *¡aló!* que usamos al hablar por teléfono, o el *¿entendieron?* tan frecuente que muchos docentes emplean para chequear si las y los estudiantes siguen su explicación.

5. **La función metalingüística**: Esta función actúa sobre el código y **tiene por objeto definir o convenir el sentido de los signos** para que efectivamente exista un código común entre el emisor y el receptor, y en consecuencia exista la comunicación entre ambos. Está presente cuando se intenta aclarar o explicar algún contenido y, básicamente, cuando se da una definición.

6. **La función poética o estética**: Esta función establece la **relación que tiene el mensaje consigo mismo.**

Las funciones del lenguaje antes señaladas permiten analizar los actos comunicativos que se presentan en el desarrollo del hecho didáctico dentro del sistema didáctico (bien sea que modelemos a éste mediante el triángulo didáctico o mediante un modelo más complejo).

## EL AULA Y EL SISTEMA DIDÁCTICO BAJO LA ÓPTICA COMUNICACIONAL

El interés por estudiar el aula, y el sistema didáctico asociado, bajo la óptica comunicacional viene dado, entre otras razones, por una línea de pensamiento según la cual se *concibe la enseñanza como 'la actividad intencional, crítico-reflexiva y socio-interactivo-comunicativa que genera las situaciones más adecuadas para que el alumno/a se forme aprendiendo y capacite profesionalmente al docente'* (Rodríguez, Gutiérrez y Medina, 1995, p. 109).

Además, el lenguaje tiene una enorme importancia en la descripción y el análisis de la enseñanza, por cuanto *el lenguaje es al mismo tiempo el instrumento y el vehículo de la interacción entre el maestro y el alumno.* (Aschner, 1971, p. 125). Agregaríamos nosotros que sin el lenguaje es imposible dicha interacción y por lo tanto no es dable el hecho didáctico, entendiendo aquí el lenguaje no sólo en sus vertientes oral y escrita, sino incorporando lo gestual, lo kinestésico, etc.

Esta actividad socio-interactivo-comunicativa tiene diferentes facetas:

> *Hay períodos ocasionales de trabajo en los pupitres, de estudio silencioso, o de tarea en pequeños grupos; periódicamente, a intervalos regulares, se toman exámenes. [...] Pero cuando la clase 'sesiona', es decir, cuando el maestro y la clase trabajan juntos como grupo, sus actividades son esencial y típicamente verbales. El maestro se dirige a la clase periódicamente; a veces con un anuncio; otras, para asignar una tarea o un examen o prueba, y frecuentemente con el fin de ofrecer alguna exposición didáctica de la materia en estudio. [...] De vez en cuando, uno de los estudiantes será responsable de una intervención individual ante el resto del grupo. (Aschner, 1971, p. 126).*

Son de reciente data las preocupaciones por investigar a profundidad la dinámica comunicacional del aula de matemáticas. Puede situarse en las dos últimas décadas el período en el cual esta área ha tenido, a nivel de investigación, un verdadero impulso. Sin embargo, es harto frecuente encontrar en los escritos de lingüistas y expertos en comunicación que ellos para ilustrar sus teorías emplean ejemplos tomados de la comunicación de hechos matemáticos.

En el campo de la matemática educativa, remarcables son los aportes de Freudenthal, Kieren, Kaput, Filloy, Vergnaud, Pimm, Laborde, Skemp, Godino, Cobb, Bauersfeld, por citar sólo algunos.

Hay autores como Kirshner que han empleado como base teórica los estudios de Chomsky para estudiar el lenguaje algebraico.

Cabe destacar que Godino y sus colaboradores han venido desarrollando un esquema teórico para el estudio del tema al cual han denominado Enfoque Ontosemiótico.

En Venezuela diversos autores: Beyer (1994, 1998a, 1998b, 1999, 2000, 2001, 2003a, 2003b), Míguez (1993), Ruiz (2003), Serrano (2002, 2004, 2005a, 2005b),... han incursionado en estudiar este aspecto. En varios de estos trabajos se combina la reflexión teórica con las observaciones de aula, el análisis de textos y/o el análisis de las producciones escritas de estudiantes y docentes. Diversos enfoques y metodologías quedan reflejados en estas investigaciones y reflexiones. Entre el abanico de estudios encontramos esquemas centrados en diversas concepciones teóricas que abarcan lo sintáctico y lo pragmático del lenguaje, tomando elementos de Pimm, de Jakobson, de Wittgenstein, etc. Así, trabajos como los de Beyer (1994, 1998a, 1998b) se apoyan en gran medida en el modelo comunicacional de Roman Jakobson y la teoría del signo de Saussure, conjugados con algunos elementos de la semiótica de Umberto Eco; los estudios de Serrano (2002, 2004, 2005a, 2005b) están fuertemente influenciados por las concepciones wittgenstianas del lenguaje.

En la actualidad, también ha tomado fuerza en Venezuela un grupo adscrito al Enfoque Ontosemiótico bajo la dirección del Dr. Mario Arrieche, quien estudió con Godino.

Al respecto, se señala que

*La nueva tendencia a relacionar el aprendizaje de la matemática con los procesos de adquisición y uso de dicho lenguaje [matemático], más que con su construcción concepto a concepto, conduce a reformulaciones importantes acerca de los objetos de estudio y de los fenómenos que hay que observar en el campo de la investigación. [...] Por cierto que muchos de tales enfoques parten también de una visión constructivista del conocimiento matemático. (Rojano, 1994, p. 46)*

Este punto de vista, es el adoptado por Vergnaud, quien afirma que *el conocimiento es activamente construido por el sujeto organizador quien, en un proceso adaptativo e interactivo con su medio ambiente, organiza su mundo de experiencias.* (Rojano, 1994, p. 47) Lógicamente, ese proceso adaptativo e interactivo con su medio ambiente ha de estar intermediado por un sistema comunicacional complejo, el cual **obliga al estudiante a adquirir destrezas para leer y escribir matemáticas**.

El hecho educativo es, esencialmente, un acto de comunicación. Cualesquiera que sea el nivel educativo, se encuentra que el aula –con sus diversos elementos tanto físicos como humanos– así como los distintos materiales educativos: libros, películas, filminas, bloques de Dienes, etc., es un complejo sistema comunicacional.

Diversos autores como Orive (1978) y Rodríguez (1983, 1985), entre otros, apuntan en esta dirección: mirar la educación desde la óptica de la comunicación.

Otra motivación para este enfoque semiológico-comunicacional lo constituye la revisión de la historia de la matemática, vista ésta (la matemática) como producto cultural y siguiendo a través de la historia los diversos sistemas comunicacionales desarrollados por el hombre para transmitir las ideas de esta disciplina.

Pensando al aula en términos del sistema didáctico y considerando las interacciones comunicativas que en ese sistema se producen, modeladas estas últimas mediante el esquema comunicacional de Jakobson, es de inmensa utilidad el análisis que Pêcheux realiza al reinterpretar el modelo de Jakobson, apareciendo de manera natural allí los holons del triángulo didáctico.

Pêcheux (citado por Rodríguez Diéguez, 1985, pp. 84-88) considera el siguiente esquema comunicacional:

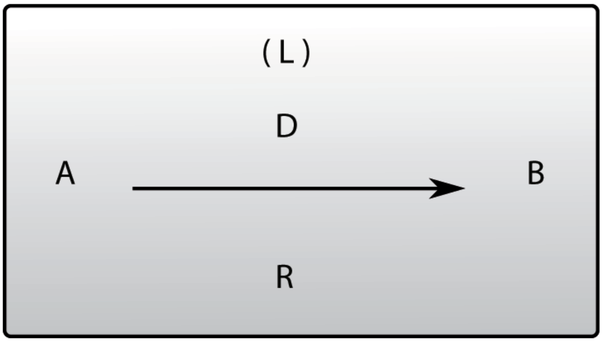



*Figura 1: Modelo de Jakobson, tomado de Guiraud, s.f., p. 11*

En dicho esquema, A es el emisor, B el receptor, R el referente, L el código lingüístico común entre A y B, D la secuencia verbal emita por A hacia B y la flecha el contacto (médium).

Podemos expandir el esquema y considerar dentro de D otro tipo de secuencias como las de tipo icónico, por ejemplo; y en consecuencia habría que considerar a L como un lenguaje dentro del cual tenga sentido construir la secuencia D.

Lo interesante de Pêcheux no es el simple reordenamiento que hace de los elementos del modelo de Jakobson ya que ello no diría nada desde el punto de vista conceptual. Nuestro interés está en que *Pêcheux formaliza el análisis de Jakobson de modo que permite el estudio de las* ***interrelaciones existentes entre los distintos elementos*** *y que suponen las «condiciones de producción» de un discurso [negrillas añadidas].* (Rodríguez Diéguez, 1985, p. 84).

Justamente, nuestro interés radica en esas interrelaciones. Señala Rodríguez Diéguez (Ibid.) que para Pêcheux

> *A, el emisor, antes de establecer la comunicación, posee una imagen de sí mismo, una imagen de B, el receptor, y una imagen de R, el referente.* ***Estas tres imágenes operan en el proceso de realización del mensaje*** *[negrillas añadidas].*

Estas tres imágenes pueden ser denotadas así: $I_A(A)$, $I_A(B)$ e $I_A(R)$.

De manera simétrica, desde el punto de vista del receptor, se tendrán las imágenes: $I_B(A)$, $I_B(B)$ e $I_B(R)$.

Como podemos observar, si nos ubicamos en un aula y tomamos R, como lo señalan Kilpatrick y otros (2005), como *el referente matemático, esto es, el contenido envuelto en la comunicación* (p. 5), A, B y R son ni más ni menos que los holons del sistema didáctico.

Pero, más aún, desde el ángulo del emisor podrían considerarse otras imágenes como $I_A(I_B(B))$ que es la imagen que tiene A de la auto-imagen de B. Esto, produce para el emisor 6 imágenes. A saber, $I_A(A)$, $I_A(B)$, $I_A(R)$, $I_A(I_B(A))$, $I_A(I_B(B))$, $I_A(I_B(R))$.

En cada etapa del proceso comunicativo podríamos pensar en estas imágenes y usarlas para interpretar las interrelaciones en el triángulo didáctico, así como para reinterpretar las seis funciones del lenguaje que señala Jakobson.

## LOS ORÍGENES DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

El hombre sintió desde tiempos muy remotos la necesidad de comunicarse con sus semejantes. En los inicios predominaron seguramente el lenguaje gestual y los gruñidos; pero, más pronto que tarde, éste fue creando los primeros rudimentos del lenguaje. Este incipiente lenguaje contenía componentes claramente identificables con **la transmisión de ideas matemáticas** (lenguaje matemático), habiéndose encontrado que *el documento matemático más antiguo es un conjunto de 55 incisiones o tarjas, en grupos de cinco, hechas en un hueso de lobo de 30000 años de* *antigüedad encontrado en Moravia, en 1937.* (Sestier, 1989, p. 7). Este hecho es también citado por Barrow (1997). Por otra parte, *la evidencia más temprana de un artificio para hacer registros numéricos lo constituye un peroné de un mandril, el cual posee 29 muescas claramente visibles, datado cerca del 35000 a. C., hallado en una cueva en las montañas Lebembo en las fronteras de Swazilandia en el África meridional* (Wells, 1997, p. 224). Este descubrimiento, también es señalado por Barrow, (1997, pp. 31-32). Otro hito importante en este aspecto lo constituye un hueso desenterrado en la década del 50 en un poblado llamado Ishango, situado a las orillas del Lago Eduardo, en Zaire, el cual fue datado entre 9000 y 6500 años antes de Cristo. (Barrow, 1997; Gheverghese, 1996). También, Campiglio y Eugeni (1992) mencionan un fragmento de hueso de águila tallado, el cual se remonta al Magdaleniense medio. Compartimos la afirmación de que *hacer marcas es la forma más antigua conocida del sentido del número en el hombre* (Barrow, 1997, p. 31).

Mención aparte merecen los diversos vestigios dejados por las culturas precolombinas. Encontramos aquí los famosos **petroglifos**, los cuales constituyen un rico material sobre cuyo significado aún no se han puesto de acuerdo los estudiosos. Dentro de la producción de estas culturas están los **quipus** incas, los cuales constituyen un ingenioso instrumento de recopilación y transmisión de información numérica basada en nudos hechos en cuerdas de diversos colores. Además, no podemos dejar de mencionar el prodigioso sistema de numeración vigesimal de los Aztecas y de los Mayas, sistema que ya contaba con un símbolo especial para rellenar los lugares vacíos, creación esta anterior en 500 años a la realizada por los hindúes con la misma fi nalidad.

## ¿QUÉ ES EL LENGUAJE?

Responder a esta interrogante es un asunto controvertido, mas aún por cuanto la definición de lenguaje (en su concepción general) no está exenta de polémica entre semiólogos, psicólogos, educadores, filósofos y lingüistas.

Para tener una definición de referencia a los efectos de este trabajo, se asumirá como definición de lenguaje -en general- la siguiente: **El lenguaje es un sistema de signos, sujetos a una serie de reglas sintácticas**

**(gramática) así como reglas de uso presentes en una cultura, los cuales dentro de un campo significativo permiten la comunicación entre un emisor y un receptor en el ámbito de un sistema comunicacional.**

Aclaremos que ésta es una de las posibles maneras de definir lenguaje. En ella hemos considerado tanto aspectos de corte sintáctico como de tipo pragmático. Estos últimos van a tener una amplia y profunda relación con la adquisición del significado, en gran medida por el papel que juegan el(los) contexto(s).

## EL SIGNO LINGÜÍSTICO: SU PAPEL EN EL LENGUAJE MATEMÁTICO

Cualquier proceso de comunicación esta centrado en **el signo**, elemento este que desde Saussure (1857-1913) se ha convertido en la unidad básica de análisis de lingüistas y semiólogos.

El **signo**, de acuerdo con el punto de vista sausuriano, está conformado por dos elementos indisolublemente ligados: el **significante** y el **significado**.

En relación con el signo, se afirma que:

> *Un signo se explica en su propio significado solamente remitiéndolo a un interpretante, el cual se refiere a otro interpretante y así sucesivamente hasta lo infinito, estableciéndose un proceso de semiosis ilimitada, en el curso del cual el destinatario descodifica el signo originario sólo en aquello que le sirve para los fines de la comunicación emprendida, o de los usos de referencia a los que se pretende aplicarlo. (Eco, 1988, p. 174)*

Se dice que:

> *El **significado** es una relación entre el interpretante del emisor y el interpretante del receptor [negrillas añadidas]. (Pignatari, 1977, p. 26)*

Luego, dedicaremos un apartado completo para discutir más en detalle la compleja noción del significado.

Así, hemos de recalcar que cualquier **código** o **lenguaje**[3] está basado en un conjunto de signos elementales o atómicos, los cuales constituyen su **alfabeto**, mediante el cual se construyen nuevos signos de mayor grado de complejidad (**supersímbolos**), los cuales frecuentemente son llamados **palabras**.

Proporcionemos tres ejemplos (dos de ellos de tipo matemático) para ilustrar lo antes dicho.

**Ejemplo 1**

Consideremos como alfabeto el conjunto:

$$\mathbf{A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$$

y el sistema de numeración posicional de base diez que comúnmente usamos. Este sistema de numeración constituye un lenguaje cuyo alfabeto es el conjunto **A**. Los símbolos **45** y **478242** son **palabras** dentro de este lenguaje.

Algunas características específicas de este lenguaje son:

- Cualquier palabra construida con este alfabeto está bien formada; esto es, **posee *significado***.
- Por cuanto podemos crear cadenas del tamaño que queramos concatenando elemento de nuestro alfabeto **A**, se pueden crear infinitas palabras en este lenguaje. Cada palabra es un número natural.
- No existe **sinonimia**. Es decir, no existen dos representaciones distintas (dentro del mismo lenguaje) las cuales posean el mismo significado.

---

[3] Usaremos aquí ambos términos como equivalentes, a pesar de que muchos autores establecen diferencias entre ambos.

- Tampoco existe **polisemia**. Esto es, no ocurre que una misma representación posea más de un significado.

**Ejemplo 2**

Note que en contraposición, si consideramos el idioma español, y tomamos como alfabeto el abecedario latino, **B={a,b,...,z}**, no toda concatenación e elementos del alfabeto **B** posee significado en castellano. Por ejemplo, ***zxtw***, **no es una palabra del castellano**, mientras que ***casa*** sí lo es.

Además, en el lenguaje natural aparecen de manera profusa la sinonimia y la polisemia.

**Ejemplo 3**

Consideremos el **lenguaje algebraico**. Éste tiene un alfabeto mucho más complejo que el de los ejemplos anteriores. Son elementos de este alfabeto el abecedario latino, el abecedario griego, los numerales (actuando éstos con diferentes *significados*: coeficientes, exponentes, subíndices), los signos de agrupación como los paréntesis, signos de mayor y menor, signo de igualdad, etc. Es común llamar **fórmulas** a los elementos de este lenguaje. Así, por ejemplo, **3x2-x+5=0 y** $\mathbf{(a-b)^3}$ son palabras de este lenguaje. Por su parte, $\mathbf{x(^23y)}$ y $\mathbf{x+-^35}$ no tienen significado de acuerdo con las *reglas* de construcción de las expresiones algebraicas.

Existe aquí la presencia de sinonimia. Por ejemplo, las expresiones $\mathbf{(sen(x))^2}$ y $\mathbf{sen^2(x)}$ poseen el mismo *significado*.

A la hora de enfrentar la actividad de aula, el proceso de comunicación empieza a ser muy complejo. Esto puede reflejarse en los anteriores ejemplos, y la diferencia sustancial entre las situaciones presentadas en los ejemplos 1 y 3, podrían darnos pistas para estudiar las dificultades con las que tropiezan las y los estudiantes en **el paso de la aritmética al álgebra.**

Como se podrá notar, la noción de signo lingüístico es una poderosa herramienta para el estudio, desde el punto de vista de la

Didáctica de la Matemática, de las interrelaciones comunicacionales que se producen en el sistema didáctico, en las cuales también se producen fenómenos como la sinonimia y la polisemia.

## EL CONTEXTO

Un elemento de enorme importancia en cualquier sistema comunicacional lo constituye el **contexto**. Este elemento –del cual ya hemos hecho alguna mención anteriormente– ayuda a dirimir dudas respecto del significado que se le puedan presentar al receptor de un mensaje. Aclaremos esto mediante un ejemplo: supóngase que se le proporciona a alguien la expresión **10** ¿cuál es su significado? ¿Qué representa? Lo usual es atribuirle el significado asociado a la cantidad **diez**. Esto es cierto si nuestro **contexto** es el sistema de numeración decimal. Sería el contexto que por defecto asumimos por ser el **más familiar para nosotros**. Pero, no es el único contexto posible. Si consideramos cualquier otro sistema de numeración, la palabra **10** tendría signifi cado allí.

Sin embargo, si el docente está trabajando –pongamos por caso– con el sistema binario, ¿cómo distinguir ambos contextos (el decimal y el binario)? Una manera de hacer la distinción es subindicar cada número (palabra en el respectivo lenguaje) con un número que indique la base del sistema de que se trata. $\mathbf{(10)_2}$ indicará un número en sistema binario y $\mathbf{(10)_{10}}$ nos dice que está en sistema decimal. Como en muchos lenguajes se tiende hacia una economía del lenguaje, generalmente en el elemento más conocido para el receptor, el representado en un contexto más familiar, se suprime cualquier signo adicional que aluda al contexto ¡y se **sobreentiende** éste! Así, en lugar de $\mathbf{(10)_{10}}$, se escribiría **10**, y se reduciría el empleo del subíndice sólo cuando se trate de otra base distinta a diez.

Ejemplos similares pueden formarse considerando los logaritmos, tomando bases distintas.

El **contexto** puede ser concebido de distintas maneras: a) como el entorno de una unidad lingüística; b) como las circunstancias de la aparición de una unidad lingüística; c) como la parte de un texto o discurso relativamente extenso y con una unidad de significado, en el sentido de conjunto coherente de pensamiento o significado; d) como las circunstancias materiales y el entorno situacional de una unidad comunicativa cerrada con pleno significado.

Esta conceptuación del contexto desde el punto de vista lingüístico puede ser plenamente reinterpretada dentro del ámbito didáctico. Pero, adelantamos que más allá de los contextos estrictamente lingüísticos están los contextos culturales, los cuales generan reglas de uso que construyen significados.

Más aún, los propios lingüistas están concientes de que el contexto puede (¿debe?) trascender lo estrictamente lingüístico. Así, por ejemplo Ullmann (1976) parte del hecho de que

> *Nadie negaría la importancia decisiva del contexto en la determinación de las palabras. En lo que concierne al papel del* ***contexto verbal,*** *esto ya fue reconocido como fundamental por algunos de los pioneros de la semántica moderna [...]*
>
> *El alcance del término 'contexto' ha sido ampliado en varias direcciones. Incluso el contexto estrictamente verbal ya no está restringido a lo que precede y sigue inmediatamente, sino que puede abarcar todo el pasaje, y a veces el libro entero, en que se encuentra una palabra. [...]*
>
> *Además del contexto verbal, el lingüista debe también prestar atención al llamado 'contexto de situación' (p. 57)*

Como podemos observar, ya los lingüistas dentro de su campo han hecho consideraciones acerca de contextos extralingüísticos. Luego, resulta natural transferir este enfoque al campo de la didáctica.

Más aún, agrega el mismo Ullmann (op. cit.) que

> *Este útil concepto [se refiere al* ***contexto de situación****] fue introducido en la lingüística por el antropólogo Bronislaw Malinowski [...]. Significa, en primer lugar, la situación efectiva en que se encuentra una expresión, pero* ***conduce***

> ***a una visión todavía más amplia del contexto que abraza el fondo cultural entero frente al cual ha de colocarse un acto de hablar*** *[negrillas añadidas]. (p. 58)*

Justamente, es esta una interesante vía de ataque para el estudio de los problemas del significado en didáctica: la inclusión de los contextos de situación.

Señala Ullmann (op. cit.) que *esta ampliación de los contextos, lingüísticos y no lingüísticos, ha abierto nuevos horizontes al estudio del significado.* (p. 59) Nosotros agregaríamos que abrirá nuevos horizontes en el estudio de las interrelaciones comunicativas en el sistema didáctico.

Así, podemos establecer que el tema del programa en el cual se haya insertada una clase de matemáticas constituye un primer contexto. Éste a su vez se puede insertar en un contexto más amplio: la rama de la matemática a la cual corresponde el tema. Por ejemplo, en una clase en la que se esté estudiando la noción de **inyectividad**, ésta forma parte del **tema de funciones y sus propiedades**, el cual es parte de las **matemáticas elementales.**

Aún estaríamos aquí dentro de un contexto centrado en el contenido de la materia. Seguidamente se puede ir pensando en los contextos de situación.

El contexto tiene enorme relevancia en la comunicación matemática. Si nos situamos en el ámbito de la **resolución de problemas**, es frecuente considerar **problemas con enunciados verbales**, los cuales requieren para su resolución una **cabal comprensión** del contexto (a veces de tipo extramatemático) por parte del estudiante. En estos problemas lo común es presentar una **situación matemática** incorporada dentro de una situación no matemática. La **matematización**, por parte del estudiante, pasa por entender el contexto (situación no matemática) propuesto (recordemos que en muchos modelos de resolución de problemas -v.g. el de Pólya- la primera etapa es la **comprensión del problema**).

Existen investigaciones dedicadas a estudiar la sensibilidad de la resolución de problemas a la variable contexto. Uno de los tópicos estudiados es la **familiaridad del contexto**. Uno de estos estudios es el realizado por Dumont (1980).

Podemos señalar en este lugar que la noción de contexto en la matematización de situaciones obliga a ir más allá de la noción de contexto lingüístico antes abordada, o aquella en la cual el contexto se reducía a aspectos curriculares (contenidos, tema, área de la matemática), trascendiendo a éstos como ya adelantáramos más arriba, incorporando el mundo extraescolar y articulándose con el mundo natural y la sociedad que rodea al estudiante: vale decir los contextos de situación.

Para ilustrar esta afirmación, consideremos a una o un docente de una escuela rural venezolana el cual pretenda diseñar una actividad de resolución de problemas. Supongamos que la o el docente construya la actividad basándose en las características del Metro de Caracas. Este contexto sería muy familiar para una niña o un niño usuario del Metro, más posiblemente no lo sea para una o un estudiante del campo venezolano. Recíprocamente, si a un docente urbano se le ocurre contextuar una actividad en las faenas del campo, este contexto puede serle absolutamente antinatural al estudiante urbano.

Lo señalado en el párrafo precedente puede parecer una perogrullada, pero no es infrecuente encontrar en los textos enunciados que para muchos estudiantes aluden a contextos totalmente desconocidos para ellos. Es abundante la toma, por parte de ciertos autores, de enunciados de problemas sacados de materiales didácticos redactados en otras latitudes y con contextos no familiares para la y el estudiante. Esto se da marcadamente en la educación de las comunidades indígenas, en donde los materiales instruccionales hacen mención a innumerables aspectos no familiares para el lector. Por ejemplo, rara vez un autor amolda las unidades de medida a las usadas en una comunidad. Imagínese un problema planteado a una o un estudiante Yanomami[4] en el cual se use la yarda o el pie como unidad de medida. ¿ Qué significado le atribuirá la o el estudiante a las palabras *yarda* y *pie*?

Situándonos por un momento en lo estrictamente lingüístico, vimos, en el ejemplo de los sistemas de numeración, que además **el tamaño**

[4] Etnia indígena del sur de Venezuela.

y **la ubicación** de un **significante** pueden -en ciertos casos- representar **significados**. Así, lo que usualmente llamamos **subíndices** se escriben **con menor tamaño** y en la **parte inferior y a la derecha** de la expresión a la cual hacen referencia.

Aquí, precisamente, podemos construir diversas situaciones en las cuales empiezan a aparecer de manera frecuente la **polisemia** y la **sinonimia**. Por ejemplo, un **superíndice** podría significar potencia; pero, podría ser también un indicador del **orden de derivación**, etc. Un ejemplo paradigmático lo constituye el **superíndice -1**. Así, en el contexto del álgebra de los números reales a-1 representa el **recíproco del número a**; es decir, **1/a**. Pero en el contexto de las funciones el asunto se vuelve más complejo: $\mathbf{f^{-1}}$ puede aludir a la **función inversa** o a la **imagen inversa de un elemento**. Es común en trigonometría la confusión presente en las y los estudiantes entre **función inversa** y **función recíproca**: así, la inversa del **sen(.)** se denota por $\mathbf{sen^{-1}(.)}$ o a veces por **arcsen(.)** (note que aquí aparece también la sinonimia), mientras que la recíproca es la función **cosec(.)=1/sen(.)**.

## ¿QUÉ ES Y QUÉ NO ES EL LENGUAJE MATEMÁTICO?

Es preciso aclarar que:

> *Lenguaje matemático no significa de ningún modo vocabulario matemático [así como] lenguaje matemático no significa de ningún modo simbolismo de las matemáticas (Adda, 1975, p. 27).*

El **vocabulario** y el **simbolismo** de las matemáticas son sólo **parte del lenguaje matemático**, pero no lo caracterizan completamente.

También es necesario indicar que:

> *...los sistemas de símbolos escritos son solamente unos de los lenguajes de las matemáticas... Las lenguas naturales y los modelos concretos como los bloques de Dienes o las regletas de Cuisenaire, son ejemplos de otros sistemas de representación que pueden ser usados para describir ideas matemáticas. (Hiebert, 1988, p. 5)*

De la discusión planteada, en torno al lenguaje matemático, se puede colegir que no es fácil caracterizarlo. Más aún, **el código usado por parte de las y los docentes, bien sea en una clase o en un texto, es generalmente una intrincada mezcla de lenguaje natural, símbolos propios de la matemática, gráficos, etc**.

Es de hacer notar que el nivel de complejidad de esa mezcla en el caso del lenguaje oral en una clase de matemática es aún mayor que el de las producciones escritas. En el caso de una clase habría que agregar los gestos, diferentes **tonos de voz**, etc.

Un grado mayor de complejidad, en el problema que tratamos, lo ocasiona el hecho que el **lenguaje natural** (el español, por ejemplo) actúa con una **función metalingüística**; es decir, un lenguaje que se emplea para describir y estudiar otro lenguaje. Así, por ejemplo, el profesor de matemáticas usa el español para enseñar matemáticas; mientras que el de inglés emplea el castellano como metalenguaje para enseñar inglés. A este respecto *Hjelmslev explica la naturaleza de un metalenguaje, que es una semiótica cuyo plano de contenido es una semiótica*. (Eco, 1988, p. 100)

Se puede decir que

> *Para describir un lenguaje L, previamente es necesario saber expresarse. Entonces se utiliza un lenguaje auxiliar, un metalenguaje M, para formular las reglas que codifican a L" (Glaeser, 1977, p. 46 ). Lo que se quiere significar en este punto es que el lenguaje matemático le debe mucho al lenguaje natural actuando éste en muchos casos como metalenguaje. Es por ello que se afirma, por una parte, que* ***la enseñanza de la matemática gana cuando se la coordina con el estudio de las lenguas*** *(Glaeser, 1977, p. 52); y por otra parte, que* ***numerosos errores de razonamiento se basan en enunciados que mezclan sin transición un lenguaje y su metalenguaje.*** *(Glaeser, 1977, p. 46)*

Hasta este momento aún no hemos dicho con cierta claridad qué es el lenguaje matemático; pero, sí parecería que éste forma parte de los **lenguajes artificiales**. Sin embargo, el **lenguaje matemático dentro del sistema didáctico** no es exactamente un lenguaje artificial.

## LA MATRIZ DE LACOMBE-ADDA (MLA)

Todos los comentarios y observaciones anteriores pueden ser sintetizados (y tal vez clarificados) mediante un cuadro de doble entrada que presenta Adda (1975, p. 29) y que se debe a Daniel Lacombe, en el cual se tiene, por un lado, los tipos de lenguaje: natural y formal o artificial; y por el otro lado aparecen tres **niveles lingüísticos**: matemático, metamatemático y heurístico o perimatemático.

El cuadro en cuestión es el siguiente:

| | NATURAL | ARTIFICIAL |
|---|---|---|
| MATEMÁTICO | | |
| METAMATEMÁTICO | | //////////// |
| HEURÍSTICO | | //////////// |

NOTA: EL RAYADO INDICA QUE EN ESOS NIVELES CASI NO APARECE LENGUAJE ARTIFICIAL.

A este cuadro se le designará como la **Matriz de Lacombe-Adda (MLA).**

El **Nivel Matemático** consiste en todos aquellos mensajes cuyos referentes son objetos matemáticos. Así, por ejemplo, el enunciado *todo número par es divisible por dos* está en el nivel matemático; igualmente ocurre con expresiones como $8 > 5$ o como *considere* $\varepsilon > 0$.

En este nivel se concentran las **Funciones Referencial** y **Connotativa** del modelo de Jakobson.

En el **Nivel Metamatemático** se encuentran todos aquellos mensajes cuyos referentes están en el nivel matemático. Así se tiene que *el enunciado 'todo número par es divisible por dos' es verdadero* es una expresión del nivel metamatemático.

Es aquí, en este nivel, en donde se puede observar la **Función Metalingüística** a la que se alude en el modelo comunicacional de Jakobson.

Por último, en el **Nivel Heurístico** (también llamado **Perimatemático** en la terminología de Adda-Lacombe) caen expresiones y símbolos cuya finalidad es, en muchos casos, reforzar el significado de mensajes los cuales se hallan en los niveles anteriores (por ejemplo: un recuadro, un recordatorio, una advertencia como *¡cuidado!* o un subrayado). Asimismo se clasifican dentro de esta categoría todos aquellos elementos que le sirven de guía o ayudan al receptor para seguir el hilo del mensaje que produce el emisor. Entre estos elementos se encuentran: ayudas; separadores de ítems que pueden ser alfabéticos, numéricos o icónicos; señales que indiquen el comienzo o el final de un enunciado o de una prueba; * para indicar el nivel de dificultad de un ejercicio o problema, etc.

Este nivel puede asociarse parcialmente con la **Función Fática** del modelo de Jakobson.

Es de hacer notar que -bajo ciertas circunstancias- puede ocurrir que las fronteras entre estos niveles no estén nítidamente demarcadas, siendo en consecuencia difusas en su esencia.

En lo que respecta a clasificar el lenguaje en la categoría de natural o artificial, pareciera un poco más clara la distinción entre estas categorías que la existente entre las categorías que definen los niveles. Empero, ello tampoco es tan simple como a primera vista pareciera ser.

En términos generales, dentro de los lenguajes artificiales se encuentran tanto la simbología de las matemáticas como muchas manifestaciones comunicacionales de tipo icónico o gráfico, pasando por el código Morse, las señales de un semáforo e inclusive ciertos lenguajes como el Volapuk (lengua universal inventada en 1879 por Martin Schleyer) y el Esperanto (lengua internacional inventada en 1887 por Zamenhof).

En el ámbito de la comunicación de mensajes matemáticos se da un proceso de hibridación permanente entre el lenguaje natural y el artificial cuya resultante es un **Lenguaje Mixto**.

## LA MATRIZ DE LACOMBE-ADDA-BEYER (MLAB)

Sobre la base de afirmaciones como la de Hiebert (antes citada) se puede generalizar la MLA descomponiendo el lenguaje artificial en varias dimensiones como por ejemplo: **simbólica (S), gráfica (G)**. Podrían ser considerados otros elementos como son: **materiales concretos** (los bloques de Dienes, dados, geoplanos, el ábaco, el Tangram, el cubo de Rubik o las regletas Cuisenaire), **audiovisuales, herramientas informáticas** (ordenador, calculadora) los cuales por derecho propio podrían, cada uno de ellos, conformar nuevas dimensiones a ser agregadas a la MLAB.

En Serrano (2002) se generaliza esta matriz tomando en consideración elementos del **lenguaje gestual y corporal**, considerados estos elementos como dos nuevas dimensiones de la matriz, dimensiones que se explican y ejemplifican allí.

Sin embargo, es menester mencionar que en realidad *los gráficos son representaciones simbólicas* (Hiebert, 1988, p. 26) y sólo se hace esta distinción a los fines de facilitar el análisis que se pretende realizar. Todos los elementos a ser considerados son en sentido estricto **signos**.

A los efectos de estudiar la interacción comunicativa en el aula se propone emplear una generalización de la MLA la cual se denominará **Matriz de Lacombe-Adda-Beyer (MLAB)**.

La interconexión de los diferentes componentes de la MLAB es lo que se denominará el **Discurso Matemático**. Es decir, **la MLAB es una forma de representar al discurso matemático.**

La MLAB se muestra de seguidas:

| | VERBAL | ARTIFICIAL | | |
|---|---|---|---|---|
| MATEMÁTICO | V | S | G | M |
| METAMATEMÁTICO | | | | |
| HEURÍSTICO | | | | |

El **discurso matemático** aparecerá entonces asociado con cuatro componentes o dimensiones: V (verbal), S (Simbólica), G (Gráfica) y M (Mixta), y tres niveles lingüísticos: Matemático, Metamatemático y Perimatemático.

En lo tocante al **nivel matemático** se tiene que:

a. La dimensión V estaría asociada, esencialmente, al **Vocabulario Matemático** y a **expresiones propias de la matemática**. Así, tienen cabida dentro de ella términos como por ejemplo *función*, *grupo*, *espacio vectorial*; y expresiones como: *si y solamente si* (que Halmos abrevia *sii*), *si ... entonces*, *sea f una función* (y en general todos aquellos enunciados de la forma: *sea*...), *para todo*..., *existe un*..., etc.

b. La dimensión S contiene los símbolos propios de la matemática, verbigracia $-$, $/$, $<$, $=$, $+$, $a_i$, $\alpha$, $\int$, $\in$, $\infty$, $f(x)=e^{x}+3x$, $(\int f3(x)\, dx)2+5f(x)$.

c. La dimensión G está representada por gráficos como son: los histogramas, gráficos de funciones, redes, diagramas como los de Venn o los flujogramas, planos y mapas, tablas, etc.

d. La dimensión M está constituida por elementos híbridos, los cuales están estructurados por elementos de las anteriores dimensiones.

De manera análoga a los niveles o a las categorías de lenguaje (natural y artificial), las dimensiones no tiene fronteras precisas y ocurre con harta frecuencia un entrecruzamiento de ellas (**Dimensión Mixta**).

Haremos un estudio considerando las dimensiones V, S y G, por lo que la MLAB queda como se muestra a continuación:

| | VERBAL | ARTIFICIAL | |
|---|---|---|---|
| MATEMÁTICO | V | S | G |
| METAMATEMÁTICO | | | |
| HEURÍSTICO | | | |

En lo que concierne al **Nivel Metamatemático** éste se expresa, mayoritariamente, en la Dimensión V cuando de enseñanza se trata. Sin embargo, es bien conocido el trabajo de la Escuela Formalista -con Hilbert a la cabeza - quienes crearon todo un aparataje metamatemático el cual se expresa, en gran medida, en la Dimensión S. La manifestación de este nivel en la Dimensión G es escasa.

En referencia al **Nivel Perimatemático** cabe decir que él se expresa en las tres dimensiones: V, S y G de la MLAB. En la Dimensión V cabrían por ejemplo un **recordatorio** como *recuerde que la expresión que se encuentra en el denominador nunca se anula por ser una función exponencial*; órdenes como *resuelva*, *efectúe* o *simplifique*; **advertencias** como *¡cuidado con los ceros del polinomio*!; **ayudas** y **sugerencias**; también pertenecen a este género los **separadores alfabéticos** como *a)*, *a.*; se incluyen aquí **separadores numéricos**: *1.*, *i)* y **separadores alfanuméricos**: *A1*, *A-1*, etc. En la Dimensión S estarían ubicados: **separadores de párrafos**, y **de sección o apartado** como son los símbolos ¶ y §, respectivamente; **comillas**; el símbolo de Halmos “ ” que indica el fin de una demostración o un **asterisco** que indica un mayor nivel de dificultad de un ejercicio. En la Dimensión G se incluye un universo vario de **símbolos gráficos** que engloba subrayados, colores, tipos de letras, recuadros, negrillas; iconos como el de *una calculadora* que le indica al receptor usar este instrumento; una señal de *pare* que invita a leer con cuidado un párrafo.

## UNA POSIBLE DEFINICIÓN DE LENGUAJE MATEMÁTICO

Como podrá notarse, hasta este instante aún no se ha dado una definición explícita de lo que es el lenguaje matemático, pero se ha hecho mención de sus componentes esenciales las cuales se denominaron dimensiones.

**Se conceptúa al lenguaje matemático como el lenguaje empleado por una persona para transmitirle a otra(s) persona(s) ideas matemáticas. Dicho código se caracteriza mediante diversas dimensiones: Verbal (V), Simbólica (S), Gráfica (G),... y se manifiesta en el nivel matemático de la Matriz de Lacombe-Adda-Beyer (MLAB).**

## LA DIMENSIÓN VERBAL (V) DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Esta dimensión conforma, en el nivel matemático, lo que se podría denominar **el vocabulario matemático y las expresiones lingüísticas propias de la matemática**, entendiéndose por esto todos **los términos, vocablos y locuciones con significación matemática**, por ejemplo: *función*, *conjunto*, *dígito*, *número*, *grupo*, *relación de equivalencia*, *grupo simple*, *menor o igual*, *todo grupo abeliano G es un módulo sobre el anillo de los enteros* y tantas otras que se pueden encontrar dentro del contexto matemático.

Cabe mencionar que,

> *El discurso matemático informal, como parte que es del discurso natural, se compone de sustantivos, verbos, adjetivos, etc. Los sustantivos designan objetos matemáticos; por ejemplo, el número 3, el número* $\mathbf{e} = 2{,}718\ldots$*, el conjunto de los números primos, la matriz* $\begin{bmatrix} 100 \\ 012 \end{bmatrix}$*, la función zeta de Riemann (z). Las estructuras matemáticas, como por ejemplo, el sistema de los números reales o el grupo cíclico de orden 12, son nombres bastante más complejos, y consisten en objetos matemáticos encadenados por ciertas relaciones o leyes de composición.*

> *Los símbolos de combinación o de relación, como 'igual', 'mayor que', adición, derivación..., desempeñan papel de verbos, o similar. Los adjetivos matemáticos tienen papel de restricción o cualificación, como vemos, por ejemplo, al oponer 'grupo' con 'grupo cíclico'. (Davis y Hersh, 1989, p. 110)*

En esta dimensión se encuentra toda una pléyade de expresiones propias de las matemáticas, verbigracia la consabida frase *sea...* con la cual se inicia la presentación de muchos enunciados matemáticos, la cual es comprendida inmediatamente por cualquier persona familiarizada con la matemática; pero, no lo es necesariamente para aquellos que se inician en el estudio de esta disciplina.

No obstante, son pocos los docentes que dedican parte de su tiempo para aclarar el significado de estas locuciones, y más grave aún, la emisión de estas expresiones con mucha frecuencia se efectúa por la vía oral.

## LA IMPORTANCIA DE LA DIMENSIÓN V

A los efectos de este estudio es interesante mencionar que,

> *Los textos matemáticos de tipo ordinario jamás están completamente formalizados. Están redactados en español, o en inglés, o en algún otro lenguaje natural, pues se pretende que sean leídos por seres humanos. (Davis y Hersh, 1989, p. 107)*

Cabe agregar que si se observan las revistas de investigación de matemáticas y de los campos conexos (Investigación Operativa, Estadística, etc.) se encuentra que los artículos que en ellos aparecen tienen la característica antes señalada por Davis y Hersh: No están totalmente formalizados. Los autores antes citados agregan que *el verdadero trabajo matemático, incluido el efectuado por los lógico-matemáticos, sigue realizándose en lenguaje natural, aumentado, eso sí, por notaciones matemáticas especiales.* (Davis y Hersh, 1989, p. 109) Más aún, ellos afirman tajantemente que *casi podríamos decir que las reglas para redactar matemáticas destinadas al consumo humano son las contrarias de las de producción matemática para consumo de las máquinas (es decir, textos formalizados).* (Davis y Hersh, 1989, p. 110)

Esta última afirmación de Davis y Hersh es de crucial importancia en el campo educativo; pero, parece ser en muchos casos que se olvida a quien va dirigido el discurso matemático y éste se expresa con una sobreabundancia de la dimensión S en detrimento de la dimensión V.

Acontece, con harta frecuencia que, salvo el discurso oral, el resto del trabajo en el aula del docente de matemática se concentra en escribir en el pizarrón gran cantidad de fórmulas, cálculos, simplificaciones, etc., pero el razonamiento del docente así como la mayor parte del vocabulario y/o de las expresiones lingüísticas propias de la matemática casi nunca son escritas por él, conduciendo a veces a confusiones como la de un estudiante que entendía *máximo como un divisor* en lugar de *máximo común divisor*, reportada por Lelis Páez (comunicación personal, marzo de 1994).

## CREACIÓN DE LA DIMENSIÓN V DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Respecto del proceso de creación de esta dimensión se tiene que,

> *O bien se crea una palabra nueva... pero lo más usual es que se utilice una palabra del lenguaje común o tomada de un dominio científico alejado (Glaeser, 1977, p. 57).*

En lo concerniente a esta temática, el importante lingüista M. A. K. Halliday (1986, p. 255) plantea que este vocabulario se forma por intermedio de las siguientes modalidades:

1. Reinterpretando las palabras existentes en el lenguaje natural;
2. creando nuevas palabras a partir de la existencia de palabras nativas;
3. tomando palabras de otro idioma;
4. creando nuevas palabras a imitación de otro idioma;
5. inventando palabras totalmente nuevas;

6. creando locuciones:

7. creando palabras nuevas a partir de la existencia de palabras no nativas.

Él mira este proceso desde la óptica del idioma inglés y ejemplifica cada una de las modalidades. Acota luego que,

> *Toda lengua crea nuevos nombres de cosas, pero no todas las lenguas lo hacen del mismo modo.(Halliday, 1986, p. 256)*

De seguidas se ejemplifican, en el contexto del lenguaje matemático, las categorías de formación de esta dimensión citadas anteriormente y dadas por Halliday.

En la **primera categoría** están situados términos como *función*, *grupo*, *anillo*, *conjunto*, *dominio*. En todos estos casos hay un préstamo lingüístico del lenguaje natural -el castellano- procediéndose a cambiarle el significado al término.

En la **segunda categoría** se hallan vocablos como *sumatoria* (a veces se usa *sumatorio*) y *productoria* que no existen en castellano y se derivan de suma y producto, respectivamente. Aunque cabe resaltar, en nuestra opinión, que estos dos términos son innecesarios por cuanto pueden ser sustituidos perfectamente por suma y producto como lo hace Maravall (1975, p. 17). Dentro de esta categoría también se tienen vocablos como *aleomorfismo* y *gravitores* acuñadas por Maravall (1975, pp. 280 y 293). Entran a formar parte de esta categoría: *codominio*, *coclase*.

En la **tercera categoría** caen palabras tomadas de otro idioma. Tal es el caso de *kernel*, palabra tomada del alemán y para la cual hay un equivalente castellano *núcleo*, estando esta última en la primera categoría. Aquí también se tienen términos provenientes de la informática como *bit*. También es usual en la nomenclatura de la teoría de grafos encontrar el término -aparentemente de origen francés- *clique* (en inglés y francés se utiliza el mismo término dentro del lenguaje matemático). Desconocemos un equivalente castizo para este vocablo. Asimismo, goza aún de popularidad el término *tableau* en programación lineal en lugar de la correspondiente palabra castellana: *tabla*. Hállase aquí también *curtosis* (transliteración de Kurtosis), *jet* (término empleado en geometría algebraica) y los híbridos germano-hispanos *eigenvalor* y *eigenvector*.

En la **cuarta categoría** se pueden mencionar *mapeo* que constituye una castellanización de los términos ingleses *mapping* y *map*. Sin embargo, sería más correcto usar *aplicación* o *transformación* en lugar de mapeo. También pertenece a esta categoría el vocablo *compactificación*, muy usado en algunas traducciones como equivalente a la palabra inglesa *compactification* (Bushaw, 1970; Massey, 1972), en lugar del término castizo *compactación* (Kelley, 1975).

En la **quinta categoría** se encuentran términos nuevos como *googol* y *googolplex* inventados por el matemático estadounidense Edward Kasner (1878-1955) (Lucas, s/f., p. 53; Kasner y Newman, 1972, pp. 29-32).

En la **sexta categoría** se tienen locuciones como *función acotada*, *grupo cíclico*, *cuerpo finito*, *grupo Abeliano*, *Álgebra de Boole*, *si y solo si*, *relación de orden total*, *arco capaz de un ángulo*, *mínima cota superior* o *norma generada por un producto escalar*.

En la **séptima categoría** se tiene la palabra *Lipschitziana*, que se deriva del apellido del matemático alemán Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903). De manera análoga se generan *Gaussiana*, *Riemanniana*, *Jacobiano* y tantos otros vocablos derivados de los apellidos de insignes matemáticos.

Este proceso de formación del registro matemático guarda indudables analogías con la manera en que una lengua se enriquece creando nuevas palabras. Los lingüistas consideran que el proceso de formación de nuevas palabras se efectúa mediante: a) **Las onomatopeyas**, palabras que imitan el sonido de la cosa que significan; b) **Los préstamos**, tomando palabras provenientes de otro idioma; c) **La derivación y la composición**, las cuales permiten crear palabras a partir de las ya existentes; d) La migración o transferencia del sentido, proceso mediante el cual un vocablo toma un sentido diferente del que tenía originalmente.

## LA DIMENSIÓN V EN LOS NIVELES META Y PERIMATEMÁTICO

En estos niveles la dimensión V ocupa un lugar preponderante.

La mayor parte del nivel metamatemático del discurso matemático, en el contexto educativo, se expresa en la dimensión V, actuando como metalenguaje el lenguaje natural: El castellano (hablado o escrito según sea el caso).

Aquí se pueden situar, esencialmente, todas aquellas explicaciones, comentarios, observaciones y en general cualquier mensaje cuyo referente esté en el nivel matemático. Tomemos un ejemplo de un texto de matemática: *Algunos de los valores que no puede tomar la variable son aquellos que dan origen a una raíz par de un número negativo o aquellos que anulan un denominador.* (Gid Hoffmann, 1990, p. 37)

En lo que concierne al nivel perimatemático se puede constatar que innumerables recordatorios, advertencias, notas e indicaciones se expresan -tanto por la vía oral como por la escrita- en la dimensión V. Tomemos un ejemplo de esto de otro texto: *Aplicando la división sintética explicada en el número* ***(100)*** *y* ***(101, ej. 3)*** (Baldor, 1962, p. 175).

Aquí también tienen cabida los separadores alfabéticos, numéricos y alfanuméricos antes citados.

## LA DIMENSIÓN SIMBÓLICA (S) DE LA MLAB: ESBOZO HISTÓRICO DE LA SIMBOLOGÍA MATEMÁTICA

El desarrollo histórico de símbolos especiales para denotar objetos, relaciones y estructuras matemáticas siguió un largo camino. El caso del álgebra, la cual pasó por tres etapas bien diferenciadas: **álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica**, es una buena muestra de ello.

Podemos hacer perfectamente un seguimiento de la notación algebraica y observar su evolución: así, en 1494 Pacioli escribía *Trouame .1.n° che gioto al suo qdrat° facia .12.* para referirse a lo que hoy escribimos como $x+x^2=12$. Ya en 1521, Ghaligai, usaba mayor simbolismo, escribiendo 2  e32 c°-320 numeri para significar $x^2+32x=320$.

Esta evolución prosiguió y nos encontramos que en 1577 Gosselin escribe *12LM1QP48 aequalia 144M24LP2Q* para representar a $12x-x^2+48=144-24x+2x^2$. Ya para el 1693 Wallis escribía $x^4+bx^3+cxx+dx+e=0$, expresión que no requiere mayor aclaratoria.

Esta evolución -del álgebra- tiene similitud con la de la escritura: desde la escritura pictórica, pasando por la escritura pictógrafica-ideográfica y la fonética hasta llegar a la escritura alfabética.

El desarrollo del álgebra ha tenido sus avances y retrocesos: avances como el uso del álgebra sincopada por parte de los hindúes y de Diofanto; retroceso con los árabes que retornaron, prácticamente, al álgebra retórica. Un avance lo constituyó el uso del símbolo para las fracciones, dándose marcha atrás según Bell (1949, p. 136) al usar, por **razones tipográficas**, el símbolo a/b.

En este ir y venir aparecen los numerales indo-arábigos introducidos en Europa por los árabes y difundidos ampliamente por Leonardo de Pisa (Fibonacci, (1175-1250 ?)) a través de su obra **Liber Abaci.**

Es curioso, pero el desarrollo de los numerales indo-arábigos guarda una estrecha similitud con el de la escritura. Esto no es totalmente casual ya que los alfabetos fueron empleados por diferentes culturas, en determinados momentos, para simbolizar los números. Además, en diversas culturas como las de Mesopotamia, se emplearon muescas y otros signos para representar números hacia el 3300 a. C., antes de la invención de la escritura.

Johann Widman (1460?-1500) fue el primero en usar, en 1489, los símbolos + y − en un texto impreso, los cuales fueron popularizados por Michael Stifel (1487-1567). Ya dichos símbolos habían sido usados con anterioridad en algunos manuscritos. Se supone que el símbolo + es una contracción de la palabra latina *et*.

Por otra parte, Recorde inventó nuestro actual símbolo de igualdad el cual aparece -por vez primera- en su obra Whetstone of Witte (1557) y, *se necesitaron unos tres mil años para que este ambiguo concepto alcanzara una plena representación simbólica.* (Bell, 1949, p. 135) Tal vez, la preferencia de Leibniz por el símbolo = sobre otros símbolos rivales cambió el fiel de la balanza a favor de su utilización.

Otros símbolos de uso común, los signos de desigualdad: $<$ y $>$, aparecieron por vez primera en el libro **Artis Analyticae Praxis**, obra publicada en 1631, diez años después de la muerte de su autor, el matemático inglés Thomas Harriot (1560-1621). Estos símbolos se impusieron sobre otros que se usaban para esos fines, entre ellos unos debidos a William Oughtred (1575-1660) y que aparecieron impresos -por primera vez- en 1647. Oughtred usó los signos de desigualdad propuestos por Harriot. Por su parte se le debe al matemático francés Bouguer en 1734 la introducción de los símbolos $\leq$ y $\geq$.

A Oughtred se le atribuye el uso de una equis pequeña *x* para indicar la operación de multiplicación, en lugar de una equis grande que ya era usada con esa finalidad y cuyo origen no se conoce con exactitud.

En lo relativo al símbolo ÷, éste parece que ya era usado por los comerciantes lombardos con el significado de 1/2; tuvo un amplio uso como símbolo de sustracción, y finalmente fue propuesto por el suizo Johann Rahn (1622-1676) como símbolo de división, apareciendo impreso por primera vez con este sentido en su obra **Teutsche Algebra**, en 1659. Este signo fue ampliamente adoptado en Inglaterra, mientras que los matemáticos continentales preferían el signo **:**. Para la división larga Stifel empleó en 1544 el símbolo ), mientras que Oughtred escribía 8)24(3 para la división de 24 entre 3.

Durante mucho tiempo para denotar la raíz cuadrada se usó la letra R, inicial de la palabra latina *Radix* la cual es una traducción del árabe *jidr* (raíz de una planta y usado por ellos para indicar raíz cuadrada). Para raíces de índices superiores a dos se empleaba el símbolo *R* seguido de un numeral o de la abreviatura de una palabra adecuada como $R3^a$ o *R cub.* El símbolo actual √ fue introducido alrededor de 1525 en Alemania por Christoff Rudolff ( 1499?-1545?) en su libro de álgebra **Die Coss**.

Descartes (1637) resolvió el problema de escribir potencias al usar x, xx, $x^3$, $x^4$, $x^5$, ... (obsérvese que siguió escribiendo xx en lugar de $x^2$.

Gauss mantuvo esta costumbre porque ambas formas ocupan el mismo espacio: dos caracteres); notación que se perfecciona (1655) con Wallis quien escribe $x^{-n}$ para denotar $1/x^n$ y $x^{1/n}$ para representar $\sqrt[n]{x}$. Se le debe también a Wallis la introducción del símbolo $\infty$.

En este proceso surge el símbolo π -inicial de la palabra griega περιμετροζ (perímetro)- para denotar la razón constante entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Este número *aparece escrito por vez primera en 1706 por la letra griega π.* (Sotelo, 1987, p. 43). Euler (1707-1783) emplea el símbolo e -inicial de la palabra exponencial- para denotar la base de los logaritmos neperianos. Asimismo, se debe a este insigne matemático la popularización, en 1737, de la letra π para simbolizar la razón constante entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, e introduce en 1779, la letra i para simbolizar a la unidad imaginaria. Al respecto se dice que se le debe a Euler *el uso de los símbolos e, π e i.* (Collette, 1986, p. 189) Sin embargo, es menester señalar que Euler no fue el primero en emplear la letra π (Collette, 1986, p. 194), lo cual se le atribuye a William Jones; pero, al Euler haberla adoptado éste contribuyó a establecer su uso. Asimismo Collette (1986, p. 194) da 1777 como el año en que Euler introduce la letra i para simbolizar a la unidad imaginaria.

Respecto del punto decimal se le atribuye a Napier su invención (Kasner y Newman, 1972, p. 74). Otro autor le concede el crédito a Stevin (Pelletier, 1958, p. 30); por otro lado, se dice que es a Leibniz a quien se le debe esta notación (Sotelo, 1987, p. 100). [5]

La notación factorial *n!* fue introducida por Christian Kramp en 1808.

Un hito en la simbolización matemática lo constituye la invención del cero por parte de los hindúes. Lo indicaban mediante un punto y su conocimiento llegó a Europa por intermedio de los árabes. Independientemente este invento fue hecho por la civilización Maya 500 años antes que los hindúes, siendo empleado en su sistema de numeración posicional de base 20.

---

[5] Cajori (1993) dedica una amplia discusión a este tema.

## IMPACTO DE LA TECNOLOGÍA EN EL SIMBOLISMO MATEMÁTICO

Ya se ha señalado que razones de impresión causaron un cambio en la notación de las fracciones. Asimismo, razones de esta misma índole privaron para hacer permanecer a los símbolos **e** e **i** lo cual es descrito por quienes afirman que en una oportunidad se sugirió que los símbolos adecuados para las constantes, **e** e **i** deberían ser, una especie de *espiral dextrorsa* (que se enrolla de izquierda a derecha) para **i** y una *espiral* que se enrolla en sentido contrario para **e**, a fin de evitar confusiones. Pero, los impresores se resistieron a hacer los nuevos tipos y los viejos símbolos prevalecieron. (Kasner y Newman, 1972, p. 97)

Cabe destacar por tanto, que la invención de la imprenta de tipos móviles por Gutenberg en 1440 ejerció un impacto significativo sobre la evolución del simbolismo matemático: por una parte lo **estandarizó** y por otra parte se convirtió en una especie de *camisa de fuerza* para la inventiva y la creatividad al negarse los impresores - en determinados momentos- a crear tipos especiales para satisfacer el deseo de los matemáticos.

Algo semejante a lo señalado en el párrafo anterior pudiera estar ocurriendo hoy día con el impacto que tiene el ordenador sobre todas las áreas de la sociedad actual -impacto ampliamente explicado por autores como Alvin Toffler (1980)- el cual tiene sus inmediatas repercusiones en la notación matemática.

Una consecuencia, que salta a la vista, es el hoy difundido uso -en los países hispanohablantes- del punto decimal en lugar de la coma decimal como era costumbre, uso que ha sido potenciado por la masiva utilización de las calculadoras de bolsillo. También se podría señalar el uso del símbolo Ø en lugar de 0 que igualmente nos llega por el influjo de la informática.

¿Qué impacto podría haber hacia el futuro? El autor cree que puede haber una **linearización** del lenguaje matemático a imagen y semejanza de los lenguajes de programación. En relación con este último hecho se señala que *las necesidades técnicas no autorizan ninguna derogación en la* ***escritura lineal*** *[negrillas añadidas] de los lenguajes de programación: así la construcción ab se traduce en a**b en Fortran.* (Glaeser, 1977, p. 49).

Sin embargo, es necesario destacar que los fabricantes de software han diseñado diversos productos que siguen la nomenclatura matemática. Así, por ejemplo, tenemos los manipuladores simbólicos (Mathematica, MathCAD, MAPLE), editores de ecuaciones (MATHTYPE), editores de ecuaciones dentro de los procesadores de palabras más populares (WINWORD, WORD PERFECT) y procesadores de palabras especializados para escribir textos científicos (LATEX).

## ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA SIMBOLOGÍA MATEMÁTICA

Se tiene como realidad tangible -por lo menos hasta ahora- que el lenguaje matemático escrito (¿y el oral?) no es lineal. A continuación se detallará esto.

El componente simbólico del lenguaje matemático se puede observar, inicialmente, conformado por símbolos atómicos: los dígitos (0, 1, 2, ..., 9); las letras del alfabeto latino (a, b, c, ..., z); las letras del alfabeto griego (α, ß, ..., ω); letras del alfabeto hebreo como ℵ; letras del alfabeto escandinavo como Ø; símbolos especiales ($<$, $=$, $>$, *, +, −, ., ÷, ∩, ∈).

Posteriormente, se tienen símbolos más complejos verbigracia las *combinaciones* que se pueden hacer con los dígitos; así, por ejemplo 23 y 32 poseen los mismos átomos (2 y 3) pero en diferente posición. Situación análoga ocurre con las fracciones 2/3 y 3/2 o con las diferencias 2-3 y 3-2. En los casos señalados la **posición** de los átomos juega un papel trascendental para establecer la diferencia de significación entre estos símbolos compuestos. *La posición se entiende como un signo* (Eco, 1988, p. 69), y por ende transmite significado.

Pero, no es solamente la posición una característica a observar. También lo es el **tamaño**. Consideremos los símbolos (que representan potencias) $2^3$ y $3^2$. Aquí intervienen conjuntamente posición y tamaño del significante.

Hay toda una constelación de símbolos compuestos: $a^2$ que puede indicar una potencia o un término con un superíndice, $a^2$ que indica un término con un subíndice, que simboliza un término con dos niveles de subíndices, $\int^{b} f(x)\,dx$, $\log_a(x)$, $D_f$, $f_x$, $(201)_4$, sen(x), $a_{ij}$, $A^t$, y muchos otros que sería largo enumerar.

Como se puede ver, en muchos de estos símbolos sus átomos no están todos en el mismo renglón; se encuentran situados en diferentes niveles y he aquí la **ausencia de linealidad**. Se afirma que *los matemáticos utilizan también construcciones no horizontales (fracciones, exponentes, diagramas flechados, etcétera).* (Glaeser, 1977, p. 49). Mientras que *la lengua es lineal. Esto es inalterablemente cierto en lo que respecta a la letra impresa; es más debatible con respecto a la lengua hablada, pero sigue siendo cierto*. (Hammer, 1974, p. 65) La dimensión simbólica del lenguaje matemático efectivamente no es lineal.

Aparecen, en el lenguaje matemático, símbolos con más de un significado (**polisemia**) como $a^2$ que podría ser una potencia o un término con superíndice. Igualmente se dan casos de dos símbolos que representan a un mismo objeto (**sinonimia**): Ø y { } ambos representan al conjunto vacío.

Por otro lado se tiene una complicación adicional. En nuestra cultura se escribe y se lee de izquierda a derecha y desde arriba hacia abajo. Esto es herencia de aquellos que comenzaron a escribir sobre barro.

> *Para toda persona que escribe sobre barro con la mano derecha, o con tinta sobre papel, la dirección de izquierda a derecha es superior, dado que no existe el mismo riesgo de estropear un signo al trazar a continuación el siguiente. (Moorhouse, 1961, pp. 158-159)*

Sin embargo, en otras culturas como la árabe, la hebrea, la china o la japonesa esto no es así. *En la escritura [china] los caracteres siguen una dirección vertical de arriba abajo, partiendo de la columna de la extrema derecha y de lo que se podría considerar como la última parte de un libro.* (Moorhouse, 1961, pp. 121-122) Más aún, se han dado casos de culturas que poseían un tipo de escritura que sigue el sistema boustrofedon: una línea de izquierda a derecha la siguiente de derecha a izquierda. Además, cabe destacar el Disco de Festo que se remonta al 1700 a. C. aproximadamente, el cual contiene una inscripción y *se supone que esta escritura* *seguía una dirección espiral hasta llegar al centro*. (Moorhouse, 1961, p. 75) Curiosamente algo así se le ocurrió al matemático Ulam para estudiar los números primos: *Ulam pensó que disponer los números al modo de la criba de Eratóstenes, de derecha a izquierda (sic)6 y de arriba abajo, era un modo bien artificioso de ordenarlos. A buen seguro, los hebreos o los chinos no lo hubieran hecho así, por que no escriben en tal sentido; tampoco un matemático debía pensar que tal disposición tuviera nada relevante, de modo que podía cambiarse para reordenar los números, por ejemplo, en espiral*. (Navarro, 1979, p. 79).

Pero, en la vida cotidiana también tenemos -todavía- un ejemplo atípico: el reloj de esfera y agujas (mientras no sea suplantado totalmente por el reloj digital) cuya lectura sigue un patrón circular.

## IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

La no linealidad de la *dimensión simbólica* -de hecho- hace que no se lea estrictamente de izquierda a derecha un texto matemático, ya que en éste -en muchas ocasiones- se entremezclan símbolos propios de la matemática con expresiones del lenguaje natural. Pero, adicional mente hay símbolos que rompen totalmente la convención del lenguaje natural (en nuestra cultura) de $\int_a^b f(x)\,dx$ el cual debe ser leído, en su primera parte, de abajo hacia arriba.

Además, hay expresiones matemáticas las cuales pueden ser leídas de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, como es el caso de $\mathbf{a<x}$; sin embargo, para la y el estudiante esto significa una dificultad ya que éste tiende a colocar la equis en el lado izquierdo para forzar la lectura de izquierda a derecha. Igual ocurre cuando se le pide a un estudiante resolver la ecuación $\mathbf{x-a=0}$; la tendencia es expresar el resultado como $\mathbf{x=a}$ (la equis a la izquierda). Si es la o el profesor el que resuelve el problema, también es usual en él esta preferencia y de no hacerlo así a las y los estudiantes les parecería que falta un paso para completar la solución del problema en referencia.

[6] **Debería decir de izquierda a derecha.**

Una explicación a esto (para el caso de las ecuaciones) es la siguiente:

> *Psicológicamente no es cierto que consideremos que la igualdad es perfectamente simétrica. En una experiencia reciente se presentó la igualdad 7 + 7 = 15 y se pidió corregirla. Todo el mundo corrigió poniendo 14 siendo que hubiera podido corregirse de una infinidad de maneras. Esto quiere decir que la igualdad tiene* ***un sentido privilegiado*** *[negrillas añadidas]. (Adda, 1987, p. 22)*

Esta explicación es fácilmente extensible al caso de las desigualdades. ¿Se deberá ello a nuestro hábito de leer y escribir de izquierda a derecha? ¿Ocurrirá lo mismo en otras culturas como la hebrea, la árabe o la china?

Además, cabe destacar que la competencia con símbolos matemáticos escritos pasa por varias etapas:

> *Los cinco procesos principales son: 1) la conexión de los símbolos individuales con los referentes; 2) el desarrollo de procedimientos de manipulación de símbolos; 3a) la elaboración de procedimientos para símbolos; 3b) la rutinización de los procedimientos para la manipulación de los símbolos; y 4) la utilización de los símbolos y de las reglas como referentes para la construcción de sistemas de símbolos más abstractos. El tercero y el cuarto proceso se enumeran juntos porque operan conjuntamente. (Hiebert, 1988, pp. 6-7)*

## LA DIMENSIÓN GRÁFICA (G) DE LA MLAB: ESTRUCTURA DE LA DIMENSIÓN G

Esta dimensión tiene su expresión, básicamente, en los niveles matemático y perimatemático dentro del contexto educativo. En menor cuantía aparece en el nivel metamatemático.

Es una dimensión que gran parte de los docentes y de los creadores de textos asocia de una manera natural a temas como el de geometría, pero que relegan a un segundo plano en cuando de otros temas se trata. Esto último es, empero, un craso error, por cuanto esta dimensión está ligada de manera muy estrecha a los procesos intuitivos.

La dimensión gráfica constituye –dentro de nuestro esquema– la tercera dimensión que caracteriza al discurso matemático.

Éste es en realidad un tipo de lenguaje simbólico (como antes se afirmara) pero que se toma separadamente para facilitar el análisis.

Esta dimensión se manifi esta en todas las ramas de la matemática, siendo algunas de ellas, como la geometría, la estadística descriptiva y la teoría de grafos, más propensas para su uso. Sin embargo, todas las ramas de la matemática son terreno fértil para su empleo; ya sea la teoría de conjuntos en donde se hace uso frecuente de los diagramas de Euler-Venn o la geometría diferencial al representar curvas y superficies; o bien la topología con sus diagramas, o la geometría analítica con sus innumerables gráficas. Es decir, por doquier se topa con este expresivo lenguaje de las matemáticas.

Pero, ¿cuál es la sustancia constituyente de esta dimensión?

> *En sus límites estrictos 'la gráfica' recubre el universo de las redes, el de los diagramas y, por último, el universo de los mapas [negrillas añadidas] que se escalonan desde la reconstitución atómica a la transcripción de las galaxias, atravesando por el mundo de las figuras, del dibujo industrial y la cartografía. (Bertin, 1982, p. 215)*

Para el autor recién citado la sustancia constituyente de esta dimensión está conformada por: **redes, diagramas y mapas.**

Por su parte Shuard y Rothery (1984, p. 45) consideran como entes constituyentes de esta dimensión: **las tablas, los gráficos, los diagramas, los planos y mapas, y las ilustraciones pictóricas.**

Como puede observarse los elementos considerados por Shuard y Rothery engloban a los mencionados por Bertin (las redes pueden ser consideradas como un tipo de gráficos).

Ha de notarse, no obstante, que estas categorías se entrecruzan y es a veces difícil decidir en cual de ellas clasificar un objeto matemático dado.

A los efectos de este trabajo, se considerarán parte integrante de esta dimensión a: **las tablas, las redes, los gráficos, los diagramas, los planos y mapas, las ilustraciones pictóricas.**

Pertenecen a esta dimensión: los **diagramas de flujo**, los **diagramas de Hasse**, los **histogramas**, las **tablas que definen las leyes de composición** en cualquier estructura finita, las **tablas que emplea el método simplex** de programación lineal, los **árboles de decisión y de probabilidades**, las **tablas de valores** asociadas a una función, las **gráficas de funciones** y tantas otras representaciones presentes en la matemática.

Puede notarse en la anterior enumeración de objetos matemáticos que la gran mayoría de ellos enuncian directamente la categoría a la cual pertenecen. Por su parte, los histogramas pueden situarse en la categoría de gráficas mientras que los árboles de decisión han de ubicarse bajo el rubro redes.

Caen bajo el epígrafe **ilustraciones pictóricas**, por supuesto, **los pictogramas** de uso frecuente en el campo de la estadística; así como todas aquellas representaciones pictóricas que sirven para ilustrar un texto o una clase; verbigracia la figura de una persona pensando, al margen de un enunciado matemático, para indicarle al lector que ha de efectuar una lectura cuidadosa del mismo (esto al estilo de la imagen de El Pensador de Rodin, artificio usado en algunos programas informáticos de ajedrez). Se da el caso de autores que construyen un texto basándose en estos elementos pictóricos como el libro elaborado por Swann y Johnson (1975), el cual se estructura al estilo de una tira cómica. También se inscribe dentro de esta modalidad el material instruccional elaborado por Alson (1996) cuyo diseño está centrado en la dimensión G, siendo las dimensiones V y S subsidiarias de la primera.

Se podría también incluir en esta categoría a las **matrices** y a las disposiciones como el **triángulo de Pascal**, las cuales se hallan a mitad de camino entre lo simbólico y lo gráfico, mostrándose con ello la frontera difusa que existe entre esta dimensión y la dimensión simbólica.

Todo lo dicho hasta el momento, acerca de la dimensión gráfica, se refiere casi exclusivamente al nivel matemático del discurso.

¿Cuál es entonces la manifestación de esta dimensión en el nivel perimatemático?

En este nivel del discurso matemático se encuentra una gran variedad de elementos que deben ser ubicados en la dimensión gráfica. Se tienen aquí: **cuadros, recuadros, subrayados, tipos de letras (mayúsculas[7], minúsculas, negrillas, cursivas), tamaño de las letras, colores.**

Los elementos antes señalados no caen dentro de ninguna de las categorías enumeradas con anterioridad y en razón de ello se ubicarán en una nueva la cual se designará con el nombre de **modificadores.**

Así, por ejemplo, Gid Hoffmann (1990) emplea en el capítulo dedicado a funciones letras mayúsculas combinadas con el subrayado para resaltar aquellos términos que va a definir o para señalar una observación. Asimismo, usa recuadros para anunciar los ejercicios colocando dentro de éstos tanto la palabra ejercicio (en mayúscula) como el número correspondiente. También emplea recuadros para encerrar los resultados de ejemplos que él resuelve.

Por su parte, Baldor (1962) hace uso copioso de colores.

**La finalidad explícita de los modificadores es resaltar** la totalidad o parte de un mensaje matemático, metamatemático, perimatemático o mezcla de éstos (mixto).

Se notará que los modificadores no son -en cierta medida- una parte intrínseca al mensaje en sí, sino que están superpuestos a éste. No obstante, ellos poseen una carga semiótica. Cumplen una función que puede ser fática, emotiva, y eventualmente, metalingüística, según sea el caso.

---

[7] El uso de letras mayúsculas y minúsculas se refiere aquí no al uso que éstas tienen dentro de las normas ortográficas del idioma español, sino a su utilización con la finalidad de llamar la atención del lector.

Como ya se señaló, la manifestación de esta dimensión en el nivel metamatemático es menos marcada que en los otros niveles del discurso matemático, por lo menos en lo que al contexto educativo se refiere.

## SEMIOLOGÍA DE LA DIMENSIÓN G

Diversos semiólogos se han aventurado a estudiar este asunto.

Son interesantes los planteamientos de Eco (1972) y de Bertin (1982).

A los efectos de este estudio se seguirán, básicamente, algunas de las ideas que al respecto tiene Bertin.

Para este autor toda imagen visual espontánea consta de tres dimensiones homogéneas y ordenadas: las correspondientes a **x** y **y** del plano ordinario las cuales definen la posición de la figura en el plano; más una dimensión z que corresponde a la variación del blanco al negro de la mancha elemental.

Estas dimensiones son descompuestas en **variables visuale**s. Para las dos primeras dimensiones las variables visuales coinciden con las dos dimensiones del plano: x y y; mientras que la dimensión **z** se desdobla en seis variables: Tamaño (t), valor (v), grano (g), color (c), orientación (o) y forma (f).

La interrelación de estas ocho variables visuales da lugar a una imagen cuyo carga informativa varía de acuerdo a las propiedades que poseen estas variables. Es deseable que la imagen transmita, prácticamente de un solo vistazo, su carga informativa: debe ser un ente holístico. Al respecto se afirma que *la estructura natural de la imagen permite por lo tanto transcribir y, luego, ver espontáneamente todas las relaciones que se establecen entre tres componentes [x, y y z], sean cuales fueran* (Bertin, 1982, p. 218). Más adelante se agrega que *una construcción no conforme con la imagen natural, la mayor parte de las veces resulta inútil.* (Bertin, 1982, p. 220)

Así, por ejemplo, si se muestra un mapa económico de un país, y se quiere señalar sobre el mismo el precio de la tierra, podría apelarse bien a utilizar para cada precio (o rango de precios) una forma distinta (cuadrado, círculo, triángulo) o bien una misma figura variando el tamaño de ésta. Se tiene entonces que la primera gráfica no está construida conforme a la imagen natural, mientras que la segunda sí lo está.

## IMPORTANCIA DE LA DIMENSIÓN G

Esta dimensión merece un tratamiento especial ya que constituye un auxiliar de primera línea dentro del quehacer pedagógico.

Como ya se señalara, ella está en estrecha vinculación con los procesos intuitivos.

Esta dimensión tiene una función doble: ***memoria artificial e instrumento de investigación*** *[negrillas añadidas]* (Bertin, 1982, p. 215).

Por su parte, las modernas teorías psicológicas cognitivas y las recientes investigaciones neuro-fisio-psicológicas del cerebro hacen que la dimensión gráfica adquiera un nuevo relieve.

De acuerdo con estas investigaciones existe una diferenciación cerebral, vale decir que los dos hemisferios cerebrales no realizan exactamente las mismas funciones, en lo que a los procesos cerebrales superiores se refiere.

Más aún, el cerebro está compuesto por tres cerebros superpuestos: el más profundo, el **cerebro reptílico**; luego le sigue el **sistema límbico** el cual es filogenéticamente la parte más antigua de la corteza cerebral, y se sabe que *está encargado de la conducta alimentaria...también está encargado [junto con el hipotálamo] del control de los ritmos biológicos, de la conducta sexual, de las emociones de cólera y temor, y de la motivación.* (Ganong, 1965, p.191); y finalmente se tiene la **corteza cerebral** llamada también **neocortex** la cual *es la sede de la memoria, el aprendizaje y el pensamiento abstracto.* (Jastrow, 1985, p. 138)

Es precisamente a nivel del neocortex donde los científicos encuentran la diferenciación/complementación entre el hemisferio izquierdo y el hemisferio derecho. Se le asocia al cerebro izquierdo cierto tipo de capacidades, entre ellas la de ser verbal y analítico; mientras que a su contraparte se le asocia con lo sintético y lo espacial. Asimismo, el lado izquierdo está ligado al razonamiento lógico y a los procedimientos secuenciales (algoritmos); por su parte, el lado derecho está unido a lo holístico y a lo intuitivo; el cerebro derecho es esencialmente procesador de imágenes y tiene percepción gestáltica.

Son estas características del modo de procesamiento del hemisferio derecho las que lo ligan profundamente con la dimensión gráfica del discurso matemático.

Además de las teorías ya señaladas y ligada a éstas se halla la *Teoría de las Múltiples Inteligencias* de Howard Gardner (1987) quien la contrapone a un factor único, denominado por muchos científicos *factor G*. Este *factor G* corresponde a un factor general (formulado por Spearman en su teoría de los factores en 1926) el cual es común a todas las operaciones cognoscitivas del individuo.

Gardner postula la existencia de las inteligencias: lingüística, musical, lógico-matemática, espacial y cinestesicocorporal.

La inteligencia lingüística es el reino de la dimensión V, mientras que la inteligencia espacial lo es de la dimensión G. *[Las capacidades espaciales] se emplean cuando uno trabaja con descripciones gráficas -versiones bi y tridimensionales de escenas del mundo real- al igual que otros símbolos, como mapas, diagramas o formas geométricas.* (Gardner, 1987, 201)

Más adelante agrega:

> *Para muchos, la inteligencia espacial es la 'otra inteligencia': la que debiera servir como base de comparación, y ser considerada de igual importancia que la 'inteligencia lingüística'. Los dualistas hablan de dos sistemas de representación; un código verbal y un código de imágenes: los localizadores colocan el código lingüístico en el hemisferio izquierdo, y el código espacial en el hemisferio derecho. (Gardner, 1987, p. 203)*

## EL SIGNIFICADO

Se puede afirmar que ***el problema fundamental de la enseñanza de las matemáticas consiste en la construcción del significado más que en la cuestión del rigor*** *[negrillas añadidas]* (Thom, citado en Pimm, 1990, p. 32) y ello, por supuesto, está íntimamente vinculado con el lenguaje matemático y con las maneras en que representamos los objetos de esta disciplina.

Acogemos en toda su extensión esta afirmación del afamado matemático René Thom.

Es justamente el significado el aspecto medular sobre el que hemos estado trabajando en la gran mayoría de las ideas antes expuestas.

Tal es la importancia de este aspecto que Kilpatrick y otros (2005) afirman que,

> ***La discusión del significado da lugar a diferentes filosofías de la matemática*** *[negrillas añadidas]. (p. 2)*

Afirman Kilpatrick y otros (2005) que *el significado de X en el aula es formado por complejas interacciones entre el docente y los alumnos con referencia al contenido a ser enseñado*. (p. 13) Esta visión concuerda con la presentación, que antes hiciéramos, de la dinámica del aula modelada vía el triángulo didáctico interpretando las interacciones comunicativas mediante el modelo de Jakobson y el esquema de Pêcheux.

No obstante hay que resaltar que, como bien lo señala Ferreira (1999),

> *Durante mucho tiempo (y tal vez hoy aún ocurra a gran escala), la enseñanza de la matemática dio énfasis (cuando no exclusividad) a su aspecto meramente sintáctico, preocupándose por primar en los alumnos las técnicas de cálculo, con rígidas exigencias de habilidades y rapidez –exigencias propias de actividades técnicas. (pp. 159-160)*

Esto es justamente lo que acontece usualmente y se refiere a un modelo de enseñanza/aprendizaje tradicional, calculístico, en el cual se prioriza el *momento de la técnica*.

La complejidad de la problemática asociada al significado, aún para los lingüistas, queda reflejada en el título de la obra *The meaning of meaning* de Ogden y Richards, la cual apareció por vez primera en 1923.

De hecho,

> *El 'significado' es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje. En* ***The Meaning of Meaning****, Ogden y Richards recogieron no menos de dieciséis definiciones de él –veintitrés si se cuenta separadamente cada subdivisión- (Ullmann, 1976, p. 62)*

Son diversas las interrogantes y diversas son también las respuestas que a ellas formulan las distintas aproximaciones teóricas de la educación matemática en lo que concierne al estudio del significado en educación matemática. Lo que sí es cierto, sin lugar a dudas, es que todas los enfoques de la educación matemática se ocupan de esta problemática.

Podría preguntarse, por ejemplo: ¿Se transmite el significado? ¿Se construye? Al respecto también existe una incesante polémica.

Los constructivistas defienden el punto de vista de la **negociación** del significado, en donde éste es adquirido como consenso en el proceso de discusión dentro del aula y como opuesto a transmisión. (Zevenbergen, 1996, p. 106). Al respecto se señala que *en el aula de matemáticas, el lenguaje y el significado son negociados entre el docente y los alumnos y entre los alumnos mismos.* (Anghileri, 1995, p. 4) Un punto de vista similar es el adoptado por los interaccionistas simbólicos.

Afirmamos que esta construcción (del significado) tiene como premisa el uso de múltiples representaciones para los conceptos matemáticos. Así, por ejemplo, se aboga por las múltiples representaciones, *porque cada representación enfatiza y suprime varios aspectos de un concepto*... (Piez y Voxman, 1997, p. 164).

Esto está en consonancia con la posición de Dienes.

Las posiciones pragmatistas, como lo señala Ferreira (1999),

> *Incluyen dentro de las preocupaciones sobre el significado la situación en que se hace y/o se usa la matemática. (p. 157)*

El caso extremo de esta posición lo constituye **Wittgenstein**, para quien el **significado** de una palabra **es el uso** que se hace de ella.

Respecto del significado Eco (1972) nos dice que,

> *Desde el punto de vista semiótico [el significado de un término] no puede ser otra cosa que una **unidad cultural**. En toda cultura una unidad es, simplemente, algo que está defi nido culturalmente y distinguido como entidad. Puede ser una persona, un lugar, una cosa, un sentimiento, una situación, una fantasía, una alucinación, una esperanza o una idea. (p. 82)*

Y más adelante agrega:

> *Reconocer la presencia de estas unidades culturales (que más tarde serán los significados que el código hace corresponder con el sistema de los significantes), equivale a entender **el lenguaje como fenómeno social**. [Negrillas añadidas] (p. 83)*

## LAS REPRESENTACIONES PROTOTÍPICAS

La adquisición de significados en matemáticas se encuentra anclada en las representaciones de los objetos matemáticos.

El proceso de representación en matemáticas es harto complejo y está lleno de **representaciones prototípicas**, las cuales van acompañadas -aunque el docente no se percate de ello- de significados secundarios, que cual una rémora impiden la cabal comprensión de muchos conceptos. A título de ejemplo, mencionemos la forma en que usualmente se representa el triángulo:

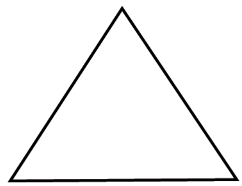


*Figura 3*

Como podemos observar, a primera vista este tipo de representación pareciera totalmente normal. Es digámoslo así la usual. Casi nadie se atrevería a decir que tiene algo de malo representar el triángulo de esa manera. Sin embargo, si miramos con cuidado, notamos que el triángulo semeja a uno isósceles: pero ésta es una característica adicional que sólo la poseen ciertos y determinados triángulos, no un triángulo cualquiera. Por otra parte, uno de sus lados yace paralelo a la línea del suelo, lo cual tampoco es una característica intrínseca al concepto de triángulo. Además, sólo están señalados sus lados, mientras que su interior pareciera vacío: es decir, el objeto triángulo está representado sólo por los tres lados.

Estas características, a las que hemos aludido, parecen o pudieran parecer intrascendentes. No obstante pueden tener un impacto didáctico inmenso. Podrían ser obstáculos didácticos.

Si se dibuja un triángulo con los tres lados desiguales (triángulo escaleno), muchas personas al enfrentar a este objeto no se sienten cómodas con él.

No es poco frecuente encontrar una o un estudiante para el cual la siguiente figura no sea un triángulo.

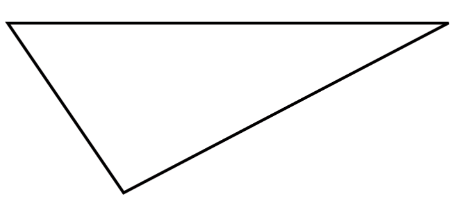


*Figura 4*

Puesto que está colocado de punta y *si siempre los triángulos que se muestran en clase o en los textos descansan sobre un lado, entonces algo que descanse sobre un vértice no sería un triángulo.*

Pero, la tercera característica que mencionamos tiene aún visos de mayor gravedad. Es usual la queja de que los estudiantes confunden círculo con circunferencia, y tratamos de evitar tal confusión rellenando el interior del círculo, coloreándolo o rayándolo. Pero, no se mantiene este convenio con el triángulo. Entonces, ¿ cuál es el significado que le atribuye la o el estudiante a la solicitud del docente de calcular el área del triángulo? Obviamente, la única respuesta posible es la **aplicación mecánica de una fórmula (vacía de significado)**.

Si duda de lo que decimos, haga la prueba: pídale a diversas personas que dibujen un triángulo y observe qué producen.

Veamos de seguidas otros casos de representaciones prototípicas.

Un caso paradigmático son las **asíntotas**.

En su gran mayoría los textos de cálculo toman como primer ejemplo, para ilustrar la noción de asíntota, la gráfica de la función:

$$f : R^* \to R$$

dada por f(x)=1/x.

En este caso, la asíntota horizontal (que es el eje x) no corta a la gráfica de la función.

Acto seguido colocan otros ejemplos, en los cuales, al igual que en el primer caso, la gráfica de la función no corta a la asíntota horizontal que es el eje x.

**La noción de asíntota asimilada por la mayor parte de los estudiantes es una en la cual la asíntota es una recta que no corta al eje x.**

Sin embargo, esa no es una propiedad definitoria de las asíntotas. De hecho, podemos considerar el caso de la función:

$$f : R^* \to R$$

dada por $f\left(x\right)=\dfrac{sen\left(x\right)}{x}$.

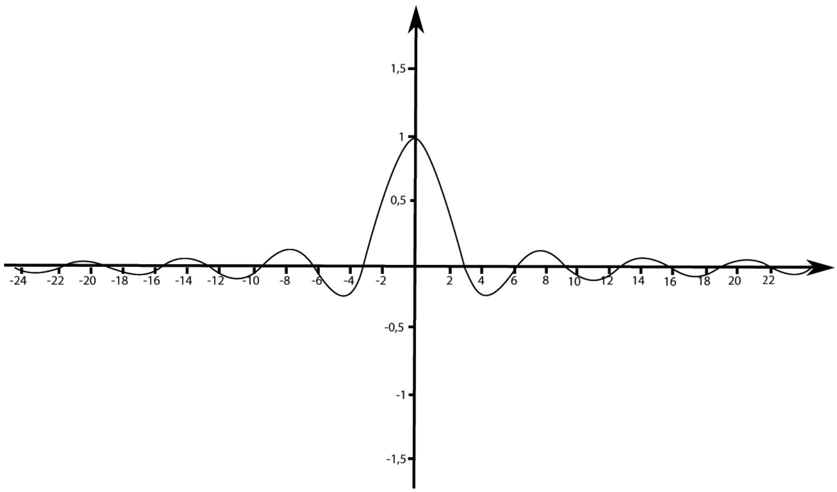



*Figura 5*

En este caso no sólo la gráfica corta al eje x ¡sino que **lo hace infinitas veces**! La asíntota es el eje x.

El caso de las asíntotas es similar al que acontece con las rectas tangentes: la insistencia de trazar tangentes a curvas como la circunferencia, o gráficas de funciones que son o bien cóncavas o bien convexas, crea la ilusión de que la tangente es una recta que corta en un sólo punto.

Si se tomara una gráfica como la siguiente (correspondiente a f(x)=x3−3x), la y el estudiante tiene dificultades por el hecho de que la recta tangente en **x=−1** corta nuevamente a la curva.

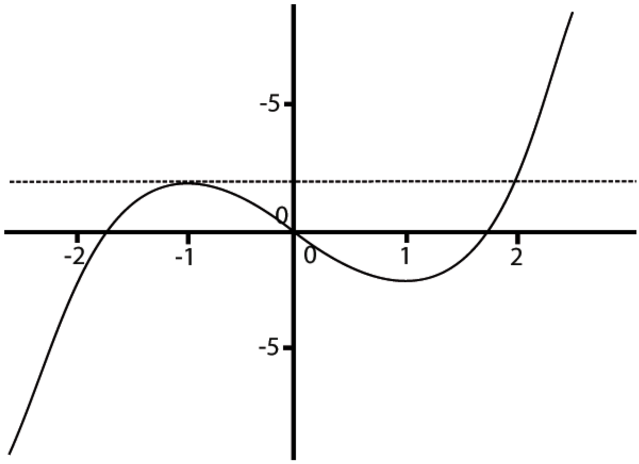



*Figura 6*

Pero, además de los problemas de representación antes citados, también muchos textos tienen erradas las definiciones de esos conceptos. Tampoco se aclara, que la idea de que la recta tangente corte en un solo punto se mantiene, a condición de mirarla como **propiedad local**.

Esta idea, de diferenciar propiedades locales de las globales resulta útil al trabajar con máximos y mínimos y estudiar máximos (mínimos) locales y globales.

Otro ejemplo de representaciones prototípicas es el caso de las fracciones.

Por una parte, hay un abusivo uso del modelo parte-todo. Además, el desarrollo del tema tampoco se hace consistentemente alrededor del modelo adoptado. Pero, por otra parte, se desarrollan falsas creencias en la y el estudiante: las representaciones prototípicas son o bien la clásica *torta* dividida en tantas partes **iguales** como indica el denominador y tomando tantas partes **contiguas** como lo indica el denominador o un rectángulo subdividido en tantas partes **iguales** como señala el denominador y del cual se seleccionan tantas otras partes **contiguas** como señala el numerador.

Nos preguntamos, ¿por qué han de ser contiguas? No existe nada en el modelo que obligue a la contigüidad de las partes seleccionadas.

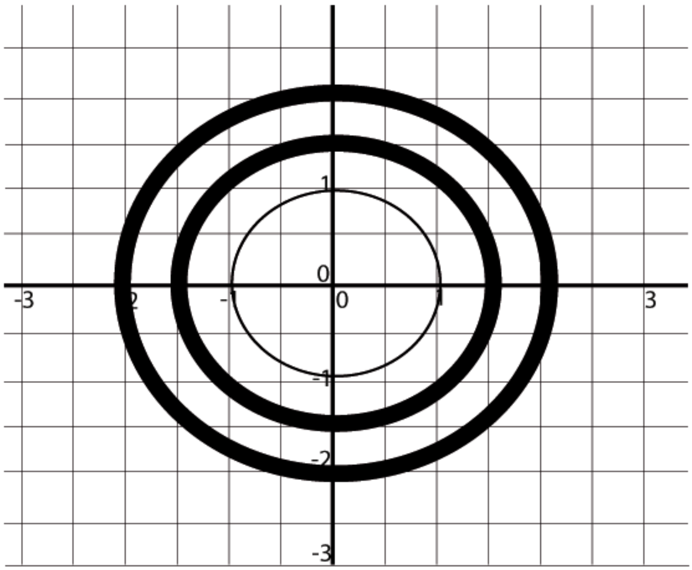



*Figura 7*

Más aún, incluso el hecho de tomar partes iguales es distorsionado tomándolas siempre congruentes. Esto impide considerar representaciones como la siguiente e interpretar la fracción como una razón:

Aquí la igualdad (congruencia) de las figuras es sustituida por la equivalencia (figuras de igual área). Ello se refiere a que **las subfiguras tengan igual área, no necesariamente han de ser congruentes**.[8]

En la figura 3, cada anillo, así como el disco central poseen la misma área. Se han tomado radios apropiados para que esto ocurra. La parte sombreada representa la fracción 2/5.

[8] **Algunas ideas interesantes para abordar figuras no congruentes pero equivalentes pueden obtenerse en Viedma (s/f) y en Boltianski (1981).**

Si usted cree que esto es un rebuscamiento, piense sólo en una situación en la cual varios propietarios de una parcela (la cual hemos de pensar con forma irregular) desean vender los 2/5 del terreno. ¿Cómo encontrar esta fracción? También está el caso de la definición de la velocidad en el cual incluso se considera la relación entre dos magnitudes distintas.

El texto de Gonzalez (1987) aborda diversos aspectos de las fracciones, entre ellos la interpretación de éstas como razones.

Coloquemos otro ejemplo más de representaciones prototípicas. Tomemos esta vez el caso de las funciones.

Evidentemente existen múltiples formas de representación para las funciones: mediante tablas de valores, gráficos, fórmulas, diagramas de fl ujo, algoritmos, diagramas de Venn, expresiones literales; a través de las teclas de una calculadora; o empleando la recursividad.

De esta variedad de formas de tratar con funciones, la enseñanza ha primado algunas: las fórmulas y los diagramas de Venn.

A partir de las fórmulas se generan tablas de valores y a veces los gráficos, todo ello a posteriori y no para introducir el concepto o para manipular las funciones; es decir, la representación predominante o prototípica es mediante **fórmulas**.

La otra representación prototípica (principalmente en la época de boga de la Matemática Moderna) es la realizada mediante **diagramas de Venn**.

Más adelante, mostraremos algunos extractos tomados de libros de texto en los cuales podremos observar cómo aparecen las representaciones prototípicas de los triángulos.

Pero no se piense que las representaciones prototípicas sólo aparecen en la dimensión G. Como vimos, al estudiar la dimensión S, la preferencia de escribir de izquierda a derecha también origina representaciones prototípicas.

## DIENES Y LA VARIABILIDAD

Pasemos ahora a explicar un poco las concepciones que Dienes maneja acerca del aprendizaje de las matemáticas, concepciones las cuales nos conducen al problema de la representación.

Dienes (1977) parte de dos interrogantes fundamentales: **¿qué significa entender?** y **¿qué significa aprender?**.

Comienza haciendo un deslinde de su concepción con las posturas conductistas, en razón de lo cual puntualiza que *la relación estímulo-respuesta constituye un método que, en el plano tanto de la comprensión como del aprendizaje ulterior, representa una barrera en la mayoría de los casos*. (p. 7) Una vez realizada la anterior aclaratoria él se sitúa en un punto de vista de acuerdo con el cual *sólo a partir de un entorno [contexto] rico puede el niño constituir sus conocimientos* (Ibíd.), y esto lo concibe por analogía con el aprendizaje de la lengua materna.

Para Dienes son importantes los procesos de **abstracción**, de **generalización** y de **comunicación**. En torno al primero, el **proceso de abstracción**, señala que se pueden distinguir seis etapas.

A continuación haremos una síntesis apretada de estas etapas.

En la **primera etapa**, el **entorno** –que nosotros identificamos con el contexto– juega un papel crucial. En su concepción el aprendizaje es identificado con una cierta **modificación del comportamiento para adaptarse al entorno**.

Para Dienes *la adaptación tiene lugar en una fase que podemos llamar de libre juego*. (op. cit., p. 8) Este juego se desarrolla al enfrentar al niño ante situaciones, por lo cual *se hace necesario [...] inventar un entorno artificial*. (pp. 8-9) Él ejemplifica señalando que uno de estos entornos artificiales es el generado por el universo de los Bloques Lógicos, en los cuales *varían de forma sistemática las siguientes variables: el color, la forma, el grosor y el tamaño. Evidentemente, no hay por qué limitarse a estas cuatro variables*. (p. 9)

Es interesante notar en este caso, que varias de estas variables –color, forma, tamaño– son consideradas por Jacques Bertin a efectos de la construcción de gráficas planas. ¿Será ello mera casualidad o tras ello existe un importante fundamento didáctico a ser considerado para la estructuración de situaciones de aprendizaje?

Una característica *sine qua non* de esta etapa lo constituye la **libre interacción del niño con el material**.

La **segunda etapa** para Dienes es una etapa en la cual el juego ya no es libre. El niño percibe restricciones y *se da cuenta de las regularidades impuestas a cada situación. [... deberá] jugar contando con unas restricciones que se le impondrán artificialmente.* (p. 9)

Pasemos ahora a echar un vistazo a la **tercera etapa**. Afirma Dienes que *evidentemente, jugar a juegos estructurados según las leyes matemáticas relativas a una estructura matemática cualquiera, no es aprender matemática.* (op. cit., p. 10) La pregunta que se formula llegado a este punto es el cómo abstraer las nociones y conceptos matemáticos a partir de las experiencias realizadas en las etapas anteriores. A tal fin se plantea el que los niños *jueguen a juegos que posean la misma estructura, pero que tienen una apariencia diferente para el niño.* (Ibíd.) Alrededor de este planteamiento se ubica el importante concepto matemático de isomorfi smo el cual es empleado aquí para la planificación didáctica y el diseño de situaciones de aprendizaje. De lo que se trata según Dienes es que el niño se apropie de *la estructura común de los juegos* y esto es lo que para él representa una **abstracción**. El medio para lograr construir los juegos isomorfos está en la presencia de diversas variables y que cada una de ellas pueda asumir distintos valores.

La **cuarta etapa** se centra en el **proceso de representación**. Plantea Dienes que *antes de tomar plenamente conciencia de una abstracción, el niño necesita un proceso de representación. [...]Una de estas representaciones puede ser un conjunto de gráficos, puede ser un sistema cartesiano, puede ser un diagrama de Venn, o cualquier representación visual o incluso auditiva*. (op. cit., p. 11) Como vemos se tiende a un proceso de formalización creciente.

La siguiente etapa, la **quinta**, corresponde a un nivel superior. *Tras la introducción de una representación, o incluso de varias representaciones de la misma estructura, resultará posible examinar dicha representación. [...] necesitamos una descripción de lo que hemos representado.* (Ibíd.) Agrega Dienes que *necesitamos, evidentemente, un lenguaje, [...] esta quinta etapa debe venir acompañada de la invención de un lenguaje y de la descripción de la representación a partir de este lenguaje inventado.* (op. cit., p. 12) Notamos aquí cierta similitud con la **institucionalización** que propone Brousseau.

En la etapa fi nal, la **sexta**, Dienes se propone *limitar la descripción a un dominio finito, con un número finito de palabras. Ello implica la necesidad de un método para llegar a ciertos puntos de la descripción, dada una primera parte que tomamos como punto de partida.* (Ibíd.) Se trata de la introducción aquí de los mecanismos de validación matemática: las pruebas; y nosotros agregaríamos la necesidad de introducir además la argumentación.

Las etapas planteadas son en principio de complejidad creciente. Afirma Dienes (1971) que

> *Si los niños han de asimilar las relaciones con rapidez y efectividad con respecto a cualquier estructura matemática que queramos enseñarles, debemos presentársela con diversas materializaciones de esa estructura en determinado universo del discurso, para ayudarlos a encontrar la diferencia entre los ejemplares y los no ejemplares. Esto implica el uso de dos principios que pueden formularse así:*
>
> *a. El principio de **materialización múltiple***
> *b. El principio del contraste.*
>
> *La presentación de muchas materializaciones asegurará que eventualmente sólo se retenga la estructura esencialmente matemática de todas las situaciones materializadas, de modo que ejemplares no encontrados previamente serán a pesar de ello reconocidos como poseedores de la citada estructura matemática. Los ejemplos de contraste están para asegurar que las situaciones que no poseen la estructura matemática serán reconocidos como carentes de ella. (p. 28)*

Recalquemos aquí que Dienes enfatiza mucho en la noción de estructura, lo cual hace ver la concepción estructuralista de la matemática que subyace a su planteamiento didáctico. Por otra parte, el *Principio de materialización múltiple* lo llamó él *Principio de variabilidad perceptiva* en su libro *Building up mathematics*.

Veamos cómo son percibidos los planteamientos de Dienes por otros educadores como es el caso de Nicole Picard.

Picard (1970) haciendo referencia a Dienes indica que

> *Los principios del Método de Dienes se fundamentan en los trabajos de Piaget y en los de Bartlett, así como en sus propias observaciones. Son los siguientes:*
>
> 1. ***Principio de constructividad.*** *La construcción precede al análisis y conduce hasta él hacia los doce años;*
>
> 2. ***Principio de variabilidad matemática.*** *Haciendo variar lo más ampliamente posible a las variables, hacemos aparecer claramente lo que es invariante durante la variación;*
>
> 3. ***Principio de variabilidad en la percepción.*** *Para acordar la mayor extensión posible a las diferencias individuales en la formación de los conceptos y para llevar a los niños a adquirir el sentido de la abstracción matemática, la misma estructura será presentada bajo la forma de equivalentes perpetuos lo más variados posibles. (p. 16)*

*Esta autora adopta los tres principios de Dienes antes mencionados y, basándose en Piaget, agrega un cuarto principio: el de la utilización de las* ***representaciones.*** *Con respeto a las representaciones haremos unos comentarios más adelante. Afirma Picard que* ***sin entrar en el detalle de su adquisición, podemos decir que todas las representaciones tienen en común el carácter de poder ser a la vez traducidas por un dibujo y formalizadas.*** *(op. cit., p. 18).*

Por su parte, Dienes (op. cit., p. 29) afirma que

> ***Nos hemos referido al principio de variación de todas las variables matemáticas pertinentes como principio de variabilidad mate-mática. Mediante la variación máxima de las variables nos aseguramos que se ha de ver lo que es esencialmente invariante durante la variación****. A lo cual Dienes agrega que* ***aparte de la observación de los principios de materialización múltiple, de contraste y de variación matemática, hay muchos otros pasos que se pueden tomar para convertir al proceso del aprendizaje de las estructuras matemáticas en más efectivo y más agradable para los niños****. (Ibíd.)*

Resnick y Ford (1990) aseveran que

> *Dienes estudia el problema de diseñar una enseñanza significativa (una enseñanza que tenga en cuenta tanto la estructura de las matemáticas como las capacidades cognoscitivas del estudiante) desde su punto de vista de profesor de matemáticas. (p. 143)*

Continuemos con la visión de Dienes a través de Resnick y Ford. De acuerdo con estas autoras,

> *Dienes opina que para que los conceptos matemáticos se puedan abstraer debidamente de una serie de episodios de aprendizaje, los conceptos se deben presentar en* ***materializaciones múltiples****, es decir, los niños deben trabajar con materiales de tipos diferentes, cada uno de los cuales materialice el concepto en cuestión. [...] Según Dienes, las diversas materializaciones deben diferenciarse entre sí todo lo que sea posible (principio de la* ***variabilidad perceptual****), de forma que los niños sean capaces de «ver» la estructura desde varias perspectivas diferentes, y de construirse un rico almacén de imágenes mentales que rodeen a cada concepto. [...] Las materializaciones múltiples deben permitir también la manipulación de toda la gama de variables matemáticas que se asocian a un concepto: es el principio de Dienes de la* ***variabilidad matemática****. Se supone que las* ***variaciones matemáticas*** *clarifican hasta qué punto se puede generalizar un concepto a otros contextos. (op. cit., p. 149).*

Una acotación adicional es que

> ***Dienes cree que siempre que sea posible se deben tratar los conceptos en sus manifestaciones geométricas, físicas e incluso sociales, además de en sus manifestaciones aritméticas y algebraicas*** *[negrillas añadidas]. (Resnick y Ford, 1990, p. 150)*

Esta acotación de Resnick y Ford pone a la teoría de Dienes en sintonía con la **Teoría de las Múltiples Inteligencias de Howard Gardner**. Es así como Oteiza y Miranda (2001) afirman que *la generalización, proceso básico en la matemática, se fundamenta en la extracción común de la multiplicidad. Los trabajos de Howard Gardner muestran que, además, se posibilitan caminos a quienes muchas veces han estado fuera de la comprensión de las vías preferentes de entrega de conocimiento: la forma eminentemente verbal-formal de presentar la matemática.* Como vía alterna se propone e*nseñar a manejar siempre múltiples representaciones, y de naturalezas distintas (motoras, kinestéticas, visuales, auditivas, verbales, simbólicas, etc.) y enseñar a conectarlas entre sí (estrategia similar a la de buscar 'varios puntos de entrada', que recomienda el psicólogo de la educación Howard Gardner).* (Oteiza y Miranda, 2001).

Nos hemos apoyado ampliamente en la exposición que de la teoría de Dienes hacen Resnick y Ford por cuanto dichas autoras asumen una posición amplia y no restringida (como a nuestro juicio hace Brousseau) de sus planteamientos. Nuestra interpretación de la teoría de Dienes está cercana a la que hacen Resnick y Ford, y trataremos mediante algunos ejemplos de clarificar algunos puntos.

A efectos de ilustración consideraremos los **problemas de tipo aditivo**, los cuales son ampliamente estudiados por Vergnaud (1995). Bajo el título de **problemas de tipo aditivo** este autor engloba aquellos cuya solución sólo requiere de las operaciones de adición y sustracción y clasifica a éstos en seis categorías:

1. dos medidas se componen para dar lugar a una medida;
2. una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida;

3. una relación une dos medidas;

4. dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación;

5. una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo;

6. dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

Por ejemplo, corresponde a la primera categoría el problema *Pablo tiene 6 metras de vidrio y 8 de acero, luego tiene en total 14 metras*; mientras que el enunciado *Pablo ganó 6 metras ayer y perdió hoy 9, cuyo resultado es que en total perdió 3* corresponde a la cuarta categoría.

Viendo esta propuesta al trasluz de la teoría de Dienes, podríamos asociar aquí la noción de *variabilidad matemática*, la cual está presente al considerar como elemento variable precisamente a las categorías señaladas por Vergnaud.

Otra situación que traemos a colación nuevamente es la referida a la enseñanza de las fracciones[9] debido a la importancia que este tópico tiene en la enseñanza elemental y por los problemas didácticos asociados a la enseñanza/aprendizaje de este tema.

En lo que a este tópico se refiere hemos de recordar que las fracciones pueden ser consideradas como una relación **parte-todo**, como un **cociente**, como una **razón**, como un **operador**, como una **medida**. Existen muchos estudios al respecto, pero uno muy interesante es el de Mancera (1992). Vemos aquí también en acción los principios de variabilidad. Al respecto de este tema, y en virtud del principio de variabilidad, Dienes (citado por Clemente Garduño y otros, 2001) dice que *si queremos mantener la enseñanza de las fracciones decimales en la introducción del número decimal, para que sean bien entendidas por nuestros alumnos es necesario que tomen conciencia de la existencia de otras fracciones, de las que la decimal es un caso particular*.

[9] En el apartado *Las representaciones prototípicas* ya habíamos discutido algo acerca de este asunto. Asimismo, se consideró el tema de funciones.

Otro ejemplo ilustrativo tiene que ver con las funciones, tema que ya abordáramos antes y que retomamos ahora. En Beyer (1996) se hace referencia a diversas maneras de conceptuar y de representar a este importante objeto matemático. La aplicación del principio de variabilidad queda expuesta con el uso de tablas de valores, diagramas de Venn, gráficas, diagramas de flujo, fórmulas, etc.

Todavía hemos de mencionar un trabajo reciente de Dienes (2000), en el cual él aplica su Teoría de las Seis Etapas para la enseñanza de los números enteros.

Los planteamientos de Dienes quien expresa, por una parte, que *la presentación de muchas materializaciones asegurará que eventualmente sólo se retenga la estructura esencialmente matemática de todas las situaciones materializadas* y, por otra parte, que *mediante la variación máxima de las variables nos aseguramos que se ha de ver lo que es esencialmente invariante durante la variación* nos van a conducir directamente a discutir el problema de la *ostensión*. Este tópico lo discutiremos más adelante.

Para finalizar este apartado, mostraremos un modelo que plantea Lesh sobre las múltiples representaciones.

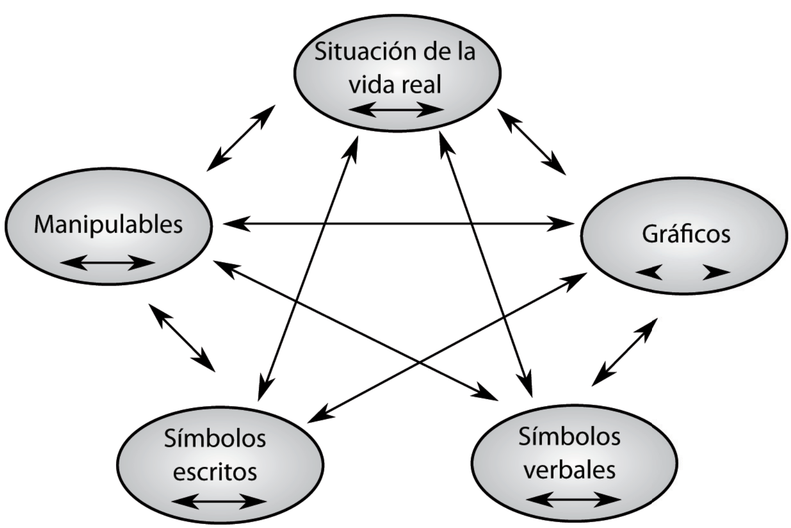



*Figura 8*

Cramer y otros (1997) afirman que

*Este modelo para enseñar y aprender refleja la estructura teorética sugerida por Jean Piaget, Jerome Bruner, y Zoltan Dienes. Richard Lesh, un director del RNP, sugirió un modelo instruccional el cual muestra claramente como organizar la instrucción de manera que los niños estén activamente envueltos en su aprendizaje. Considere la fi gura que se muestra arriba. Lesh sugiere en este modelo que las ideas matemáticas pueden ser representadas en las cinco maneras mostradas allí. Los niños aprenden por medio de las oportunidades de exploración de ideas en estas diferentes maneras y por medio de la realización de conexiones entre las diferentes representaciones. Este modelo guió el desarrollo del currículum RNP.*

## LAS SITUACIONES DE PRODUCCIÓN, LA DESCRIPCIÓN Y LA OSTENSIÓN: SU VINCULACIÓN CON EL SIGNIFICADO

Introduzcámonos ahora en los planteamientos formulados por Alson[10] (2000).

Alson emplea una noción de situación, pero en un sentido diferente al de Brousseau. Él habla de **situaciones de producción**, las cuales se caracterizan por *producir un objeto a partir de otro objeto utilizando una acción hecha por él [el sujeto]* (p. 3); el proceso de producción se realiza mediante un procedimiento el cual es definido como *una sucesión de operaciones que permiten a partir de un objeto obtener otro*. (p. 2) A esto le agrega que *el procedimiento es a su vez un objeto*. (p. 3). No obstante, como punto de coincidencia con la teoría de Brousseau encontramos la importancia que se le asigna a la acción del sujeto. Éste es también un punto convergente con planteamientos formulados por Dienes.

Las situaciones de producción las cataloga en cuatro rubros: algorítmicas, significantes, de interpretación y de formalización. Aclara que *la situación de producción es un concepto de naturaleza diferente al de*

[10] Nos referiremos siempre, de aquí en adelante y cuando no hagamos mención explícita de lo contrario, a este trabajo.

*situación didáctica o adidáctica, dado por Brousseau*. (p. 21) Sin embargo, podríamos preguntarnos qué tipo de relación es posible establecer entre las situaciones de Brousseau y las de Alson. Una base común se halla al aceptar ambos autores, así como lo hace también Dienes, elementos de la teoría de Piaget, especialmente su visión del aprendizaje por asimilaciones y acomodaciones.

Tras el planteamiento de Alson subyace el problema de la **significación** y el de la adquisición del saber (conocimiento). Es de hacer notar que Alson hace una distinción entre **saber** y **conocimiento**.

Para el manejo de los objetos matemáticos Alson apela a la noción de **descripción**, la cual formaliza en su trabajo. Alson coincide con otros autores en considerar la descripción como una *definición deficiente*, la cual sin embargo posee ventajas didácticas por cuanto permite *tratar de identificar, actividades y objetos que podrían ser calificados de descriptivas y descripciones respectivamente, en el proceso de construcción y difusión de saberes matemáticos, de su aprendizaje y enseñanza*. Agrega que *es más bien inspirarse en una función, operación u objeto del lenguaje natural, como puede serlo la descripción, para iniciar una elaboración en un lenguaje formal que en algunos aspectos reproduzca, en dicho lenguaje, alguna de las funciones que la descripción hace en el lenguaje natural.* (p. 25).

Es de destacar que muchos de los objetos que entran en juego en el estudio de la didáctica no son objetos propiamente matemáticos. Por ejemplo, se refiere Alson a la Tabla de Variaciones de una función, la cual cataloga como *un objeto extraño a la matemática* (p. 66), [11] pero que *pensado bajo esa perspectiva el Tableau juega un papel análogo al de la descripción en el sentido taxonómico de la época clásica*. (Ibíd.) Sólo ciertas características resaltantes de la función son tomadas en cuenta, reduciendo su caracterización de los infinitos puntos del dominio y del rango a un número finito de éstos. Estos objetos actúan como un dispositivo (en la nomenclatura de Alson) o **artefacto** si asumimos la terminología de Pinto dos Santos y Matos.

---

[11] Hemos de resaltar aquí que en las interacciones didácticas aparecen con frecuencia muchos objetos ajenos a la matemática propiamente dicha, tal es el caso por ejemplo de los productos notables.

Alson muestra esto mediante el proceso de construcción de la gráfica de una función. En realidad el proceso se da en dos etapas bien diferenciadas, cada una de ellas modelable por una situación de producción. En verdad esto puede ser concebido como un proceso de traducción de un tipo de representación (analítica o algebraica) a otra (geométrica); sin embargo, esta **traducción** no se hace en forma directa, requiere de un paso intermedio: la construcción del tableau.

La primera situación de producción consiste en partir de la fórmula que especifica a la función y del conocimiento de una serie de herramientas del cálculo diferencial y con ellas el individuo en acción construye el tableau. Este proceso es de tipo **algorítmico**.

La segunda situación consiste en pasar del tableau a la representación gráfica. El tableau se ha convertido en una descripción de la gráfica de la función: existe un conjunto infinito de curvas las cuales satisfacen las especificaciones del tableau y sólo una de ellas se corresponde con la gráfi ca buscada. Aquí el estudiante debe poder determinar, conociendo el tableau y las reglas que permitieron su construcción, la gráfica de la función dada. Sin embargo, el tableau –como ya dijimos– representa a una infinitud de gráficas, y por otro lado el proceso no es algorítmico. En el modelo de Alson se corresponde con una **situación de producción significante**. Pero, además, la o el estudiante no muestra la infinitud de curvas posibles sino un **representante** de éstas: es lo que se conoce como **ostensión**.

Llegados a este punto cabe preguntarse cuándo y bajo qué condiciones funciona la ostensión.

Para poder tratar de aproximarnos a una respuesta, adentrémonos un poco en el estudio de la ostensión.

Eco (citado por Alson) expresa que

> *La ostensión tiene lugar cuando un objeto o acontecimiento dado, producto de la naturaleza o de la acción humana (intencionalmente o no intencionalmente), hecho entre los hechos, es 'seleccionado' por un individuo y designado para*

*expresar la clase de los objetos de los cuales él es miembro. La ostensión representa el primer nivel de la SIGNIFICACIÓN ACTIVA, y esto es la primera convención empleada por dos personas que no conocen la misma lengua. (pp. 73-74)*

Diferentes autores concuerdan con Eco (1988) en que

*Entre emisor y destinatario ha de haber un código común, es decir, una serie de reglas que atribuyan un significado al signo. [...] Un proceso de comunicación en el que no exista código, y por consiguiente en el que no exista significación, queda reducido a un proceso de* ***estímulo-respuesta****. (p. 22)*

¿Qué hacer si no existe este código común, o bien éste es pobre? Pareciera que aquí la ostención ocupa un lugar de importancia para la construcción de este código común.

Esto nos retrotrae al problema de la significación. **Ostentar** es según el diccionario Larousse *evidenciar una cosa* y es sinónimo de mostrar. Pareciera que la ostensión fuese una herramienta para la construcción y/o ampliación del código común, en este caso dentro del sistema didáctico.

Alson reconoce que en el caso del tableau *es un ejemplo donde la ostensión funciona correctamente*. (p. 75) Pero, lamentablemente no siempre es así. Hay casos en los cuales el funcionamiento de la ostensión no es el deseado. Alson expresa que '*bien utilizada', la ostensión puede ahorrar tiempo, pero existe el riesgo de que los alumnos, con quienes el profesor utiliza la ostensión no reconozcan la clase (conjunto o finalmente el concepto) al cual el profesor se refiere haciendo el acto de mostrar un representante particular de la clase o del concepto.* (p. 74) Hace alusión a lo que Fregona califica de la *ilusión de la evidencia*, la cual no pareciera ser otra cosa que la manifestación del *efecto Jourdain* o del *efecto Topaze*.

Indica Alson que *la ostensión no cumple su cometido comunicacional si el mostrar e, no hace pensar al que lo ve en 'la' clase de e (p. 74);* a lo cual agrega que *el mostrar el objeto sólo hace referencia a todos los posibles conjuntos del cual el objeto mostrado es elemento.* (Ibid.) La realidad de aula es que *en el caso de la ostensión habitual se tiene que se toma un elemento de la clase para designar 'la' clase a la cual pertenece el elemento.* (Ibid.)

Veamos con un ejemplo el posible mal funcionamiento de la ostensión.

**El trabajo con los números irracionales** en el ámbito escolar se reduce prácticamente a la manipulación de algunos de sus representantes más conspicuos: π, e y algunas raíces. Esto conlleva, como sería de esperar, una pobre comprensión por parte de los estudiantes de este importante conjunto numérico. ¿Cómo puede la o el estudiante con la ostensión de tan pocos elementos convencerse de la infinitud de tal conjunto? Más aún, ¿cómo entender que hay más irracionales que racionales? De hecho, una conducta manifiesta de las y los estudiantes es incluso casi ni percibir a estos entes como números. La pretendida adquisición, por parte de los estudiantes, de la propiedad de que estos números tienen un desarrollo decimal no periódico es algo que queda totalmente fuera del alcance de ellos con el usual proceso de ostensión al cual se les somete.

Retomemos la visión de Eco. Afirma Eco (1988) que

> *Si para pedir un paquete de cigarrillos (o para contestar a una pregunta que implique como respuesta /un paquete de cigarrillos/) yo ostento un paquete de cigarrillos, el objeto viene elegido convencionalmente como significante de la clase de la que el propio objeto es miembro. Salvo que incluso en este caso el signo no es del todo icónico, porque sucede a menudo que se eligen solamente algunos aspectos de aquél como representantes del signifi cado al que me refiero; como es el caso de que muestro un paquete de cigarrillos Ducados, no para significar «cigarrillos Ducados», sino cigarrillos en general –excluyendo por tanto de la pertinentización sígnica algunas de las cualidades del objeto, que no corresponden a propiedades clasifi cadas de su significado. (p. 60)*

¿Cómo se ve el comentario de Eco dentro del mundo de la didáctica?

Podemos pensar en muchas situaciones de aula en las cuales acontezca algo similar al ejemplo de la caja de cigarrillos que propone Eco. Así, por ejemplo, consideremos muchos problemas de geometría en los cuales se trabaja con triángulos. Las más de las veces los triángulos mostrados en situación escolar son (por lo menos visualmente) rectángulos, isósceles o equiláteros; además, alguna de sus bases descansa paralela a la línea del horizonte.

Estas características adicionales, las cuales no forman parte de la definición de triángulo, quedan profundamente arraigadas en el espíritu de la mayoría: hemos podido constatarlo en reiteradas ocasiones dándole como tarea a distintas personas en diversos lugares y momentos el dibujar un triángulo y el resultado casi invariablemente era uno de los antes señalados. Podríamos interpretar este tipo de resultados como un obstáculo didáctico generado por lo que denominamos en las *representaciones prototípicas*. Justamente este tipo de representaciones son las que impiden en gran medida el papel adecuado que debería tener la ostensión en las relaciones de índole comunicacional dentro del sistema didáctico.

¿Qué hacer para lograr hacer funcionar a la ostensión lo más adecuadamente posible? Pareciera que una alternativa viable la encontramos en los planteamientos de Dienes: los principios de variabilidad parecieran ser una respuesta adecuada.

Alson opina que

> *Es probable que después de un trabajo con el alumno y ya él en conocimiento de un cierto número de conjuntos (que son inducidos por diferentes funciones Φ), el acto e mostrar funciona con un universo mucho más estructurado y las probabilidades de éxito del acto de mostrar sean mayores. (p. 76)*

Alson operacionaliza esta idea mediante una ingeniería didáctica del diseño de situaciones de producción encadenadas. Así, propone una primera situación de producción (de tipo algorítmico) en la cual la o el estudiante es provisto de un objeto **O** y de ciertas técnicas o procedimientos que le permiten asociarle ciertos caracteres al objeto dado. La siguiente situación de producción está a cargo del docente quien trata *de hacerles* *entender a las y los estudiantes el objeto que designamos por →{Carácter}.* (p. 75) La tercera situación de producción en juego le corresponde al estudiante y es una de tipo significante: a partir del objeto →{Carácter} la o el estudiante debe poder identificar el conjunto de objetos que mediante la función Φ muestren el carácter en cuestión. Sin embargo, este último conjunto posiblemente (o seguramente) es infinito y la y el estudiante hará uso de la ostensión.

Creemos que la variabilidad matemática que muestre la o el estudiante es la que nos permitirá inferir que la o el estudiante *conoce* el conjunto deseado. De hecho, el considerar diversas funciones Φ es, a nuestro juicio, poner en escena un principio de variabilidad.

Por otro lado, Alson enriquece el trabajo con los objetos gráficos creando diversos **dispositivos** que permiten *jugar* con ellos. Uno de estos artefactos son los **caminos**. La aplicación extensa de este artefacto se encuentra en Alson (1996). Alson, apoyándose en la noción de **cuadro** de Douady, se aboca a la potenciación del cuadro gráfico presentado otros artefactos con los cuales es posible transformar una curva en otra curva. Bajo esta concepción el procesamiento de las gráficas no requiere del conocimiento previo del aparato analítico (límites, derivadas, etc.) que tradicionalmente le es enseñado al estudiante como herramienta para que él pueda construir gráficas. Asimismo, establece vías de ida y vuelta entre el cuadro algebraico y el gráfico con la intención de lograr un equilibrio en el trabajo en ambos cuadros.

Se genera así una especie de *gramática* de los objetos gráficos.

Por otra parte, Alson sustituye la *metáfora* del juego de Brosseau por otra metáfora: la de una red de circulación.

La idea central de la metáfora radica en asimilar las acciones del individuo (expuesto ante una situación de producción) a un recorrido sobre una red. El proceso del aprendizaje es visto en la metáfora como la anexión de nuevas *flechas del saber*. Alson expresa que *realizar una acción, construir o producir un resultado puede verse como efectuar un movimiento* sobre la red. El equivalente a una estrategia en la metáfora del juego de Brousseau es aquí una trayectoria sobre la red.

Para Alson *el 'estado del conocimiento' de un individuo, puede ser identificado con un subconjunto de posibles trayectorias.* Es decir, es una **subred**.

En cierta forma, podríamos identificar una subred con un **micromundo** como denominan los interaccionistas simbólicos a ciertas estructuras cognitivas, y pensar que los micromundos que posee un individuo *pueden inicialmente estar claramente separadas unos de otros* (Treffers, 1987, p. 283); sin embargo, progresivamente, *entre las conexiones hechas entre los micromundos, una clase de jerarquía se va desarrollando: los micromundos son constituidos, conectados e integrados (para convertirse en nuevos micromundos)*; y esto mismo es lo que iría aconteciendo con las subredes: se crearían nuevos arcos que enlazarían subredes antes disconexas. Aunque hemos hecho una analogía entre los micromundos del interaccionismo y las subredes de Alson, entre estos dos objetos podrían también establecerse notorias diferencias, por cuanto, los micromundos no parten de una teoría representacionista, mientras que las subredes de alguna manera parecieran inspiradas en los planteamientos de Duval y en virtud de que estos últimos puede insertarse en una tal teoría, conduciría ello a ubicar a las subredes dentro de un esquema de tipo representacionista.

Es interesante subrayar que la discusión en torno a la aceptación o no de la teoría **representacionista** está íntimamente ligada al problema de la adquisición del significado. Las discusiones sobre estos aspectos se enmarcan en aspectos de índole psicológica acerca de la cognición, aspectos de tipo epistemológicos asociados a la ontología de los objetos matemáticos y aspectos relacionados con la semiótica y las teorías de la comunicación.

Font (2001) analiza con cierto detalle varias de las posturas que diversos autores manejan ante este asunto.

Siguiendo a Font, tenemos que el representacionismo parte de varios supuestos: la existencia de un mundo externo al sujeto (realismo); la aprehensión de manera parcial por parte del sujeto de ese mundo externo; y la representación de ese mundo en la mente del sujeto y la posibilidad de que el sujeto realice acciones sobre dichas representaciones. Esta posición se encuentra asociada a la *metáfora del espejo*. Mientras, que las posiciones no representacionistas están conformadas por un amplio abanico que va desde la negación de un mundo externo hasta la posibilidad de aceptar la existencia de este mundo externo, pero a la vez asumiendo una postura agnóstica acerca de *que los contenidos inmanentes de la conciencia sean homeomórficos a objetos trascendentes*. La postura no representacionista es asociada metafóricamente con la *construcción*.

La discusión acerca del representacionismo es de primera importancia a los efectos de considerar el acto de ostensión y poder discernir sobre diversos aspectos del significado.

Para la psicología cognitiva las representaciones mentales son el eje de las operaciones de la mente y algunas de ellas son representaciones homeomórficas de objetos del mundo externo. Siguiendo las ideas de Font, estas representaciones pueden ser clasificadas en tres grandes categorías:

1. Las que la persona considera externas (las representaciones internas que son el resultado de la codificación de estímulos externos). Los estímulos externos producen las representaciones ostensivas.

2. Las propiamente internas.

3. Las representaciones internas que sirven para realizar representaciones consideradas externas (representaciones internas que se pueden descodificar produciendo respuestas en el medio exterior).

Afirma Font que

> *Si consideramos la clasificación anterior en un contexto social, tenemos que el primer tipo de representación y el tercer tipo son socialmente compartibles. Por ejemplo, un profesor siguiendo una representación del tercer tipo, dibuja en la pizarra una tabla de una función y el alumno genera una representación del primer tipo. Cuando decimos que estas representaciones mentales son socialmente compartibles, queremos decir que el profesorado y el alumnado dialogan sobre ellas como si fuesen exteriores. Muchos autores hacen referencia a las representaciones del*

*tipo 1 y 3 como 'significante', y al conjunto de conexiones que el alumno puede establecer con otras representaciones del tipo 2 como 'significado'.*

Agrega más adelante Font que *muchas investigaciones han tenido (y tienen) por objetivo estas representaciones internas [símbolos mentales y no-ostensivos personales] porque consideran que la comprensión de los alumnos está relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre diferentes tipos de representaciones externas [objetos reales, experiencias materiales de las personas (ostensivos)].* Es decir, empleando los principios de variabilidad.

Volviendo a las diferentes situaciones de producción que plantea Alson, podríamos pensar en el tópico Teorema de Pitágoras el cual es planteado en la gran mayoría de los textos de manera muy pobre, lo cual se puede concluir del trabajo de Beyer (2002c).

Si analizamos las actividades planteadas en los textos mediante las situaciones de producción definidas por Alson, encontramos que en su gran mayoría se corresponden con situaciones de corte algorítmico, con un predominio de formulaciones en las cuales se da cierta información (preferentemente dos lados) para obtener los lados desconocidos del triángulo. El saber del estudiante se circunscribe a conocer la fórmula pitagórica y a la noción de despejar. Sin embargo, se elude el plantear situaciones significantes como el encontrar ternas de números las cuales satisfagan la relación Pitagórica, o en otros términos el trabajo con el recíproco del teorema de Pitágoras. Este trabajo con las ternas es una situación que obliga no sólo a un estudio más profundo del teorema en sí, sino también al estudio de las relaciones numéricas en general que se verifican en un triángulo, como es el caso de la desigualdad triangular.

Si consideramos el tema anterior desde la óptica de Brousseau, es posible considerar como variable didáctica las figuras a ser dibujadas sobre los lados del triángulo rectángulo, para llegar a establecer una interpretación mucho más general que la usual la que se restringe sólo a la construcción de cuadrados. En general, las figuras pueden ser bastante arbitrarias: la única exigencia es que las tres figuras sean semejantes.

Es posible también ubicarnos en la posición de Dienes (de hecho la variación de las figuras puede interpretarse como uno de sus principios de variabilidad), y diseñar juegos, bien sea con materiales concretos o con paquetes de geometría dinámica y seguir las etapas de su modelo.

Las actividades que pueden ser diseñadas son sumamente variadas, englobando demostraciones posibles del teorema e incluso generalizaciones del mismo, así como el tratar de vincularlo con otros resultados matemáticos, todo ello contribuiría a un enorme enriquecimiento de la red, al establecer muchas conexiones entre posibles subredes que maneje la y el estudiante.

## LA COMUNICACIÓN ORAL EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Hasta este instante nos habíamos abocado a un estudio que tendía hacia lo teórico. De aquí en adelante nos adentraremos un poco en el mundo real de las aulas y de los textos.

De seguidas, daremos algunos ejemplos tomados del acontecer de aulas de matemáticas observadas en su acontecer cotidiano, y aprovecharemos estos ejemplos para hacer algunos comentarios y análisis que mostrarán la potencialidad de los conceptos teóricos antes expuestos a los fines de la comprensión y explicación de la dinámica comunicacional y didáctica de las aulas.

Mostraremos aquí algunos extractos de observaciones de clase realizadas por el autor en diversas investigaciones.

Estas observaciones nos permiten, entre otras cosas, saber:

| | | |
|---|---|---|
| ¿Qué se hace en el aula? | → | **Actividades** |
| ¿Quién(es) lo hace(n)? | → | **Actor(es) e Interacciones** |
| ¿Cómo lo hace? | → | **Metodología** |
| ¿Por qué lo hace? | → | **Objetivos** |
| ¿Con qué lo hace? | → | **Medios** |
| ¿De qué trata lo que se hace? | → | **Contenidos** |

Asimismo, podemos caracterizar el estilo comunicativo que predomina en el aula que se estudia, la presencia/ausencia de las diferentes dimensiones del lenguaje matemático, presencia/ausencia de traducciones entre as diversas dimensiones, uso de múltiples representaciones, y muchos elementos más que nos permiten interpretar las interacciones comunicacionales en el sistema didáctico.

El formato de presentación de los diversos ejemplos no es exactamente el mismo, por cuanto preferimos dejar las respectivas presentaciones originales así como las diferentes listas de actividades empleadas en cada caso, a fin de que el lector note cómo el mismo proceso de investigación sobre una temática hace que el investigador vaya afinando su enfoque.

### Ejemplo 1

Se comenzará con la observación 1 del docente P . Esta observación 1 corresponde a una clase de 8º Grado de Educación Básica de una Unidad Educativa Nacional, situada en la Urbanización Bello Monte de Caracas.

El contenido tratado era el tema de funciones. Las observaciones se realizaron en 1993.

Los eventos que se consideraron en esta investigación fueron: **Explicación Teórica (T), Enunciación de un Ejemplo o de un Ejercicio (E), Indicaciones (I), Comentarios o Aclaratorias (C), Resolución de un Ejemplo o de un Ejercicio (R), Establecimiento de una Discusión (D)**. Esta lista de eventos o actividades es una adaptación de la taxonomía que presentan Shuard y Rothery (1984) para analizar material escrito.

Como veremos, en investigaciones posteriores, se afinó esta lista de eventos o actividades.

Mostramos a continuación los tres primeros eventos de esta clase. Cada recuadro corresponde a un evento particular. $P_1$ simboliza al docente y A un estudiante.

$P_1$: Uno, dos, tres ... ¡Ha! .. ?? Habíamos visto que una función era una relación que asociaba
un elemento de acá con un elemento de acá ¿no?
A: ¡Síí! ?? (Dicen unos alumnos)
$P_1$: ¡Ok! .. Podía ser cualquiera .. de este tipo, pero que la condición obligante era . que un
elemento de A . se hacía relacionar ¿con un elemento?
A: De B (responden a coro un grupo de alumnos)
$P_1$: De B .. ¡Bien! .. Entoncess, a los elementos . de A: uno, dos, tres . ¿se les decía? ..
A: ?? ????? ????? (Habla un alumno)
$P_1$: ¡Ha!
A: El dominio (dicen algunos estudiantes) El dominio (repiten)
$P_1$: A ex dominio .. ¿y a los elementos de B?
A: Rango (dice uno) Rango (Repite a coro un grupo de alumnos)
$P_1$: ¡Ok! .. a, b, c,... y esto ess el rango
A: Rango (repiten algunos alumnos)

---

$P_1$: ¡Bien! .. O sea habíamos establecido .. también .. un tipo de gráfi co .. de esta índole...
uno, dos, tres, ... en . B: a, b, c ... ¿Ok? ... y teníamos esto también ... ¡Bien! ... y decíamos
que eso no era una función . porque había un elemento que ¿necesitábamos?
A: Dos (Dice uno de los estudiantes)
$P_1$: ¿Dos?
A: Dos (Repite uno)... rangos (Responden algunos alumnos)
$P_1$: Dos elementos del rango, o sea dos imágenes . ¿Ok? y también habíamos dicho (El ruido
de un avión interrumpe el discurso)
335
?: Toc, toc, toc. ¡Profesor! (alguien toca la puerta e interrumpe)
$P_1$: ¡Ya va! .. ¡Ya va! (Se interrumpe la clase por un instante) .. Que eso ¿tampoco? .....?? ¡Sí! (Se retira la persona que interrumpió la clase) Entonces habíamos dicho que esto tampoco era una función porque, elementos diferentes se representaban ¿con un mismo? elemento de B . ¡Bien! Esto eran relaciones .. Más nada. No se establecen que sean funciones . porque no se cumple la condición ¿de que sean? ... Uno . a uno. ¿Se acuerdan de eso?
A: ¡Sí! ¡Sí! (Responden)
P1: ¡Ha!
A: ¡Sí! (Responden)

Como puede observarse, se intercambian -la o el docente y las y los estudiantes- el rol de emisor durante el evento 1 (primera fila del cuadro). Sin embargo, las emisiones de las y los estudiantes son bastante breves y sumamente pobres. Asimismo, el planteamiento del tema por parte de $P_1$ también es muy pobre. Además, cabe agregar que el texto que escribe $P_1$ en la pizarra está en la dimensión G (diagramas de Venn) y realiza una traducción a la dimensión S (G-->S). Justamente este docente usa una de las representaciones prototípicas para las funciones.

Durante el evento 2 (segunda fila del cuadro), el intercambio oral tiene similares características a las del evento anterior. En lo que concierne a la parte escrita de la clase, ésta se desarrolla sólo en la dimensión G. No hay traducción a otra dimensión.

En el transcurso del tercer evento, es menor la participación del estudiantado. Es de hacer notar que la o el profesor comete un error, el cual no es aclarado: afirma que en este caso no se tiene una función.

Cabe señalar que $P_1$ no aclara la diferencia entre conjunto de llegada y rango, ni corrige algunas expresiones erróneas de las y los estudiantes.

En otro pasaje de su clase, a raíz de una pregunta de un estudiante, este profesor dice lo siguiente:

> $P_1$: ¡Ah! ¿Pero eso no es lo mismo que uno hace cuando aplica una cosa que se llama doble ce? .. Un truco. .. Dice esto por esto y esto por esto donde la ce mayor queda en el numerador .. y la ce interna queda en el denominador.

Llama poderosamente la expresión que emplea la y el docente: **un truco**.

El análisis de las observaciones de clase a este docente permitió caracterizar su estilo comunicativo.

Se caracteriza el docente $P_1$ por tratar de establecer un diálogo con el estudiantado, es decir se intercambian el rol de emisor y de receptor alternativamente la o el docente y las o los estudiantes. Sin embargo, las interacciones comunicativas desarrolladas no llegan a ser un verdadero diálogo, entre iguales.

Los eventos más frecuentes en su clase son E (enunciación de ejercicios) y R (resolución de ejercicios), y en menor grado la realización de comentarios y aclaratorias (C). Hubo poca presencia de desarrollo teórico (T) o de discusión (D).

Los ejercicios que resuelve y que propone son, en general, de un nivel bajo y estimulan el trabajo mecánico del estudiante.

La mayor parte de las veces habla y escribe simultáneamente.

Se desenvuelve básicamente en la dimensión simbólica (S), la cual no es motivada. Emplea poco la dimensión G (restringiéndose al uso de algunos diagramas de Venn en la observación 1), salvo en la tercera observación en la cual empleó mucho la dimensión gráfica (G), pero hay que hacer notar que estaba dando la temática de graficación de funciones afines y por ello era obligante el mayor empleo de esa dimensión. Prácticamente no realiza traducción de una dimensión a otra y hay una ausencia casi total de la dimensión verbal (V) cuando escribe.

**Ejemplo 2**

Los siguientes trozos corresponden a la transcripción de la comunicación oral desarrollada en una Sección de 9º Grado de Educación Básica, de una Unidad Educativa de la zona de El Cementerio en Caracas. El tema tratado era el de funciones. La observación se realizó en octubre de 2000.

Mostramos en la columna izquierda la transcripción de la comunicación oral entre los diferentes actores y en la columna de la derecha se encuentran codificadas las diferentes actividades o eventos que logramos catalogar en dicha investigación. En el anexo se define cada una de las actividades. El paso de una actividad a otra está señalado por las partes sin o con sombreado. Lo resaltado con negrillas indica énfasis del emisor del mensaje. Con P hemos designado al docente del curso. Además, hemos incorporado el texto que éste último actor escribía en el pizarrón.

Analicemos un fragmento de la segunda clase observada:

| | |
|---|---|
| *¿Quién de ustedes lee la definición de adición?*, pregunta P. *Yo*, dice una | AAC |
| alumna. *Yo*, dice otro *¿Adición?*, pregunta otro. *Yo*, agrega uno. *¡Shh!, ¡pero escúchenla, por favor!* Comienza la lectura: *La adición en el conjunto R la definimos como la operación mediante la cual dados dos números reales a y b que llamamos sumandos sumandos se le hace corresponder otro* | A |
| *número real c, que llamamos suma, se escribe a más b igual c*. Ella pregunta: *¿Quién nos puede explicar lo que dice él?*. *¿Ah?* se le oye a un alumno. Otro responde: *que si se suman a más b igual a c. ¿Cómo se llamaría aquí a y cómo se llamaría b?*, pregunta P. *Sumandos* se oye una voz, un pequeño | LA |
| coro dice *sumandos* y un coro mayor repite *sumandos*. *¿Y el resultado?*, pregunta ella. *Suma*, responden. *Suma*, se oye que repiten. Ella pregunta: | DT |
| *¿Y todo completo?*. *Resultado* dice uno quedamente. Otro dice *Adición*, y otros repiten *adición*. *¡Eso sí es!* dice ella, y agrega: *Entonces, ¡Miren!, en los reales comenzamos a sumar todos los números que hemos visto, vimos lo que eran raíces, ... ¿se acuerdan?, cuando estábamos trabajando con el* | EP |
| *teorema de Pitágoras, con la que (dice una palabra ininteligible) ... vimos lo que eraa decimales, cuando suu ... su parte su expresión decimal entonces la parte decimal de ese número ... no sabíamos en qué momento comenzaba a repetirse ¿no? Era infinito .. y no sabíamosss cuál era su periodo ¿no? ... Ese tipo de números, y toodos los que hemos visto forman parte de los reales.* | R |
| *Aquí vamos a comenzar a sumar eso. ....* | EP |

Aquí se muestra una secuencia de actividades. Es menester aclarar que la cuarta actividad en realidad son dos simultáneas: hay una Exposición del Profesor (EP) y ésta se ejecuta mediante el Diálogo Triádico (DT). En realidad en sus inicios el diálogo no es estrictamente triádico puesto que la o el docente no retroalimenta al estudiante señalando si la respuesta dada es o no es correcta. Aquí el Diálogo juega el papel tanto de actividad como de estrategia empleada por el profesor para desarrollar la actividad EP. Ésta es una estrategia ampliamente utilizada por la docente en esa clase y se pudo observar en clases subsiguientes que la utilizaba con gran frecuencia.

Otro segmento de la segunda clase observada es el siguiente:

| | |
|---|---|
| Luego de una pausa producto de que P fue nuevamente a cerrar la puerta, P agrega: *La propiedad que sigue, ¿cuál será?. ... Elemento neutro*, dice un alumno. ***Elemento neutro***, repite (en voz más baja) una alumna. *¿Cuál?*, pregunta P. *Elemento neutro*, responde otro. *Elemento neutro*, repite La misma alumna. Casi a la par P pregunta: *¿La existencia dell elemento neutro? ¿En que conss? ¿Cuál es el elemento neutro de la suma?*. *¡Cero!*, dice una voz desde el fondo del aula. Se oyen murmullos. *El uno*, dice una voz. ***¡Cero!***, responde nuevamente con voz más fuerte el mismo alumno. *¡Cero!*, se le oye a otro. *¡Cero!*, repiten. *¡Da cero!*. *El uno*, repite el que antes había dicho esto. *En la suma*, se le oye decir a P. *Todo número multiplicado por cero da cero*, dice uno desde el fondo. El que había respondido inicialmente repite: *¡Todo número multiplicado por cero?*. *¿Cuál es?*, se le oye a P. *Uno*, se vuelve a oír. *Si no es multiplicación*, le responde el alumno que varias veces dice cero al alumno que insiste que la respuesta es uno. *¿El uno?*, pregunta P. Los alumnos discuten entre sí. *Uno profesora*, insiste nuevamente el estudiante que antes dio esa respuesta. *¿El elemento neutro de la suma es uno?*, pregunta P. *¡Cero!*, dice uno e inmediatamente un coro de voces repite: *¡Cero! ¡Cero! ¡Cero!*. Murmullo. *¡Es el cero profesora!*, dice nuevamente el alumno que desde el comienzo había dado esa respuesta. *¡Es el cero!*, repite P. *¡El cero!*, se oye al alumno que repite. P explica que: *El elemento neutro de la suma es el cero porque cualquier cosa sumada con cero .. ¿cuánto da? Cualquier coosa ¿No? Da lo mismo*. *Sí*, dice un alumno. P continúa: *Entonces si yo le sumo ejemplo .. ejemplo para esa propiedad*. Murmullos de los alumnos. Mientras, P en silencio escribe: | I<br>EP |
| P pregunta: *¿Cuánto daría eso?*. *¿Cero?*, responde una alumna. *da*, dice una voz desde el fondo. Murmullos de los estudiantes. Varias voces (en aumento) se les oye: *Tres coma veinticinco*. El alumno del fondo que ha hablado mucho dice: T*res coma veinticinco*. | CAA<br>TPP |
| P escribe<br><br>3,25 + 0 = 3,25 | |
| Luego, dice P: *¡Miren! ¿Y si les coloco eso?*. A la vez escribe:<br><br>3,25 + 0 = 3,25<br><br>$0 + \sqrt{3} =$ | TPP |
| Se oyen gritos desde el pasillo. *¡Igual, igual!*, dice uno. Murmullos de los alumnos. *Igual*, dice una alumna. *¡Coma!*, dice uno. P escribe y la pizarra muestra lo siguiente:<br><br>3,25 + 0 = 3,25<br><br>$0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$ | TPP |

Se puede notar en esa secuencia la combinación del Diálogo con el empleo de la Pizarra. Se puede observar la presencia de **Mensajes Destinados a Instruir**. En algunos de ellos hay un Uso del Vocabulario Técnico inadecuado. Ejemplo de esto son expresiones como *¿Cuánto daría **eso**?*, *¿Y si les coloco eso?*. Estas expresiones se repitieron varias veces en el transcurso de la clase.

La clase, en términos de los contenidos, se centra en lo **procedimental**. Los ejercicios propuestos al estudiantado, el contenido de los **Mensajes Destinados a Instruir**, el **Tipo de Preguntas que hace la Docente** y el contenido de las guías (que elaboró la docente) así lo indican.

La investigación realizada en esta institución educativa permitió determinar las diversas interacciones (estudiante-estudiante, estudiante-saber, docente-estudiante, docente-saber) que se producen en el aula estudiada. También ello da lugar a relaciones entre las actividades. Así, tenemos que podemos clasificar las actividades de acuerdo con la interacción que predomina al observar los eventos en el aula.

La **Interacción Estudiante-Estudiante** predomina en los eventos CAA y TG.

La **Interacción Estudiante-Saber** es predominante en las actividades CA, LA, R, TI, TG y TPA.

La **Interacción Docente-Saber** es predominante en los eventos EP, R y TPP.

La **Interacción Docente-Estudiante** es predominante en las actividades A, AAC, AC, CPA, DI, DT, EM, EN, PL, RA, RC, RT y R.

Adicionalmente, se pueden establecer nexos entre las actividades y los tipos de mensajes más frecuentes en ellas. De acuerdo con este criterio se tiene que los **Mensajes Destinados a Instruir** están asociados a los eventos AAC, CA, CPA, DT, EP, LA, R, RC, RT,TG, TI, TPA y TPP. Los **Mensajes Destinados a Dirigir** predominan en las actividades AC, DI, EM, EN y RA. Por último, los **Mensajes Destinados a Asegurar el Control** son los que marcan a las actividades A y PL.

Ilustremos estas relaciones con algunos extractos de las clases observadas.

> *¿Quién de ustedes lee la definición de adición?*, pregunta P. *Yo*, dice una alumna. *Yo*, dice otro *¿Adición?*, pregunta otro. *Yo*, agrega uno. *¡Shh!, ¡pero escúchenla, por favor!* Comienza la lectura: *La adición en el conjunto R la definimos como la operación mediante la cual dados dos números reales a y b que llamamos sumandos sumandos se le hace corresponder otro número real c, que llamamos suma, se escribe a más b igual c*. Ella pregunta: *¿Quién nos puede explicar lo que dice él?. ¿Ah?* se le oye a un alumno. Otro responde: *que si se suman a más b igual a c. ¿Cómo se llamaría aquí a y cómo se llamaría b?*, pregunta P. *Sumandos* se oye una voz, un pequeño coro dice *sumandos* y un coro mayor repite *sumandos. ¿Y el resultado?*, pregunta ella. *Suma*, responden. *Suma*, se oye que repiten. Ella pregunta: *¿Y todo completo?. Resultado* dice uno quedamente. Otro dice *Adición*, y otros repiten *adición*. *¡Eso sí es!* dice ella, y agrega: *Entonces, ¡Miren!, en los reales comenzamos a sumar todos los números que hemos visto, vimos lo que eran raííces, ... ¿se acuerdan?, cuando estábamos trabajando con el teorema de Pitágoras, con la que (dice una palabra ininteligible) ... vimos lo que eraa decimales, cuando suu ... su parte su expresión decimal entonces la parte decimal de ese número ... no sabíamos en qué momento comenzaba a repetirse ¿no? Era infinito .. y no sabíamosss cuál era su periodo ¿no? ... Ese tipo de números, y toodos los que hemos visto forman parte de los reales. Aquí vamos a comenzar a sumar eso. ....*

Aquí la AAC es una lectura. La o el docente no nomina a ningún estudiante en particular. Como consecuencia de la AAC se produce la actividad LA. Finalizada la actividad LA comienza un Diálogo Triádico (DT) que sirve de medio para una Explicación del Profesor (EP) combinada con una actividad de Repaso. Aquí se nota a las claras las relaciones AAC→LA, DT→EP y DT→R.

Como podemos ver, las observaciones de clase y el análisis de las transcripciones de la comunicación en el aula permiten comprender el funcionamiento de este complejo sistema de comunicación y explicar diversos fenómenos didácticos.

## LOS TEXTOS DE MATEMÁTICAS COMO TRANSMISORES DEL SABER MATEMÁTICO, DE ERRORES Y MALENTENDIDOS

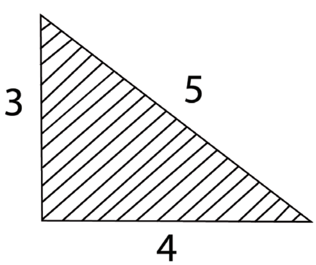
A continuación vamos a considerar varios extractos tomados de cinco (5) textos que han sido empleados y/o se emplean en la actualidad.

Mediante ellos podemos ejemplificar algunos de los elementos comunicacionales que han sido nombrados en este trabajo.

La selección de textos realizada es intencional a los fines de que sean representativos del tipo de ostensiones de triángulos que en los libros escolares usualmente se hacen.

Comencemos con un extracto sobre el tema Teorema de Pitágoras tomado de Amelli y Lemmo (1994, p. 234)

> Para los babilonios, al igual que para los egipcios 2000 a.C.), el concepo de ángulo recto estaba íntimamente relacionado con la construcción.
>
> Estas culturas ya conocían de modo práctico que hay una escuadra del constructor en la que las relaciones numéricas crean un ángulo recto.




> Pero no fue sino hasta el siglo V a.C. cuando Pitágoras trató de darle a esta relación numérica una explicación.
>
> Tratemos de visualizar en ¿qué consistió su experimentación? y, ¿a qué conclusión llegó?

*Figura 9*

Como se puede observar, el triángulo rectángulo mostrado posee dos características adicionales: se escoge una base horizontal y aparece relleno.

Sin embargo, ya en la siguiente página (y salvo en un anexo en esa misma página, en todas las páginas siguientes) los triángulos aparecen con la línea base horizontal, pero **sin relleno**. Justamente, este texto escolar usa representaciones prototípicas para los triángulos.

Mostremos lo que presentan Ameli y Lemmo (op. cit., p. 235):

- Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.
- Hipotenusa: es el lado que se opone al ángulo recto.
- Catetos: son los lados que conforman el ángulo recto

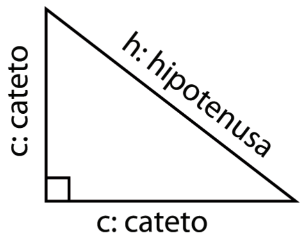
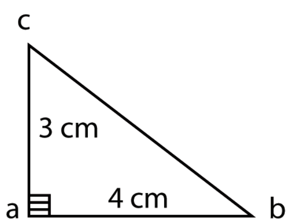



*Figura 10*

En la siguiente página, estos autores nos vuelven a presentar los triángulos de la misma manera:

En cada caso hallar la longitud del lado que falta:




$h^2 = c_1^2 + c_2^2$ aplicando el teorema de Pitágoras

$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$

$bc^2 = (3\,cm)^2 + (4\,cm)^2$ calculando

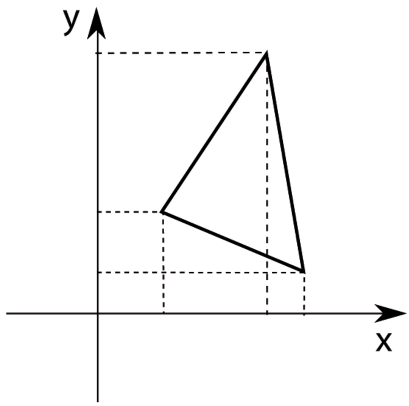
$bc^2 = 25\,cm^2$

$\boxed{bc = 5\,cm}$ sacando la raíz cuadrada

*Figura 11*

Pasemos a otro texto escolar, tomando nuevamente el tema de geometría y prestando atención a la representación de los triángulos. Esta vez hemos tomado el texto de Breijo y Rodríguez (1987).

Estos autores nos presentan al inicio del tema de geometría la siguiente representación:



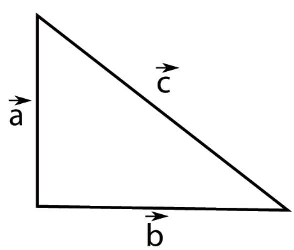

*Triàngulo plano*
*Figura 12. Tomada de Breijo y Rodríguez, 1987, p. 132*

Como vemos, el triángulo mostrado en términos de su posición **no está en el formato prototípico**, pero **carece de relleno**.

No obstante, las subsiguientes representaciones que de los triángulos realizan dichos autores (ya en la página 135), corresponden al formato prototípico (con base horizontal y sin relleno).

Así, por ejemplo, nos muestran:

Consideremos vectorialmente el triángulo de la siguiente manera:




Observemos que: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

*Figura 13 Tomada de Breijo y Rodríguez, 1987, p. 138*

Pasemos a otro texto, el de Flores de Tovar y otros (1988).

En este texto se nos muestran los siguientes triángulos, en **posición no prototípica, pero sin relleno**:

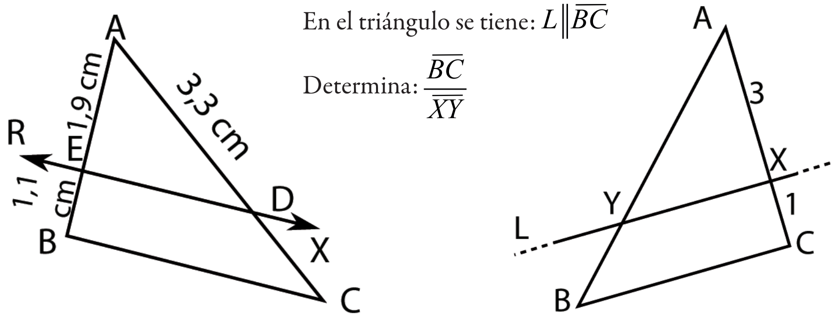



*Figura 14 Tomada de Flores de Tovar y otros, 1988, p. 146*

Nuevamente, como en el caso del texto anterior, prevalecen las representaciones prototípicas, tanto en la posición del triángulo como en la ausencia de relleno. En la misma página citada ya se inicia con este tipo de representación.

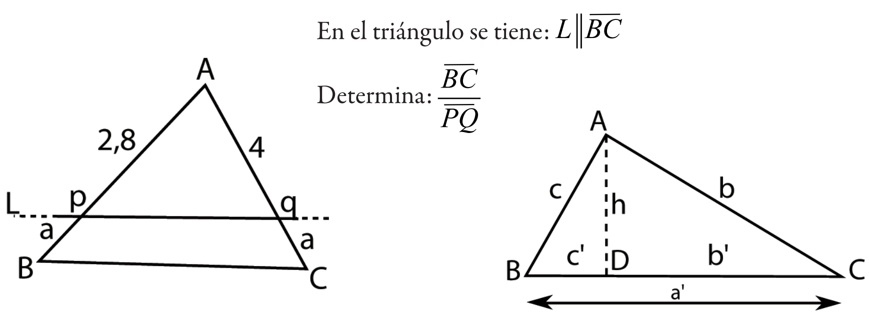



*Figura 15 Tomada de Flores de Tovar y otros, 1988, pp. 146, 148*

Pasemos a otro de los libros seleccionados, el de Uribe y Berrío (1999).

El tipo de representaciones de triángulos que muestran los autores es el siguiente:

Determinar el ancho (x) del río de la figura.

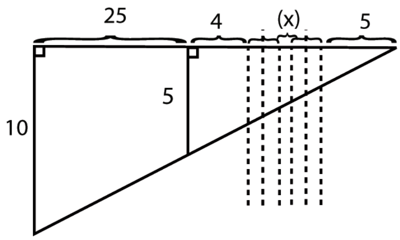



*Figura 16. Tomada de Uribe y Berrío, 1999, p. 242*

Se observa aquí un triángulo rectángulo *invertido* con respecto a la posición prototípica, aunque su base sigue estando en posición horizontal; además, la representación carece de relleno.

Los restantes triángulos que se muestran en esa página son completamente prototípicos como se aprecia en lo que sigue:

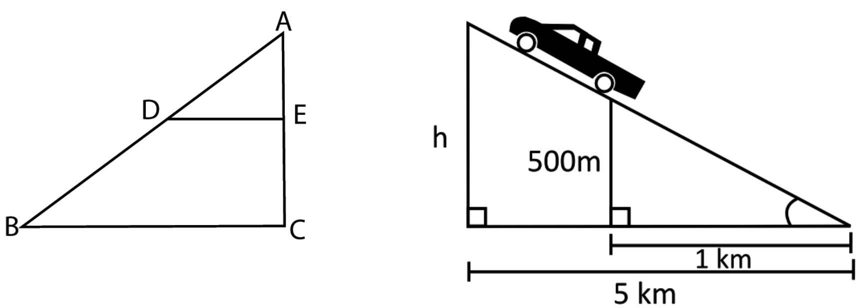



*Figura 17. Tomada de Uribe y Berrío, 1999, p. 242*

De aquí en adelante, los triángulos representados en este texto escolar están en el formato prototípico, salvedad hecha de uno apoyado en un vértice (p. 250) y unos que aparecen en la página 257 al ser subdividido un polígono en triángulos.

Tomemos, por último, el texto de Salazar y Rojas (s/f).

Del triángulo ABC saquemos las siguientes figuras:

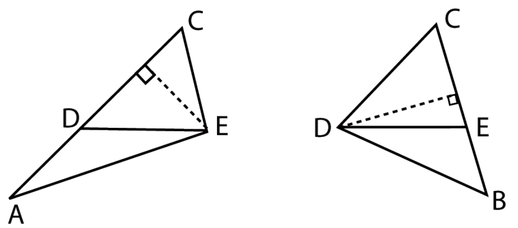


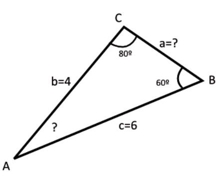

*Figura 18. Tomada de Salazar y Rojas, s/f, p. 223*

Estos autores nos muestran aquí dos **triángulos en posición no prototípica y con relleno**. Es de hacer notar que en dicha página aparecen más triángulos no prototípicos.

Nuevamente, un poco más adelante, nos encontramos con triángulos en posición no prototípica.

En los triángulos semejantes ABC y A′B′C′ calculemos:

i) a ii) b′ iii) $m(\sphericalangle A)$ iv) $m(\sphericalangle A')$

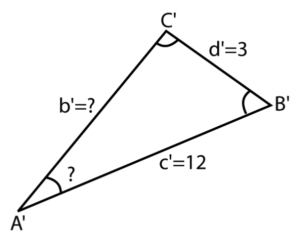



Solución:

Ya que $\Delta ABC \sim A'B'C'$ tenemos:

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{a}{5}=\frac{6}{12}\Rightarrow\boxed{a=\frac{30}{12}=2,5}$$

$$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{4}{b'}=\frac{6}{12}\Rightarrow\boxed{b'=\frac{48}{6}=8}$$




Sabiendo que: $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)=180^{\circ}$

entonces: $m(\sphericalangle A)=180^{\circ}-(80^{\circ}+60^{\circ})=40^{\circ}$

luego: $m(\sphericalangle A)=40^{\circ}$

*Figura 19. Tomada de Salazar y Rojas, s/f, p. 227*

Estos autores, en líneas generales, son bastante consistentes con el uso del relleno para los triángulos, salvo pocas excepciones como la que se muestra a continuación. Aunque muestran aquí un triángulo en posición no prototípica, rompen el esquema de emplear relleno.

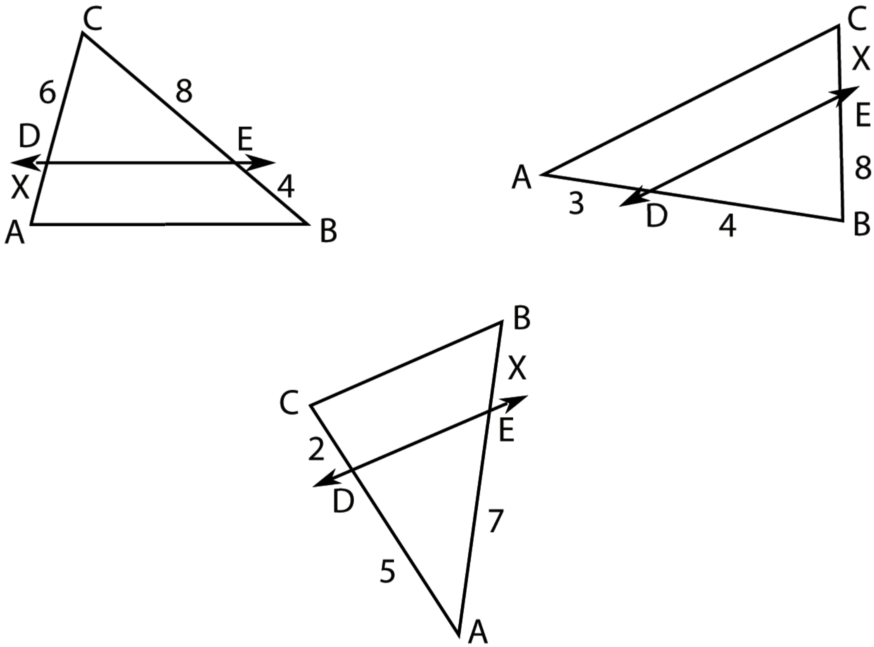



*Figura 20 Tomada de Salazar y Rojas, s/f, p. 222*

Podemos concluir que se aprecia, en la selección de textos, una preponderancia de las representaciones prototípicas de los triángulos tanto en lo que se refiere a la posición en que éstos son presentados como en la carencia de relleno. Este último aspecto es una característica prevaleciente en las representaciones de triángulos en los textos escolares.

Los elementos aquí mostrados son los que mayoritariamente encontraremos en los textos escolares venezolanos.

## ERRORES Y MALENTENDIDOS: ¿QUÉ SON?

La dinámica del triángulo didáctico (docente-estudiante-saber) está indudablemente intermediada por factores **culturales, cognitivos y lingüísticos**, entre otros; y la noción de **obstáculo**[12] (en sus tres vertientes: **didáctico**, **epistemológico** y **psicológicos**, atribuibles respectivamente al docente y a los textos, al saber, y al estudiante, se constituye en una importante herramienta para el estudio de errores y malentendidos.

Es común encontrar situaciones como sen(x+y)=senx+seny, las cuales usualmente son catalogadas como un simple error del estudiante, llevando aparejada consigo la respectiva penalización.

Aquí, simplemente la o el estudiante ha **distribuido** los símbolos que se encuentran fuera del paréntesis: mientras que para el docente **sen** represente un sólo símbolo que encierra la idea de una función trigonométrica, para la o el estudiante **sen** es una simple **concatenación de tres letras** (s e n) y la concatenación a él se le ha recalcado que significa producto; y algo que multiplica a un paréntesis se distribuye.

Es por ejemplo frecuente que utilicemos, por economía de lenguaje, el mismo signo, +, para cualquier operación aditiva: sea ésta de números o vectores, ¡incluso dentro de una misma actividad!

Sin percatarnos de ello, la manera en que son presentados los contenidos –tanto por el docente cono incluso en muchos textos– genera una serie de **obstáculos didácticos**, que sumados a los **obstáculos epistemológicos** producen o generan muchas de las situaciones que usualmente se tipifi can como errores del estudiante.

Creemos, sin lugar a dudas, que las representaciones prototípicas contribuyen a la generación de malentendidos y errores.: son una fuente de éstos. Son un obstáculo didáctico.

No es difícil esperar entonces el gran cúmulo de **malentendidos** reportados en la literatura.

---

[12] **La noción de obstáculo epistemológico se debe al fi lósofo Gastón Bachelard, quien la empleó en su obra La formación del espíritu científi co, publicada en 1938.**

Es harto frecuente encontrar en el hecho educativo ***errores*** de las y los estudiantes los cuales nos enfrentan de lleno con el **problema del significado.**

Por supuesto, el mismo término ***error*** está sujeto a discusión y es objeto de múltiples interpretaciones; más aún, en el campo de la didáctica, en donde algunos representantes de la Didáctica Fundamental sustituyen el término por el de ***malentendido***, expresión que preferimos usar en muchas oportunidades, por cuanto refleja con un poco más de nitidez sus posibles orígenes, al remitirnos a un posible **malfuncionamiento del sistema didáctico**, es decir, al t**riángulo didáctico (docente-estudiante-saber) y sus interrelaciones**.

Más allá de la didáctica, la noción de ***error*** es fuente de arduas polémicas.

En filosofía, la polémica es de vieja data. Así, por ejemplo, *según Zenón de Elea solamente puede hablarse del ser. Del no ser no puede enunciarse nada. Por lo tanto, el error es imposible. Una proposición que no sea verdadera no puede recibir el nombre de proposición; es, a lo sumo, un conjunto de signos carentes de sentido.* (Ferrater Mora, 1974, p. 139) Más adelante este autor señala que *los escolásticos trataron el problema del error dentro de la certidumbre; en rigor el error se puede entender únicamente cuando hemos puesto en claro las diferentes formas en que puede darse la verdad. Si la verdad es coincidencia entre el juicio y la cosa juzgada, el error será la discrepancia entre ellos.* (op. cit., p. 140) Asimismo, indica que *Descartes dio un carácter extremo a la tesis (en parte anticipada por Juan Duns Escoto) según la cual el error reside en el acto de la voluntad que formula el juicio. El entendimiento no niega ni afirma; es la voluntad la que afirma o niega y, por lo tanto, la que puede equivocarse.* (Ibid)

No nos internaremos por estas disquisiciones filosóficas ya que escapan al tema central que nos ocupa, y recomendamos al lector interesado en la temática del error la interesante obra de Astolfi (1999).

Retomaremos pues los **errores** y **malentendidos** dentro del funcionamiento del **sistema didáctico**, observando diversos casos ilustrativos de estas situaciones.

## ALGUNAS SITUACIONES DE ERRORES Y MALENTENDIDOS

**Ejemplo 1**

Se tomará como **primer caso de malentendido** el siguiente:

> *A partir de una regla correcta que implica la propiedad distributiva entre la multiplicación y la adición (ax(b+c)=(axb)+(axc)), los alumnos generalizan un 'prototipo' según el cual la distributividad se aplica cualesquiera que sean los operadores (a (b c)=(a b) (a c)) (Gómez-Granell, 1989, p. 9)*

Esto es lo que Maron (1979) denomina *la ley distributiva universal de los estudiantes* y que puede formularse como f(x+y)=f(x)+f(y), para todo x, y. Esta ley se materializa en expresiones como: $(x+y)^n=x^n+y^n$, cos(x+y)=cos(x)+cos(y), log(x+y)=log(x)+log(y), etc.

Además,

> *La aplicación de este 'prototipo' explicaría la aparición de errores como: a+(bxc)=(a+b)x(a+c) o* $\sqrt{b+c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$ *1 (Gómez-Granell, 1989, p. 9)*

Este tipo de malentendido también es reportado por Páez (1986).

Ocurre aquí un proceso de descontextualización y pérdida de significación del signo.

**Ejemplo 2**

Hemos de mencionar aquellos malentendidos producto de una **mala comprensión del lenguaje oral** (una de cuyas causas es la semejanza fonética), como es el caso de un alumno que entendió *máximo como un divisor* en lugar de *máximo común divisor*. (Lelis Páez, comunicación personal, marzo de 1994) Priva aquí también el hábito de muchos docentes de matemáticas que emplean abundantemente el lenguaje oral y poco el escrito. En el caso reportado, el niño manifestó que nunca el docente había escrito la frase *máximo común divisor*, y manifestó sorpresa al verla escrita.

### Ejemplo 3

Citaremos aquí una situación ampliamente reseñada en la literatura (Borasi, 1986; Adda, 1987), pero que por su poder de ilustración refleja ampliamente la problemática señalada en el presente trabajo.

Se señala el caso de estudiantes que escriben $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$. Estos estudiantes tacharon el seis del numerador con el seis del denominador, proviniendo el error de la confusión generada entre la escritura de la numeración posicional y el uso extendido de la notación por yuxtaposición para indicar la multiplicación. Adda (1987) denomina a esto **comportamiento de escritura**. Análogamente ocurre con expresiones como $\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}$.¡Un resultado correcto a partir de un procedimiento incorrecto!

### Ejemplo 4

El ejemplo corresponde a una prueba parcial de la asignatura Cálculo I (materia que forma parte del plan de estudio de las Carreras de Matemática y Educación Matemática de la Universidad Nacional Abierta, Venezuela)

Se le proponen al estudiante tres límites. El primero de ellos es

$$\lim_{x \to \infty} \frac{sen\, x}{x}$$

Se le pregunta si es aplicable o no la regla de L’Hôpital.

La respuesta que produce el estudiante comienza así:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{sen\, \infty}{\infty} = \frac{[-1,1]}{\infty}$$

Cabe destacar que la asignatura Cálculo I es prelada por Matemática II, en la cual ya la o el estudiante ha sido expuesto a estos contenidos. Más aún, en el material instruccional se advierte explícitamente acerca del uso del infinito, señalándose que el símbolo $\infty$ indica un comportamiento y que no es un número.

¿ Cómo explicar entonces la respuesta producida por la o el estudiante? En un primer análisis podría decirse que priva en él un automatismo que le induce a un *comportamiento de escritura* el cual se traduce en sustituir la variable x por un valor numérico. A pesar de la advertencia presente en un curso anterior, prevalece en la y el estudiante el hábito arraigado en sus estudios previos a la universidad, en los cuales lo fundamental era operar y obtener algún resultado numérico y casi todos los objetos con los que trataba se comportaban como números. En otras palabras, la y el estudiante había quedado anclado en un contexto numérico. En la expresión del lado derecho esto queda corroborado, pues opera con el intervalo **[-1,1]** como si de un número se tratase. De alguna forma bastante confusa la o el estudiante trata de comunicar algo que leyó en el material instruccional acerca del comportamiento de la función seno cuando x tiende a infinito: su paso por todos los valores de su rango, el cual es precisamente ese intervalo.

**Ejemplo 5**

Se trata en este caso de un examen de la asignatura Matemática II de la Universidad Nacional Abierta (Venezuela), aplicado el 31/07/93 (Segunda Parcial).

Se le propone al estudiante calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg^2 5x}{x\, sen\, 2x}$$

De seguidas mostramos la respuesta dada por un estudiante.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\, tg\, 5x}{x\, sen\, 2x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \frac{sen}{\cos} 5x}{x\, sen\, 2x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 (sen)^2\, 5x}{x \cos 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\, sen\, 5x}{x \cos 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} 4\, tg\ \frac{5}{2} x$$

Nótese que en el primer paso realizado por el estudiante el exponente **2** pasa a ser un coeficiente. El estudiante pareciera manejarse dentro de un contexto netamente aritmético lo cual le impide asignarle el significado dentro de otro contexto al número **2**. No toma en cuenta para nada ni el tamaño ni la ubicación del número en un nivel por encima de la línea base. Sólo considera que el **2** afecta a el signo **tg** por cercanía.

El paso siguiente consiste en reemplazar el signo **tg** por el cociente de **sen** sobre **cos**. Aquí el estudiante seguramente rememora una expresión oral mil veces repetida en la enseñanza media: *tangente es seno sobre coseno*. No obstante el estudiante no percibe el significado funcional asociado a las representaciones sígnicas de las funciones trigonométricas. Menos aún capta el significado de la expresión **5x** como argumento de la función **tg**.

La apreciación anterior queda corroborada en el paso tres, en el cual el estudiante opera con **sen** y **cos** con un automatismo que lo lleva a ver esto como una fracción dividida por otra fracción.

Seguidamente, reitera la regla que aplicó en el primer paso.

Por último, trata de cancelar las **x** y de recomponer **sen** sobre **cos** como **tg**.

**Ejemplo 6**

En este ejemplo, se tiene un error sumamente extraño, el cual fue hallado por el autor en un examen parcial de la asignatura Matemática I de la Universidad Nacional Abierta (Venezuela), prueba aplicada el 24/02/90.

Se propone en el examen la siguiente pregunta:

Sea la función $f(x) = x^2 + 10$. Determine si la función es creciente o decreciente en el intervalo (-∞,0].

La respuesta que da una estudiante se muestra a continuación (respetando en lo posible la disposición espacial del escrito original de la estudiante):

$$\frac{\Delta fx}{\Delta fx} = \frac{fx_2 - fx_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \geq x_2 \ \ decreciente \qquad x_1 \leq x_2 \ \ creciente$$

En donde $= f(x^2) = f(y^2) = (x_2)^2 + 10$

$$f(x_1) = f(y_1)\ (x_1)^2 + 10$$

$$\frac{fx_2 - fx_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left((x_2)^2 + 10\right) - \left((x_1)^2 + 10\right)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{fx_2 - fx_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_4 + 10) - (x_1 + 10)}{x_2 - 1} = \frac{x_4 + 10 - x_1 - 10}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{F(x_2) - fx_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} = x_2$$

Entonces

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \quad x_2 \begin{cases} Como\ dio\ \ positivo \\ x_2 > 0 \\ (Creciente) \end{cases}$$

Lo curioso de esta respuesta es que se cometen varios errores, pero hay un malentendido que resalta sobre los demás: **la estudiante opera con los subíndices** (los eleva al cuadrado, y los divide).

Ocurre aquí que esta alumna no pudo encontrar el **significado contextual** de los números (subíndices) y privó en ella el **significado de base**. Se tiene aquí un caso de **polisemia**.

**Ejemplo 7**

Este caso trata de un niño de 12 años de edad, cursante del 7° Grado de Educación Básica, en una escuela privada de Venezuela.

El niño llama por teléfono al autor de estas líneas para consultar sobre una asignación que le propusieron para ser trabajada en la casa.

El niño lee el enunciado de la tarea así: s*i a es igual siete coma be [.] igual nueve coma ce [.] igual doce ye de [.] igual 15 ...* (Indicamos con [.] una pequeña pausa que hacía durante la lectura).

Si traducimos esta forma de lectura a símbolos sería así: *Si a=7, b=9, c =12 y d=15 ...*

Le repreguntamos al niño y volvió a leer en la misma forma. El niño entendía **a=7,b**. Vale decir, a era un número cuya parte decimal era b. Entendía a la **coma** como un **separador decimal** y no como un separador de las expresiones a=7 y b=9, y así sucesivamente. Igualmente, la conjunción copulativa *y* era leída como un signo con connotación matemática.

En la misma asignación, el enunciado continuaba así:

*Calcula a) a+(b+c)*. El niño leía: *a paréntesis a más paréntesis be más ce paréntesis*. La lectura era más o menos de corte similar a la de la primera parte. No reconocía *a)* como un separador de ítems y lo consideraba parte de la expresión matemática. Se presenta aquí una confusión entre lenguaje y metalenguaje.

# A MANERA DE CONCLUSIÓN

Uno de los puntos centrales de la comunicación de espacios de aprendizaje lo constituye indudablemente la construcción del significado.

Es de interés estudiar las confusiones que se presentan en las y los estudiantes entre los signos que comunican las ideas matemáticas y las ideas mismas, por cuanto estas confusiones indican que la o el estudiante centra más su atención en los signos (más precisamente en el significante) que en el significado de estos signos.

Pareciera que muchos de los malentendidos matemáticos que presentan las y los estudiantes están relacionados con estas confusiones. Particularmente, en el álgebra existe una tendencia a que la y el estudiante manipule signos *vacíos de contenido*, prestándoles escasa o nula atención a los significados de los mismos.

Estamos justamente en medio del problema del significado. El análisis del asunto pasa por estudiar las **interrelaciones** en el **sistema didáctico**. Parte sustancial de estas interrelaciones son de carácter comunicacional y hemos por tanto de estudiar el **sistema comunicacional** asociado al sistema didáctico.

El sistema comunicacional asociado al sistema didáctico pareciera estar sufriendo de lo que Max Black llama ***anemia semántica***.

Desde el punto de vista comunicacional es necesario un proceso de desambiguación, el cual consiste en la **eliminación del equívoco/doble sentido causado por la ambigüedad (léxica, gramatical o sintáctica)**. Esta categoría lingüística ha de ser reinterpretada dentro de la didáctica de las matemáticas. Pero, también este proceso de desambiguación debe considerar los contextos de situación.

Lo que si puede afirmarse fuera de toda duda es que en el proceso de **desambiguación** juega un papel crucial el **contexto**.

Según la visión chomskiana, la capacidad de reconocer la vaguedad de una expresión, es decir, de reducir la ambigüedad, pertenece a la competencia del hablante, o mejor dicho del emisor del mensaje.

Otro elemento sustancial a ser tomado en cuenta es que el sistema comunicacional puede estar afectado por el ***ruido***.

> *En un proceso de comunicación, toda aquella información que no se encuentre codificada será ruido para el sistema y no podrá ser procesada por él. (Izuzquiza, 1990, p. 214)*

Nos hemos topado nuevamente con una categoría tomada prestada de la Teoría de las Comunicaciones. El **ruido** define a todo aquello que altera un mensaje de manera imprevisible, todo lo que hace que una secuencia dada de signos introducida en el canal de comunicación salga bajo la forma de unos signos diferentes. En este sentido, los psicólogos, por ejemplo, estiman que el enfado puede ser considerado como un ruido perturbador del circuito de comunicación en el caso de la comunicación oral.

He allí que han entrado en juego los **factores afectivos**, variable de inmensa importancia en el campo didáctico.

Esta definición de ruido está más cercana a una conceptuación de ese fenómeno en el ámbito didáctico que en el ámbito de la comunicación en general.

En el campo de la didáctica de la matemática, un acercamiento al estudio de la problemática del significado puede ser hecho mediante el supuesto de negar la existencia de significados absolutos y que éstos dependan en gran medida de la representación particular que se emplee. Podríamos ejemplificar esto a través del concepto de fracción, que como hemos discutido con anterioridad en este trabajo, se conocen muchas formas para representarlas (tortas, material concreto, símbolos) o de interpretar el concepto (parte¬todo, cociente indicado, razón, operador) a cada una de las cuales se le puede asociar un significado.

El estudio del significado dentro de la educación matemática ha ido adquiriendo importancia progresiva como ya señaláramos en la introducción.

Rojano (1994) manifiesta que

*Las variaciones que se observan en este panorama de investigaciones, por un lado obedecen a que las bases teóricas de éstas se corresponden con diferentes corrientes o escuelas de la psicolingüística y, por otro, son una manifestación de la ausencia de un paradigma teórico para el estudio del sistema matemático de signos que abarque sus aspectos sintácticos, semánticos, pragmáticos y socioculturales [negrillas añadidas]. (p. 54)*

Por su parte, Godino y Recio (1998) señalan que

*Se debería progresar en el desarrollo de una* ***semiótica específica*** *que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos. (p. 1).*

No obstante, Godino y Batanero (1998) afirman: *creemos con Rotman (1988) que es posible y deseable desarrollar una semiótica específica de las matemáticas*. (p. 1) De hecho, estos investigadores han venido trabajando en esta dirección.

Para finalizar citaremos la opinión de Morris (1974) quien afirma que *el rasgo más sobresaliente de la investigación desarrollada en el campo de la Semiótica durante los últimos años ha sido el gran interés que se advierte por la diversidad de dimensiones de la significación y por la variedad de usos que desempeñan los signos.* (p. 33) Esto pudiera ser un estímulo interesante para investigaciones similares dentro del ámbito de la Didáctica de la Matemática.

Por último, queremos indicar que este no pretende -en modo alguno- ser un trabajo acabado sobre el tema. Constituye sólo un eslabón en un trabajo de más largo aliento que lleva a cabo el autor el cual incluye la observación de clases; el análisis de los textos, de las producciones escritas del estudiantado (apuntes, respuestas de exámenes), producciones escritas de los profesores (enunciados de exámenes, guías, lo que éste escribe en el pizarrón) y por supuesto la comunicación oral en el aula entre los diferentes actores del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El deseo es compartir experiencias y estimular a otros para que desarrollen investigaciones en esta dirección.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

**Adda, J**. 1975. *Initiation au langage mathématique: Analyse d'une experience d'enseignement (Chantiers de pedagogie mathematique, brochure 2).* París: Regionale Parisienne de l'association de Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

**Adda, J**. 1987. *Elementos de didáctica de las matemáticas*. México: CINVESTAV.

**Alson, P**. 1996. *Métodos de grafi cación*. Caracas: Erro.

**Alson, P**. 2000. *Elementos para una teoría de la significación en didáctica de la matemática*. Tesis de Doctorado, Universidad de Burdeaux 1.

**Amelli, M. R. y Lemmo, J**. 1994. *Arco Iris Básico. Matemática 9*. Caracas: Librería Editorial Salesiana, S.A. Anghileri, J. (1995). Negotiating meanings for division. Mathematics in the School. 24(2), 2-4.

**Aschner, M. J**. 1971. El lenguaje de la enseñanza. En B. Othanel Smith y Robert H. Enis. *Lenguaje y conceptos en la educación: Estudio analítico de las ideas educacionales*. Cap. 8, pp. 125-140. Buenos Aires: Ateneo.

**Astolfi, J. P**. 1999. *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla, España: Díada.

**Austin, J. L. y Howson, A. G**. 1979. Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 10(3), 161-197.

**Baldor, A**. 1962. *Álgebra elemental*. Guatemala: Cultural Centroamericana.

**Barrow, J**. 1997. *¿Por qué el mundo es matemático?* Barcelona, España: Grijalbo Mondadori.

**Bell, E. T**. 1949. *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Bertin, Jacques**. 1982. La gráfica. En Metz C. y otros, *Análisis de las imágenes* (Serie Comunicaciones) (pp. 215-236). Barcelona, España: Buenos Aires.

**Beyer, W**. 1986. Una revisión crítica a la enseñanza del concepto de función. *Paradigma*, XIV-XVII, 238-269.

**Beyer, W**. 1994. *El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

**Beyer, W**. 1996. Algunos aspectos epistemológicos de la Matemática ¿es la Matemática un lenguaje?. UNA *Opinión*, 14, 94-99.

**Beyer, W**. 1998a. *La interacción comunicativa en el aula de matemática y su relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje*. Conferencia Paralela, Tercer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (III CIBEM), Caracas, 26 al 31 de julio.

**Beyer, W**. 1998b. *Una posible caracterización del lenguaje matemático y su repercusión en la dinámica comunicacional del aula*. Ponencia presentada en el Grupo de Trabajo "La Comunicación en el Aula", Tercer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (III CIBEM), Caracas, 26 al 31 de julio.

**Beyer, W**. 1999. El significado en matemática: Un problema didáctico. *Enseñanza de la Matemática*, 8(1), 3-13.

**Beyer, W**. 2000. E*l significado en matemática: Un problema didáctico*. Informe de Investigación presentado en la Décima Cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME-14), Panamá, 17 al 21 de julio.

**Beyer, W**. 2001. *Un estudio etnográfico de un aula de matemáticas.* Mimeo.

**Beyer, W**. 2002a. ¿Ejercicio o problema? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 15, Tomo 2, 1040-1046.

**Beyer, W**. 2002b. *Una alternativa para la enseñanza del Teorema de Pitágoras*. Comunicación Breve, 16ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME-16), Cuba.

**Beyer, W**. 2003a. *Didáctica de la matemática*. Mérida: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

**Beyer, W**. 2003b. *Dienes, Brousseau y Alson: Contraste de tres visiones acerca del aprendizaje de la matemática*. Seminario "Modelos matemáticos en Didáctica de la Matemática". Doctorado en Educación, Universidad Central de Venezuela. (Trabajo no publicado)

**Beyer, W**. y **Suárez, N**. 1998. Influencia del lenguaje formal matemático en la solución de problemas con números racionales. *Educación y Ciencias Humanas*, 6(10), 57-83.

**Boltianski, V. G**. 1981. *Figuras equivalentes equicompuestas*. Moscú: MIR.

**Borasi, R**. 1986. Algebraic explorations of the error $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$. *Mathematics Teacher*, 79(4), 246-248.

**Breijo, B. y Rodríguez, P**. 1987. *Matemática 9º Grado*. Caracas: Triángulo.

**Brousseau, G. y otros**. 1986a. Observing students at work. En A. G. Christiansen y otros, *Perspectives of mathematical education*. Boston, USA: D. Reidel Publishing Company.

**Brousseau, G**. 1986b. *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/

**Brousseau, G**. 1994. Los diferentes roles del maestro. En: Cecilia Parra e Irma Saiz (Comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (Capítulo IV, pp. 65-94).Buenos Aires: Editorial Paidós.

**Brousseau, G**. 2000. Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5-38.

**Bushaw, D**. 1970. *Fundamentos de topología general*. México: Limusa-Wiley.

**Cajori, F**. 1993. *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications, INC.

**Callejo, M. L**. 1994. *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

**Campiglio, A. y Eugeni, V**. 1992. *De los dedos a la calculadora: La evolución del sistema de cálculo*. Barcelona, España: Paidós.

**Campos, R**. 1994. Campos semánticos y el problema del significado en álgebra. UNO *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, N° 1, julio, 45-56.

**Charnay, R**. 1994. Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, Cecilia y Saiz, Irma (Comps.) (1994). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidós.

**Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón J**. 1997. *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE-Editorial Horsori.

**Chevallard, Y**. 2000a. *La transposición didáctica*. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

**Chevallard, Y. Bosch, M. y Gascón, J**. 2000b. Didáctica de las matemáticas. En: Manual de Educación. (pp. 324-379) Grupo Océano.

**Chomsky, N**. 1963. *Análisis formal de los lenguajes naturales*. Madrid: Alberto Corazón.

**Chomsky, N. y Miller, G**. 1976. *El análisis formal de los lenguajes naturales*. Madrid: Alberto Corazón.

**Clemente Garduño, D., Ayala García, F., Favila Jardón, J. L. y López Estrad, E**. 2001. Las fracciones. *Correo del Maestro*, Nº 56. Disponible en: http://www.correodelmaestro/ anteriores/2001/enero/2nosotros 56.htm

**Collette, J. P**. 1986. *Historia de las matemáticas*. México: Siglo Veintiuno.

**Cramer, K., Behr, M., Post, T. y Lesh, R**. 1997. *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades-Level 2*. Dubuque Iowa: Kendall/ Hunt Publishing Co. Disponible en: http://education.umn.edu/ rationalnumberproject/97_3.html

**Crump, T**. 1994. *La antropología de los números*. Madrid: Alianza.

**Cullmann, G. y otros**. 1967. *Elementos de cálculo informacional (Curso de matemáticas superiores, T. IV)*. Bilbao: Urmo.

**Davis, P. y Hersh, R**. 1989. *Experiencia matemática*. Barcelona, España: Labor y Ministerio de Educación y Ciencia.

**Delval, J**. 1983. *La construcción del conocimiento en la escuela (Cuadernos de pedagogía, 11)*. Barcelona, España: LAIA.

**Dienes, Z**. 1971. *La potencia de la matemática*. Buenos Aires: Ángel Estrada y Cia. S.A.

**Dienes, Z**. 1975. *Enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela primaria*. Buenos Aires: Paidós.

**Dienes, Z**. 1977. *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*. Barcelona, España: Teide.

**Dienes, Z**. 2000. The theory of the 6 stages of learning with integers. *Mathematics in School*, March.

**Dorgan, K**. 1994. What textbooks offer for instruction in fraction concepts. *Teaching Children Mathematics*, 1(3), 150-155.

**Dudley, U**. 1993. *Resources for calculus. Vol. 5. Readings for calculus*. MAA Notes, Vol. 31. USA: MAA.

**Dumond, B**. 1980. *L'Influence du langage et du contexte dans des epreuves de type «logique» (Analyse des comportements d'une population très hétérogène en face de tests portant apparemment sur l'implication)*. These présentée a L'Universite Paris VII pour obtenir le Diplome de Docteur de 3° cycle en Didactique des Mathematiques.

**Durand, J**. 1982. Retórica del número. En Jean Cohen y otros, Investigaciones retóricas II (pp. 155-165). Barcelona, España: Buenos Aires.

**Eco, U**. 1972. *La estructura ausente: Introducción a la semiótica*. Barcelona, España: Lumen.

**Eco, U**. 1988. *Signo*. Barcelona, España: Labor, S.A.

**Editorial**. 1992. *Educación Matemática*, 4(1), 3-4.

**Escudero Yerena, M. T**. 1977. *La comunicación en la enseñanza*. México: Trillas.

**Eves, H**. 1964. A coment on Professor Charles L. Smith’s paper “On the origin of `>’ and `<’”. *The mathematics Teacher*, LVII(7), p. 481.

**Farfán M., Rosa M**. 1997. *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y del cambio*. México: Iberoamérica.

**Filloy, E**. 1999. *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.

**Flores, A**. 1996. Acción, comunicación, y reflexión: componentes esenciales para entender matemáticas. En L. M. Santos Trigo y E. Sánchez Sánchez, *Perspectivas en Educación Matemática* (pp. 85-102). México: Iberoamérica.

**Flores de Tovar, O. y otros**. 1988. *Matemáticas 9*. Caracas: TEDUCA y Santillana, S.A.

**Flórez Ochoa, R**. 1996. *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá: McGraw-Hill.

**Font, V**. 2001. *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas*. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/

**Fregoso, A**. 1979. *Los elementos del lenguaje de la matemática: Funciones* (Vol. 2). México: Trillas.

**Ganong, W**. 1965. *Manual de fisiología médica*. México: El Manual Moderno, S. A.

**García-Pelayo y Gross, R**. 1982. *Pequeño Larousse Ilustrado*. París, Larousse.

**Gardner, H**. 1987. *Estructuras de la mente: La teoría de las múltiples inteligencias*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Gascón, J**. 1994. El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 6(3), 37-51.

**Gascón, J**. 2001. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), 4(2), 129-159.

**Gheverghese, G**. 1996. *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid: Pirámide.

**Gid Hoffmann, J**. 1990. *Selección de temas de matemática: Logaritmos, trigonometría, complejos, progresiones*. Caracas: SPHINX.

**Glaeser, G**. 1977. *Matemática para el profesor en formación*. Buenos Aires: EUDEBA.

**Godino, J**. 1991. Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En: Ángel Gutiérrez Rodríguez (Ed.). *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. (Capítulo 3, pp. 105-148). Madrid: Síntesis.

**Godino, J. y Batanero, C**. Enero, 1998. *El significado de los objetos matemáticos como unidad de análisis en didáctica de las matemáticas*. [En línea] Disponible en: http://dalila.ugr.es/~jgodino/Osnabruk.htm.

**Godino, J. y Recio, A**. Enero, 1998. *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática*. [En línea] Disponible en: http://dalila.ugr.es/~jgodino/pme22.htm.

**Gómez, P. y Rico, L**. 25/09/1997. *Social interaction and mathematical discourse in the classroom*. [En línea] Disponible en: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/reportes/socintymatdisc/socintymatdisc.html.

**Gómez-Granell, C**. 1989. La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, lenguaje y educación*, 3-4, 5-15.

**González, J**. 1987. *Matemáticas para 7º Grado*. Caracas: McGraw-Hill.

**Green, D. R**. 1977. Arithmetic symbols and algebraic notation. *Mathematics in School*, 6(1), 2-4.

**Guillerault, M. y Laborde, C**. (1980-1981). Une activite de communication en geometrie. En *Centre National de la Recherche Scientifique (Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Laboratoire d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble) Seminaire de l'equipe de recherche en didactique et pedagogie des mathématiques*. Grenoble: Autor.

**Guiraud, P**. (s. f.). *La Semiología*. Lima: Studium.

**Guiraud, P**. 1988. *La semántica* (Breviarios, N° 153). México: Fondo de Cultura Económica.

**Halliday, M. A. K.** 1986. *El lenguaje como semiótica social: La interpretación social del lenguaje y del significado*. México: Fondo de Cultura Económica.

**Hammer, P.** 1974. Lenguaje, aproximación y topologías ampliadas. En I. Rauch y Ch. Scott (Eds.), *Estudios de metodología lingüística* (pp. 56-68). Madrid: Gredos.

**Hempel, C**. 1976. Sobre la naturaleza de la verdad matemática. En: Newman, James. (Comp.). SIGMA. *El mundo de las matemáticas, Volumen 5 (pp. 7-22)*. Barcelona, España: Grijalbo.

**Hiebert, J**. 1988. Una teoría del desarrollo de la competencia con símbolos matemáticos escritos. *Education Studies in Mathematics* (traducción al castellano de Carlos Sánchez, Ministerio de Educación), 19(3), 333-355.

**Ifrah, G**. 1997. *Historia universal de las cifras: La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe.

**Izuzquiza, I**. 1990. *La sociedad sin hombres: Niklas Luhmann o la teoría como escándalo*. Barcelona, España: Anthropos.

**Jastrow, R**. 1985. *El telar mágico: El cerebro humano y el ordenador (Biblioteca Científica Salvat, N° 7)*. Barcelona, España: Salvat.

**Kasner, E. y Newman, J**. 1972. *Matemáticas e imaginación*. México: C.E.C.S.A.

**Kelley, J. L**. 1975. *Topología general*. Buenos Aires: EUDEBA.

**Kieran, C. y Filloy Y., E**. 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*. 7(3), 229-240.

**Kilpatrick, J. y otros**. 2005. *Meaning in mathematics education*. USA: Springer.

**Krutetskii, V. A**. 1976. *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

**Laborde, C**. 1982. *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l' enseignement mathématique*, Tesis de graduación,, Universidad de Grenoble, Francia.

**Lorenzo, J**. 1971. *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

**Love, E. y Tahta, D**. 1977. Language across the curriculum: Mathematics. *Maths Teaching*, 79, 48-49.

**Lucas, O**. (s/f). Matemáticas: cómo manejar cifras astronómicas sin perder la cuenta. *Muy Interesante, Año 7*, N° 83, 52-58.

**Mancera, E**. 1992. Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*, 4(2), 30-54.

**Maravall, D**. 1975. *Diccionario de matemática modern*a. Madrid: Nacional.

**Maron, M. J**. 1979. The student's universal distributive law. Mathematics Teacher, 72(1), 46-47.

**Massey, W. S**. 1972. *Introducción a la topología algebraica*. España: Reverté.

**Mayor, J**. 1985. Pensamiento y lenguaje. En Juan Mayor (Comp.), *Psicología del pensamiento y del lenguaje (Unidad didáctica IV)*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

**Míguez, Á**. 1993. *La influencia del tipo de lenguaje matemático en la traducción de problemas enunciados en palabras*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

**Miller, J**. 15/08/1997. Earliest uses of various mathematical symbols. [En línea] Disponible en: http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html.

**Miller, J**. 15/08/1997. Earliest known uses of some of the words of mathematics. [En línea] Disponible en: http://members.aol.com/jeff570/ mathword.html.

**Moorhouse, A**. 1961. *Historia del alfabeto*. (Breviarios, N° 160). México: Fondo de Cultura Económica.

**Morris, Charles**. 1974. *La significación y lo significativo*. Madrid: Alberto Corazón.

**Morris, C**. 1985. *Fundamentos de la teoría de los signos*. Barcelona, España: Paidós.

**Navarro, J**. 1979. Números primos: Balance de nuestra ignorancia. En *Universitas: Gran enciclopedia del saber (La matemática, T. 12)* (pp. 75-80). Barcelona, España: Salvat Editores.

**Nicholson, A. R**. 1977. Mathematics and language. *Maths in School*, 6(5), 32-34.

**Orive R., P**. 1978. *Estructura de la información*. Madrid: Pirámide, S.A.

**Orton, A**. 1990. *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata – Ministerio de Educación y Ciencia.

**Oteiza Morra, F. y Miranda Vera, H**. 2001. *Desarrollo curricular: una mirada desde la innovación en la enseñanza de la matemática*. Disponible en: http://www.comenius.usach.cl/noticias2002/Desarrollo.doc

**Páez, L**. Mayo, 1986. *Etiología del error en la matemática escolar*. Ponencia presentada en el V Encuentro sobre Enseñanza de la Matemática, Caracas.

**Pelletier, J-L**. 1958. *Etapas de la matemática*. Buenos Aires: Losada.

**Peltier, M. L**. 1993. Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia. *Educación Matemática*, 5(2), 4-10.

**Picard, N**. 1970. *La matemática moderna en los primeros grados*. Buenos Aires: Ángel Estrada y Cia. S.A.

**Piez, C. y Voxman, M**. 1997. Multiple representations: Using different perspectives to form a clearer picture. *The Mathematics Teacher,* 90(2), 164-166.

**Pignatari, D**. 1977. *Información, lenguaje y comunicación*. Barcelona, España: Gustavo Gili.

**Pimm, D**. 1986. The symbol is the object. En Mathematics Education Research Centre, *Papers in honour of Richard Skemp*. University of Warwick: Autor.

**Pimm, D**. 1990. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: MEC-Morata.

**Pinto dos Santos, M. y Matos, J. F**. 2000. *School mathematics learning: participation through appropriation of mathematical artefacts*. Disponible en: http://correio.cc.fc.ul.pt/~jfl m/artifacts.html

**Postic, M**. 2000. La relación educativa. *Factores institucionales, sociológicos y culturales*. Madrid: Narcea, S.A.

**Preston, M**. 1978. The language of early mathematical experience. *Maths in School*, 7, 31-32.

**Resnick, L. y Ford, W**. 1990. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, España: Paidós Ibérica – Ministerio de Educación y Ciencia.

**Rey Pastor, J. y Babini, J**. 1985. *Historia de la matemática (Vol. 1)*. España: GEDISA.

**Robles de Iturbe, N. I**. 1965. *Signos, lenguaje y semiótica*. Barcelona, España: Paidós.

**Rodríguez Diéguez, J. L**. 1983. Acto sémico y acto didáctico. En J. Basabe B. y otros (Comps.), *Estudios sobre epistemología y pedagogía*. Madrid: Anaya, S.A.

**Rodríguez Diéguez, J. L**. 1985. *Curriculum, acto didáctico y teoría del texto*. Madrid: Anaya, S.A.

**Rodríguez Illera, J. L**. 1988. *Educación y comunicación (Paidós Comunicación, N° 33)*. Barcelona, España: Paidós.

**Rodríguez Marcos, A., Gutiérrez Ruiz, I. y Medina Rivilla, A**. 1995. *Un enfoque interdisciplinar en la formación de los maestros*. Madrid: Narcea, S.A.

**Rojano, T**. 1994. La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45-56.

**Ruiz Morón, D**. 2003. *Lenguaje en clases de matemática*. Mérida: Universidad de Los Andes, Consejo de Publicaciones.

**Salazar, J. y Rojas, J**. (s/f). *Matemática. Educación Básica*. 9º Grado. Caracas: Romor.

**Saussure, F**. 1977. *Curso de lingüística general*. Buenos Aires: Losada, S.A.

**Serrano, S**. 1992. *La semiótica: una introducción a la teoría de los signos*. España: Montesinos.

**Serrano, W**. 2002. El discurso matemático en el aula. Un análisis desde la observación del curso Sistemas Numéricos. *Sapiens*, Año III, Nº 1, 81-103)

**Serrano, W**. 2005a. El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía, XXVI(75)*, 131-164.

**Serrano, W**. 2005b. *Elementos de Álgebra. Unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez"*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

**Sestier, A**. 1989. *Historia de las matemáticas*. México: Editorial Limusa-Noriega.

**Shuard, H y Rothery, A**. 1984. *Children reading mathematics*. Londres: John Murray.

**Sierpinska, A**. 2000. *Theory of didactic situations. Lecture notes*. Disponible en: http://alcor.concordia.ca/~sierpan/notes.htm

**Skemp, R**. 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

**Smith, C. L**. 1964. On the origin of ">" and "<". *The Mathematics Teacher, LVII(7)*, 479-481.

**Sotelo, M**. 1987. *Historia de los números*. Caracas: Algoritmo.

**Stöcker, K**. 1964. *Principios de didáctica moderna*. Buenos Aires: Kapelusz.

**Swann, H. y Johnson, J**. 1975. *Prof. E. McSquared's original, fantastical & highly edifying calculus primer*. Los Altos, EE.UU.: William Kaufmann Inc.

**Tall, D**. 1986. Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A tribute to Richard Skemp. *En Paper in Honour of Richard Skemp* (pp. 21-36). Inglaterra: Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

**Toffler, A**. 1980. *La tercera ola*. Bogotá: Círculo de Lectores.

**Treffers, A**. 1987. *Three Dimensions. A model of goal and theory description i mathematics instruction-The Wiskobas Project*. The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

**Ullmann, S**. 1976. *Semántica: Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.

**Uribe, J. y Berrío, I**. 1999. *Matemática Constructiva 9*. Caracas: EDINOVA, S.A.

**Vergnaud, G**. 1995. *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

**VerLee Williams, L**. 1986. *Aprender con todo el cerebro. Estrategias y modos de pensamiento: visual, metafórico y multisensorial*. Barcelona, España: Ediciones Martínez Roca.

**Viedma, J**. (s/f). *Lecciones de geometría intuitiva*. Colombia: McGraw-Hill.

**Vigotsky, L. S**. 1998. *Pensamiento y lenguaje*. Cuba: Pueblo y Educación.

**Wells, D**. 1997. *The Penguin Book of curious and interesting mathematics*. Londres: Penguin Books.

**Yerushalmy, M. y Gafni, R**. 1992. Syntactic manipulations and semantic interpretations in algebra: The effect of graphic representation. *Learning and Instruction, Vol. 2*, 303-319.

**Zevenbergen, R**. 1996. *Constructivism as a liberal bourgeois discourse. Educational Studies in Mathematics. 31(1-2)*, 95-113.

## ANEXO

Actividades:

**Amonestación (A)**: las o los profesores interrumpen la estructura de actividad con comentarios acerca de la transgresión de las normas de clase.

**Asignación de Actividades de Clase (AAC)**: la o el profesor plantea una actividad (como resolver un ejercicio, por ejemplo) la cual debe ser ejecutada por las y los estudiantes (individualmente o en grupo, según sea el caso). Se incluyen aquí las indicaciones e instrucciones proporcionadas por el docente para la ejecución de la actividad.

**Asuntos de Clase (AC)**: la o el profesor puede dar información acerca de alguna tarea, de proyectos de clase o de toda la escuela, de exámenes próximos, de eventos especiales, etc. A menudo las y los estudiantes hacen preguntas acerca de estos asuntos.

**Conversaciones Estudiante-Estudiante: (CEE)**: en parejas o grupos pequeños, la y los estudiantes hablan unos con otros en privado. Están sentados en sus puestos y no hablan acerca del trabajo.

**Conferencias Profesor-Estudiante (CPE)**: la o el profesor y uno o varios estudiantes sostienen una discusión privada, generalmente al frente del aula y acerca de algún aspecto del trabajo del estudiante.

**Copiar Apuntes (CA)**: las y los estudiantes copian lo escrito en la pizarra.

**Da Instrucciones (DI)**: actividad que consiste en que la o el docente le dice a las y los estudiantes que hagan una determinada cosa o imparte órdenes.

**Diálogo Triádico (DT)**: es la estructura de actividad más común de la clase. Las y los profesores plantean preguntas, piden a las y los estudiantes que las respondan y evalúan las respuestas. Las preguntas y/o las respuestas podrían ser leídas de un texto.

**Entrega de Materiales (EM)**: la o el profesor le entrega a las y los estudiantes algún material: guía, libro, calculadora, etc. En esta actividad se incluye la descripción que del material haga la o el docente y/o los comentarios que él realice. También se incluye el tiempo invertido en plegar, compaginar, etc.

**Entrega de Notas (EN)**: actividad en la cual la o el profesor le hace entrega a las y los estudiantes de un examen o tarea corregida, o simplemente lee las califi caciones.

**Exposición del Profesor (EP)**: la o el profesor puede, inicialmente, presentar material nuevo en forma de monólogo, diálogo o leyendo algún material;o puede extender más su explicación en respuesta a preguntas de las y los estudiantes. Esta explicación puede consistir de conceptos, propiedades, operaciones.

**Interrupciones (I)**: una intrusión al patrón de actividad por un participante o evento externo (anuncio por el altavoz, visitante, chiste, etc.) o por una o un miembro de la clase (solicitud para salir, etc.).

**Lectura de estudiante (LE)**: esta actividad consiste en que una o un estudiante lee algún material.

**Pasar Lista (PL)**: la o el profesor puede hacer un reconocimiento visual y anotar las ausencias o puede nombrar a todos las y los estudiante según la lista. Es posible que pida información a las y los estudiantes acerca de las y los ausentes o las y los estudiantes pueden proporcionar esta información en forma voluntaria.

**Recoger la Asignación (RA)**: esta es una actividad en la cual la o el profesor pide los trabajos de las y los estudiantes (puede ser una AAC cuya respuesta pide la o el profesor que sea plasmada en papel o puede ser una Tarea que él haya asignado). Generalmente, las y los estudiantes se levantan y le llevan al docente sus papeles y éste los recibe al frente del aula.

**Repaso (R)**: la o el profesor puede, ya sea hacer una síntesis con un monólogo de profesor o hacer preguntas a las y los estudiantes mediante el diálogo triádico acerca de la temática de la clase anterior.

**Revisar en Clase (RC)**: esta es una actividad en la cual la o el profesor pide los resultados de los trabajos que las y los estudiantes han realizado en sus puestos en esa clase (de una AAC). Las y los estudiantes ofrecen respuestas y éstas son evaluadas por la o el profesor.

**Revisar la Tarea (RT)**: una actividad en la que la o el profesor pide las respuestas a las preguntas de la tarea.

**Trabajo en Grupos (TG)**: una actividad en la que las y los estudiantes trabajan en pequeños grupos cuyos miembros cooperan para llevar a cabo el trabajo. Es también una estrategia mediante la cual se desarrolla alguna otra actividad.

**Trabajo Individual (TI)**: las y los estudiantes trabajan independientemente en sus puestos contestando preguntas o, resolviendo ejercicios o problemas que se proponen en clase. Es también una estrategia mediante la cual se desarrolla alguna otra actividad.

**Trabajo de Pizarra de Estudiante (TPE)**: a las y los estudiantes se les pide pasar a la pizarra para escribir sus respuestas o para llevar a cabo la solución de un ejercicio o de un problema directamente. A esta actividad la sigue la revisión del trabajo de pizarra.

**Trabajo de Pizarra del Profesor (TPP)**: una actividad en la que la o el profesor da una explicación o resuelve un ejercicio escribiendo en la pizarra.

### Tipos de Mensajes

**Mensajes Destinados a Instruir**: comunicaciones que tienen relación con los conocimientos o buscan alcanzar objetivos pedagógicos.

**Mensajes Destinados a Dirigir**: comunicaciones relativas a la ordenación de procedimientos y normas.

**Mensajes Destinados a Asegurar el Control**: comunicaciones relativas al mantenimiento de la disciplina y del orden.

# CURRÍCULO, INTERNET Y MATEMÁTICAS ESCOLARES

*Rovimar Serrano Gómez*
*Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico de Caracas rovimars@gmail.com*

*Hermelinda Torrealba*
*Unidad Educativa Nacional Bolivariana Armando Zuloaga Blanco Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM) hermetms@gmail.com*

*Dr. Wladimir Serrano Gómez*
*Profesor Asociado del Instituto Pedagógico de Miranda J.M.S.M., U.P.E.L.*
*wserranog@gmail.com*

## EL SPUTNIK, EL MOVIMIENTO DE LA MATEMÁTICA MODERNA Y ALGUNAS DISCUSIONES CURRICULARES

Uno de los cambios curriculares en Ciencias Naturales y Matemáticas, en la Escuela y en el Liceo venezolanos, que mayor repercusión tuvo en el ámbito internacional fue motivado por el lanzamiento del *Sputnik* por parte de la Unión Soviética y el consecuente surgimiento de la *Matemática Moderna*. La carrera espacial, el desarrollo tecnológico y, en el fondo, el afianzamiento de los Estados Unidos de América como súperpotencia mundial, derivó en tan significativos cambios. Ni las atrocidades cometidas durante las dos guerras mundiales, el lanzamiento de las bombas atómicas, el impulso armamentista (atómico y no-atómico), la naturaleza del mundo tras la Guerra Fría, el impacto de la globalización económica, del capitalismo, de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación o, más recientemente, la invasión a Irak, Afganistán, Palestina o a los países de centro y sur América, desencadenaron tal interés y tales cambios curriculares en el campo de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas o las ciencias.

En el fondo, prevalece la idea de que las matemáticas y, particularmente, las matemáticas escolares, son *neutras*, esto es, que las matemáticas nada tienen que hacer ante esta compleja realidad -si es que ésta es develada a la conciencia colectiva-. Sólo desde la *pedagogía crítica, la educación matemática crítica*[1] y desde los *aportes práctico-filosóficos de Paulo Freire* en América del Sur, por poner tres ejemplos, se ha abordado el problema del papel sociopolítico de la educación y, particularmente, de la educación matemática en el mundo moderno. En Venezuela, así como en otros países de América del Sur, se ha impulsado transformaciones curriculares orientadas por el papel que puede desempeñar la educación en la formación de un *nuevo hombre* que pueda reestructurar en la praxis la realidad (en particular, en cuanto a fenómenos como la opresión, la violencia y las desigualdades). Las matemáticas son entendidas entonces, al menos en estos documentos curriculares, desde una visión inter y transdisciplinar.

Otras tesis, que han motivado cambios más puntuales en el currículo escolar de matemáticas en Venezuela, tienen que ver con los

[1] En Venezuela, estos aportes provienen fundamentalmente del Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática.

niveles de rendimiento y con ciertos estándares internacionales (cabe señalar, por ejemplo, los estudios del Ministerio de Educación, 1998a, 1998b, 1999; PISA y TIMSS).

También, ya desde la última década del siglo XX, las TIC (en especial el uso de Internet) han sido tema central de las discusiones curriculares. Las políticas educativas en nuestro país, así como en el ámbito internacional, se han orientado a fomentar el uso del PC y de Internet por parte de la población estudiantil. El impacto creciente de las nuevas tecnologías ha impulsado el uso de Internet y de paquetes como *Maple, Mathlab, Cabrí, SPSS, Excel* y *Atlas-Ti*, entre muchos otros, la consulta de páginas web, *grupos de discusión on-line,* ***redes sociales*** (que integran chat, videos y foros), así como el uso de calculadoras simples, graficadoras o estadísticas en cursos de la escuela, el liceo y la universidad.

En Venezuela, el acceso a Internet en los espacios educativos es una política de Estado desde principios del siglo XXI. Ya en estos diez años del milenio que comienza, nuestro país cuenta con más o menos 2.000 centros informáticos, entre los que se cuentan Centros Bolivarianos de Informática y Telemática (CBIT), Centros de Gestión Parroquial (CGP) y súper-aulas, entre otros. Cabe destacar también la dotación, desde 2009, de 350.000 computadores *lap-top* a buena parte de los primeros grados de la Escuela Básica de las escuelas oficiales del Subsistema de Educación Primaria Bolivariana, en especial las que se ubican en las zonas y regiones más desfavorecidas del país (Proyecto Canaima Educativo).

Por otra parte, podemos preguntarnos por el papel del Internet (y de las TIC) en la actualidad internacional. Para algunos, el mundo moderno puede catalogarse como *sociedad de la información y del conocimiento*, sosteniendo además que ésta es más igualitaria y democrática que las anteriores, argumentando que la información, gracias a las TIC, Internet, etc., es accesible a *todos*. No obstante, las estadísticas de acceso a Internet en el mundo muestran las grandes desigualdades que al respecto existen.

El Foro Mundial Económico[2] en su Reporte Global sobre Tecnología de la Información 2007-2008, presenta el panorama sobre el

---

[2] **El World Economic Forum (Foro Mundial Económico, FEM),** es una organización que tiene como objetivos ***configurar las agendas mundial, regional e industrial***.

acceso a Internet y otros avances relacionados; para ello, compara variables políticas, sociales y económicas de 125 países. El país que lidera el uso de la WWW es Dinamarca, seguido de Suecia, Suiza y Estados Unidos. En este estudio, que refleja las posibilidades que tiene las personas de acceder a la información y a los procesos de la globalización, la República Bolivariana de Venezuela aparece en el puesto 66, lo que indica que la incorporación al uso de Internet entre la población mundial aún no es equitativa. Por otra parte, cerca del 97% de la población de África no tiene acceso a Internet ni a otras tecnologías modernas; además, cerca del 65% de los usuarios de Internet se encuentran entre EE.UU. y Europa.

La brecha tecnológica entre nuestros pueblos es simplemente una de las nuevas formas de exclusión y desigualdad. Mora (2003) señala que el uso de la computadora y del Internet como una de las recientes tendencias de la enseñanza de la matemática, aún con el intenso debate en el ámbito académico, ha tenido muy poca repercusión en los sistemas educativos de nuestro continente, *a pesar de las grandes expectativas que se han desarrollado en el marco de las reformas educativas*.

Ahora bien, la falsa tesis que describe a la sociedad actual como más igualitaria y democrática que las anteriores (tal es el caso de la sociedad industrial, por ejemplo), precisamente por el hecho de que *todos* pueden acceder a la información y al conocimiento, deja de lado los grandes problemas en el acceso a Internet (y a las TIC en general) de buena parte de la población mundial, problemas que se ven no sólo en los primeros años de la escuela, sino también en nivel de secundaria y en la universidad. Esta falsa tesis concuerda con la visión postmoderna que ha calado de manera significativa en los espacios universitarios, movida por el *vacío epistémico* que cobija construcciones teóricas inconsistentes y ejemplifican el *todo vale* que describió Feyerabend. En estos escenarios, las estructuras de opresión, las inequidades, las desigualdades y la libertad de los mercados y del capital, constituyen una especie de *status quo*, son parte de la complejidad. Así, las visiones académicas postmodernas sostienen, implícitamente o no, la *neutralidad política* de la educación.

Las TIC y el uso educativo de Internet son uno de los ejes curriculares comunes en los sistemas educativos de Latinoamérica. No obstante, los problemas de acceso a estas tecnologías aún no están superados. Resulta curioso que, siendo el lanzamiento del Sputnik (o más bien la carrera de dominio espacial que este lanzamiento inició) un hecho histórico y político que implicó tan grandes cambios y transformaciones curriculares en el mundo, sea paradójicamente poco conocido por la comunidad de profesores y técnicos del currículo, y siendo el Internet la punta de lanza de quienes defienden la *sociedad de la información* y la herramienta que ha impulsado cambios curriculares importantes en el ámbito internacional, sea justo una de las que presenta, ya entrado el siglo XXI, importantes dificultades de acceso para los estudiantes en Latinoamérica.

Sin embargo, ante este panorama, podemos preguntarnos, ¿cuáles son algunas de las implicaciones educativas del uso de Internet por buena parte de la población estudiantil, en países en los que esta brecha tecnológica se supone superada (al menos en lo que al rendimiento o resultados de evaluación se refiere)? Más aún, ¿qué paradojas podemos mostrar en este sentido? La siguiente sección apunta en esa dirección.

Uno de los puntos que queremos destacar es que, *aún cuando existe la concepción generalizada de que el Internet es parte medular de todos los procesos y estructuras sociales, sus vínculos con la educación que se imparte en nuestras instituciones escolares son bastante pobres*. Otro es que *estudiar el currículo desde una* ***lente tecnológica*** *ofrece una mirada bastante parcial de la sociedad moderna*.

## EL CASO TIMSS. SOBRE EL ACCESO A INTERNET Y SUS VÍNCULOS CON EL *RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS*

El TIMSS es uno de los más amplios estudios internacionales de evaluación de competencias de los estudiantes en ciencias y matemáticas. Este estudio estuvo motivado en los procesos de globalización y los vínculos que sus promotores encuentran con las políticas educativas y el desarrollo de los sistemas educativos. Uno de los resultados de este trabajo fue la publicación de un ranking comparativo en el que se evalúa los logros académicos de las y los estudiantes en los países en que fue realizado.

*These comparisons shed light on a host of policy issues, from access to education and equity of resources to the quality of school outputs. They provide policymakers with benchmarks to assess their systems performances and to identify potential strategies to improve student achievement and system outputs.**

Una de las hipótesis más comunes, aunque no formulada explícitamente, fue que países como Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, la Federación Rusa, el Reino Unido y los Estados Unidos de América, estarían en los primeros lugares del ranking que reportó el TIMSS. Sin embargo, esto no fue así en todos los casos. Ni siquiera Dinamarca, que tiene un ingreso per cápita superior al promedio de los países con mayor desarrollo tecnológico e industrial y lidera el uso de la WWW, ocupó los primeros lugares de esta evaluación. Por ejemplo, el cuadro 1 muestra los resultados del TIMSS en otros países comparados con los de EE.UU. Al respecto, cabe preguntarse ¿por qué países fuera del grupo del G8 o de las cabezas de las listas de acceso a Internet en los últimos diez o quince años, obtuvieron una diferencia significativa superior o los mismos resultados que EE.UU.? (por poner un caso). Esto es, ¿por qué algunos países en los que la mayoría de la población no tiene acceso a Internet o a un PC en su hogar, no tuvieron diferencias significativas con respecto a países en los que la brecha tecnológica no está acentuada o en los que la mayor parte de la población tiene facilidades de acceso a Internet y a las TIC en general? Podemos plantearnos preguntas similares con respecto a la incidencia de los niveles de desarrollo tecnológico e industrial y al ingreso *per cápita*.

Los resultados del TIMSS sorprendieron a la comunidad internacional de investigadores, así como a los diseñadores de políticas educativas de cada uno de los países participantes, e incluso, de los no participantes. Al parecer, el acceso a las TIC y a Internet por sí solo no es un factor importante para el desarrollo de competencias en matemáticas (y en

---

* Estas comparaciones arrojaron luz sobre gran cantidad de problemas en las políticas educativas, desde el acceso a la educación y la igualdad de los recursos, hasta la calidad educativa. Proporcionan directrices políticas con puntos de referencia para evaluar la actuación de los sistemas de educación y, para identifi car potenciales estrategias para mejorar el rendimiento escolar y la calidad de la educación.

ciencias) de los estudiantes del Liceo (o Escuela Secundaria). Si éste fuese el caso, ¿qué papel desempeña el uso que de Internet se haga en el aprendizaje de los estudiantes, así como en la enseñanza?, ¿de qué manera afectan estos resultados a la tesis de que la *sociedad de la información y del conocimiento* es más igualitaria y democrática que las sociedades anteriores?, ¿estamos en realidad inmersos en tal tipo de sociedad?

La República Bolivariana de Venezuela no participó en el TIMSS. Sin embargo, los estudios del SINEA (Ministerio de Educación 1998a, 1998b, 1999) en el ámbito nacional revelan también (aunque no es un estudio comparativo como el TIMSS) importantes deficiencias en el desarrollo de competencias en matemáticas al término de los grados 3º, 6º y 9º.

Naturalmente, también podrían compararse el tipo de problemas matemáticos propuestos a los estudiantes de 8º grado en el TIMSS, con los que comúnmente se propone en ese grado en los países participantes, el enfoque y naturaleza de los libros de texto de matemáticas que utilizan los educandos, las ideas matemáticas involucradas en las actividades, los procesos cognitivos potencialmente asociados y el o los modelos de evaluación que se implementan en la práctica, entre otros aspectos importantes.

| **Matemática** | | | **Ciencia** | |
|---|---|---|---|---|
| **País** | **Promedio** | | **País** | **Promedio** |
| Singapur | 604 | | China-Tapei | 569 |
| República de Corea | 587 | | Singapur | 568 |
| Taiwan | 585 | | Hungría | 552 |
| Hon Kong (RAE) | 582 | | Japón | 550 |
| Japón | 579 | | República de Corea | 549 |
| Bélgica-Flemish | 558 | | Holanda | 545 |
| Holanda | 540 | | Australia | 540 |
| República de Eslovaquia | 534 | | República Checa | 539 |
| Hungría | 532 | | Inglaterra | 538 |
| Cabada | 531 | | Finlandia | 535 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Skivebua | 530 | | República de Eslovaquia | 535 |
| Federación Rusa | 526 | | Bélgica-Flemish | 535 |
| Australia | 525 | | Eslovenia | 533 |
| Finlandia | 520 | | Canadá | 533 |
| República Checa | 520 | | Hon Kong (RAE) | 530 |
| Malasia | 519 | | Federación Rusa | 529 |
| Bulgaria | 511 | | Bulgaria | 518 |
| Larvia-Lss | 505 | | Estados Unidos | 515 |
| Estados Unidos | 502 | | Nueva Zelanda | 510 |
| Inglaterra | 496 | | Larvia-Lss | 503 |
| Nueva Zelanda | 491 | | Italia | 493 |
| Lituania | 482 | | Malasia | 492 |
| Italia | 479 | | Lituania | 488 |
| Chipre | 476 | | Tailandia | 482 |
| Rumania | 472 | | Rumania | 472 |
| Moldavia | 469 | | Israel | 468 |
| Tailandia | 467 | | Chipre | 460 |
| Israel | 466 | | Moldavia | 459 |
| Tunisia | 448 | | República de Macedonia | 458 |
| República de Macedonia | 447 | | Jordania | 450 |
| Turquía | 429 | | República Islámica de Irán | 448 |
| Jordania | 428 | | Indonesia | 435 |
| República Islámica de Irán | 422 | | Turquía | 433 |
| Indonesia | 403 | | Tunisia | 430 |
| Chile | 392 | | Chile | 420 |
| Filipinas | 345 | | Filipinas | 345 |
| Marruecos | 337 | | Marruecos | 323 |
| Suráfrica | 275 | | Suráfrica | 243 |

El promedio es significativamente más alto que el promedio de Estados Unidos
El promedio de Estados Unidos no difiere significativamente
El promedio es significativamente más bajo que el promedio de Estados Unidos

*Cuadro 1*
*Logros académicos de los estudiantes de 8º grado*
*en Matemática y Ciencias - 1999*
*Fuente: TIMSS*

En cierta forma, los resultados del TIMSS abren un espacio de reflexión acerca del currículo en matemáticas (y ciencias) en gran parte del mundo (Mora, 1999). Así, estadísticas como el número de computadoras, de usuarios de Internet, de líneas telefónicas, de disponibilidad y uso de la banda ancha, por cada cien habitantes, deben ser vistos desde una óptica distinta a raíz de los resultados del TIMSS.

Otro de los aspectos importantes a considerar en estos reportes, es precisamente cuáles son las organizaciones que apoyan e impulsan este tipo de estudios en el ámbito internacional, así como sus intereses. De hecho, casi un centenar de empresas multinacionales figuran como socias del FEM. La globalización y la conformación de mecanismos de hiper-control económico y cultural, constituyen dos de los aspectos asociados a estos estudios internacionales. No debemos olvidar que la visión de las empresas capitalistas es justamente la acumulación de capital y, la cosificación del hombre y la mujer como simples elementos participantes en el proceso de producción-consumo. Estas consideraciones no pueden quedar fuera de la discusión curricular en nuestros países. Por otra parte, los resultados del TIMSS, así como de otros estudios internacionales de esta naturaleza, apuntan hacia el establecimiento de estándares curriculares en matemáticas y ciencias en el mundo; esto es, la idea de globalizar el currículo, los objetivos educativos en estos campos y el concepto de educación en sí mismo. Este es quizás el motivo central por el que los resultados del TIMSS generaron un intenso debate, fundamentalmente en el seno de las universidades (no así en las escuelas y liceos).

Entre las tesis subyacentes en algunos de estos estudios de evaluación de competencias, podemos encontrar las siguientes:

1. *Una visión eurocéntrica de las Matemáticas.*
   *El desconocimiento o invisibilización de las matemáticas que son propias a las culturas originarias de América y África, e incluso de Asia y Oceanía.*

2. La tesis de *globalización de los estándares curriculares*.

3. La idea de que el *saber matemático es un saber sabio*.

4. *Las competencias matemáticas se entienden desde lo intramatemático*. Las competencias que expone la IEA (en el TIMSS) en cada uno de los niveles matemáticos, se

apoyan en una visión *encerrada* en la propia matemática. Con ello se desconoce el aporte de la educación matemática en su evolución como disciplina científica y, particularmente, el desarrollo de su perspectiva crítica. Se desconoce también el importante papel que la matemática puede desempeñar en nuestras sociedades, en la formación del ser crítico.

5. *El concepto de educación matemática como proceso de transmisión del saber matemático (del saber sabio).*

6. El acceso a Internet es una herramienta que potencia el aprendizaje matemático.

En Latinoamérica, esto se puede comprobar revisando el apoyo del Banco Mundial, Banco Interamericano de Desarrollo y UNESCO a las reformas curriculares en Educación Básica, el papel de los libros de texto en el currículo que se concreta o no en la práctica, y también las intenciones socio-político¬económicas explícitas y no explícitas en informes como el de Delors, Almufte y otros (1996) o el informe final del proyecto Tuning América Latina 2004¬2007 (Beneitone y otros, 2007). Por ejemplo, la idea de *aprender a conocer* (Delors, Almufte y otros, 1996) está basada en el concepto de *Sociedad del Conocimiento y de la Información* que defienden los teóricos de la educación -postmodernos y conservadores-; el conocer, además, es desnaturalizado al estar separado de la realidad.


*Gráfico 1. ¿Una sociedad de la información?*
*Fuente: http://jumber.fi les.wordpress.com/2007/02/20070201071031-socierdad-informacion.jpg*

## LAS CALCULADORAS Y EL INTERNET: SOBRE EL TEMOR, LA FALTA DE TIEMPO Y DE CAPACITACIÓN, ASÍ COMO ALGUNAS DE SUS POTENCIALIDADES

Las calculadoras son, precisamente, una de las TIC más representativas por su bajo costo, su popularidad en los diversos aspectos de la vida cotidiana y su temprana presencia en el currículo de muchos países -mucho antes del vertiginoso impulso al uso del Internet en los espacios educativos, desde las políticas y documentos curriculares-. Sin embargo, es justo mencionar que su incorporación al currículo en muchos países pasó y pasa por grandes resistencias, aún cuando ya a principios de los 80 los educadores matemáticos recomendaron su incorporación desde la escuela. Estas resistencias frecuentemente son asociadas a creencias o concepciones sobre el temor, la tesis de la falta de tiempo en clase y la falta de capacitación al respecto. Estos y otros temores y creencias no deben ser ignorados, pero de ningún modo pueden sostener la falta de uso de calculadoras en la escuela, liceo e incluso universidad.

El uso de la calculadora, en el contexto de las aulas de matemáticas (así como en otros cursos de la escuela, el liceo y la universidad), en ocasiones incluso llegó a estar prohibido por algunos profesores. Parte de las concepciones de la comunidad de profesores de matemáticas, inducía a la penalización del uso de calculadoras en el aula. Para ellos, la calculadora era el medio infalible por el que los estudiantes hallaban la respuesta a su pregunta, sin aplicar en ese hallazgo ningún conocimiento propio. Naturalmente, esto tiene que ver con la manera en que se entiende la matemática, la actividad matemática que debe y puede desarrollar el estudiante, el conocimiento matemático en sí mismo y la enseñanza; o sea, tiene que ver con las concepciones construidas desde las posiciones teórico-metodológicas asumidas y, la actividad práctica en el contexto del aula, así como con los conceptos que se tenga de las matemáticas y de la educación matemática.

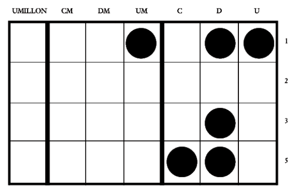
Si la actividad matemática del estudiante está siempre restringida a operatorias que pueden ser ejecutadas inmediatamente usando una calculadora, entonces es en un marco como éste que puede comprenderse la penalización del uso de la calculadora. En cambio, cierto tipo de prácticas docentes, apoyadas en visiones distintas de las matemáticas, pueden aprovechar el uso de la calculadora como una herramienta importante para: a) facilitar la operatoria, b) detectar regularidades, c) construir conjeturas, d) buscar contraejemplos, e) comprender algunos conceptos, f) identificar casos particulares en determinadas proposiciones generales, g) visualizar el gráfico de alguna relación, h) ensayar estrategias de resolución de problemas, i) contribuir en la evaluación de ciertos modelos matemáticos construidos por los estudiantes en sus proyectos. Este es el caso de la *Resolución de Problemas, la Etnomatemática, la Educación Matemática Crítica* y *la Matemática Educativa*, entre otras.

De hecho, en cualquiera de los desarrollos que se han configurado desde el pasado siglo para la educación matemática, se puede plantear actividades de aula en las que la calculadora sea un recurso muy bien aprovechado. Además, hoy en día calculadoras muy potentes se encuentran disponibles (gratuitamente) en Internet -lo cual hace que no siempre sea necesario adquirir la propia calculadora-. Éstas permiten realizar operatorias en muchas de las áreas que comprende la formación profesional y escolar en matemáticas.

Ciertamente, la penalización al uso de calculadoras obedece a algunas tradiciones sobre la didáctica y la educación matemática que han calado profundamente en el currículo de matemáticas en el ámbito internacional, en las que se asocia, por ejemplo, a las matemáticas con el simple cálculo operatorio, con lo exclusivamente algorítmico, amputándose así casi la totalidad de las matemáticas escolares y universitarias (salvo al menos, naturalmente, la formación profesional en matemáticas y en educación matemática, y las experiencias didácticas que siguen otros enfoques).

El Internet puede acercarnos al conocimiento y/o estudio de tecnologías de cálculo aritmético, geométrico y astronómico que desarrollaron las culturas originarias de nuestro continente. Cabe encionar, por ejemplo, el Quipu (sistema nemotécnico incaico para llevar la contabilidad) y la Yupana (o ábaco inca), o bien los diversos sistemas de numeración propios de nuestras culturas aborígenes, sus unidades de medida y capacidad, entre otras; y no sólo los aportes de Europa a partir de la Edad Media.

Yupana




51 en Yupana

Quipu

*Gráfico 2*
*Algunas tecnologías de cálculo aritmético de nuestras culturas originarias*
*Fuente: Elaboración propia*

*Gráfico 3. Wekui (contador a base de nudos). Etnia Pemón, República Bolivariana de Venezuela*
*Fuente: Sánchez (2009)*

## LA TESIS DEL INTERNET COMO FUENTE (Y FIN) DEL CONOCIMIENTO

Uno de los aspectos considerados relevantes en la sociedad moderna desde el currículo y las políticas educativas, tal como hemos mostrado, es el acceso a Internet por parte de los estudiantes. No obstante, este fenómeno también ha conllevado a que el conocimiento matemático pueda ser entendido por algunos estudiantes como un *objeto*, una *cosa acabada* que está disponible en línea y que su relación con el estudiante consiste en su búsqueda, almacenamiento y reporte. De esta manera, el conocimiento es despojado de su naturaleza, de su relación con el sujeto y la realidad: es sólo información y lo importante es su manejo y el hecho de poder acceder a ella desde cualquier punto geográfico. Ello se puede asociar con la *educación bancaria* que describió Freire (1970). Si el conocimiento o saber es algo ya *acabado* (disponible), entonces el profesor juega un papel similar al de Internet en el almacenamiento, la provisión o transmisión de éste al estudiante o navegante de la www. El discurso del profesor, como medio de transmisión del saber, puede compararse con el texto, gráficos y video (entre otros medios) que se despliegan en el PC u otros equipos desde Internet.

Entonces, ciertos usos de Internet han derivado en asociar al conocimiento con ese producto *de otros*, con un *lugar* (o enlace) en la www. Es éste el conocimiento despersonalizado, ha perdido sus vínculos con la actividad del sujeto en el medio que le rodea. Así, el Internet es el medio que soporta al conocimiento e, incluso, su fuente. Esta es una conclusión a la que pueden llegar los estudiantes en cualquiera de los niveles y modalidades de la educación.

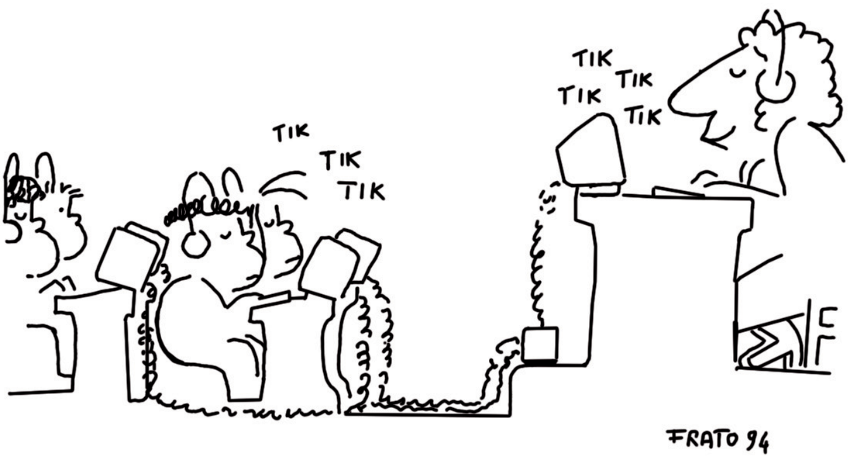



*Gráfico 4*
*El modelo de la educación bancaria con apoyo en la tecnología*
*Fuente: http://www.ecourban.org/blog/wp-content/uploads/2008/02/cuad-de-pedag-230-1994-711.jpg*

Ciertamente, esta posición sobre el saber o el conocimiento aún encuentra espacios importantes; algunas de las tesis que la soportan son justamente el cientifismo que describió Habermas, el saber como una posesión de algunas clases sociales, la idea de la escuela o institución escolar como escenario de reproducción de lo establecido que describió Freire, y la superficialidad, acriticismo y fragmentación que envuelven al sujeto postmoderno.

El conocimiento está pues dividido en múltiples partes. El grado de especialización y desarrollo de las disciplinas (científicas o no) del saber se ha traducido, en educación, como la compartimentación en estancos separados de las áreas en las que está organizado el currículo. El currículo sumativo es, justamente, la forma más simple, lógica y óptima administrativamente, de realizar cambios en los programas y planes de formación en el ámbito universitario; y el esquema establecido de construcción del currículo en la escuela y el liceo, desde mediados del siglo XX, alrededor del mundo. Un ejemplo de esto es, precisamente, la incorporación al plan de estudios de cursos que se correspondían más bien con ejes transversales, tal es el caso de los cursos de entrenamiento en el uso del PC, de Internet o de ciertos paquetes de cómputo (o bien, de ética y valores, entre otros).

El internet es el espacio en el que es divulgada buena parte del conocimiento producido en el seno de las universidades. Las revistas, periódicos y boletines de ámbito universitario han sido alentados de manera intensiva, desde principios del siglo XXI, a publicarse en-línea; muchas plataformas, redes y bases de datos han sido creadas a tal efecto. En Venezuela, por ejemplo, el Ministerio del Poder Popular para la Ciencia y la Tecnología, a través del Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), ha apoyado la producción de conocimiento científico y tecnológico, durante los últimos seis años, a través del aporte de más de 200 millardos de Bolívares (lo cual incluye, por ejemplo, fondos para la programación, edición y hospedaje en-línea de las revistas establecidas).

La universidad es la institución educativa que más se ha acercado al uso de Internet como medio de divulgación del conocimiento y promoción de la investigación (local, nacional e internacionalmente); no así la escuela y el liceo. De hecho, uno de los factores que hemos citado antes, los problemas de acceso a Internet, junto con la visión generalizada del profesor de las primeras etapas de educación como *un dador de clase*, redundan en esta situación.

La tesis del acceso a la información y al conocimiento ha derivado en la idea de *medir* la productividad de las y los profesores universitarios en investigación: la cantidad de artículos o ensayos publicados en revistas especializadas y/o disponibles en ciertas redes o bases de datos internacionales, así como su proporción en el tiempo. Esto es, el Internet pasa a ser fuente y fin de la investigación, parte de la vida académica del profesor es medida dentro de estos parámetros y concepción de productividad. Es el *publica o muere*, acuñado en Europa, es la sobrevaloración del artículo por encima del libro. De hecho, no es difícil encontrar en nuestras universidades docentes con un gran número de artículos publicados, pero ningún libro. Parte de la cultura de investigación en nuestras universidades ha fortalecido estructuras en las que esto es posible. Un análisis similar puede hacerse en el caso de los reportes orales de investigación (ponencias, etc.).

Es en este marco que el Internet como el *fin* del conocimiento (como la simple divulgación), encuentra sentido. El conocimiento es así, bajo esta lógica, una mercancía más, pierde su unidad total y su naturaleza, es ahora una serie de bits en nuestra computadora o terminal conectado a la www, es ya algo material y ha perdido su conexión con el sujeto. Este planteamiento no es una defensa de un mundo tecnológico, sino más bien la descripción de una de las paradojas en que han derivado ciertos usos del Internet en el contexto curricular (invisible a las miradas técnicas).

## LA INMEDIATEZ

Ciertos estudios de mercadeo, posteriores al desarrollo de la telemática y la informática, orientados a aumentar los márgenes de ganancia de las corporaciones y empresas que emplean el Internet como medio de promoción de sus productos y/o servicios, han mostrado la importancia que tiene la psicología del color en el diseño de la interfaz de los sitios web, la manera de escribir en ambientes virtuales y las velocidades de carga de las páginas que contribuyan a aumentar los tiempos de visualización por parte del usuario de Internet. La información o idea central está expuesta de manera que el usuario la obtenga lo más rápido posible (la técnica de la *pirámide invertida*). Incluso, se ha estudiado el número de clics que un usuario efectúa en una página durante su visita a ella. El usuario ha sido entrenado para esto. Esta lógica también ha signado algunos de los usos educativos de Internet. El estudiante ha asociado el acceso al conocimiento con la inmediatez, considera que puede acceder a éste tras unos pocos clics. Recordemos que fue después de la masificación del uso del teléfono que se originó la concepción de la necesidad de obtener respuestas inmediatas a las diversas situaciones o acontecimientos de la cotidianidad.

**Situación 1**

**Minuto cero**: A envía un mensaje de correo electrónico a B con un avance de solución de un problema.

**Minuto uno**: A escribe un mensaje de texto (vía teléfono celular) a B notificando el correo electrónico enviado antes.

**Minuto tres**: A envía otro mensaje de texto ansioso por una respuesta.

**Minuto quince**: si B no responde el correo electrónico o los mensajes de texto, A llama por teléfono a B.

**Situación 2**

**Minuto cero**: a está conectado a la página web que el profesor le indicó, e intenta responder algunas preguntas sobre álgebra. A no puede responder a esas preguntas de forma rápida.

**Minuto 5**: a intenta buscar respuestas en otras páginas.

**Minuto 15**: si A aún no ha encontrado respuestas a las preguntas, desiste de su búsqueda y contacta a algún compañero para saber si este las encontró.

Estas situaciones hipotéticas ejemplifican la idea que expusimos antes. La inmediatez ha sido adicionada como una propiedad más del conocimiento en sí; he allí uno de los nuevos problemas a que ha sido enfrentado el sujeto tecnológico propio del postmodernismo. Este sujeto vincula el saber con algo inmediato; así, paradójicamente, pueden marcarse mayores distancias con la producción de conocimiento.

Sin embargo, generalmente, esta situación no se presenta en las ciudades y regiones donde no hay acceso a redes de telefonía fija o móvil. En ellas, la vorágine postmoderna no ha incidido en las percepciones del conocimiento y de las relaciones de éste con el sujeto, la inmediatez no es una característica forzada del conocimiento. Allí, el conocimiento en general, y las matemáticas en particular, son inherentes al contexto social e histórico de cada una de las culturas.

Estos son problemas medulares de cualquier discusión curricular sobre el uso educativo de Internet en la educación matemática.

## LA DESACTUALIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Otro de los fenómenos presentes en el modelo de sociedad basada en las TIC, es la creencia de la desactualización de la información obtenida a través de diversos medios. La tesis de la desactualización es concebida como la pérdida de valor de la información y del conocimiento.

Ello responde a ciertas estructuras y mecanismos que exaltan *lo nuevo* por encima de *lo viejo*. Así, en las universidades es común encontrar profesores que recomiendan buscar referencias no anteriores a los años noventa; algunos libros de cálculo, por ejemplo, son editados año tras año, otros tantos de matemáticas para el liceo venezolano omitían imprimir el año de edición y publicación con la intención de *no perder vigencia*, los programas de cálculo y geometría tienen versiones inacabadas, etc.

El bombardeo de información es el signo de Internet. La desactualización responde a la dinámica acelerada y cambiante de las grandes ciudades y a los fuertes intereses económicos de ciertas estructuras. No obstante, debemos aclarar aquí que esta creencia no es compartida por todas y todos.

## A MANERA DE CONCLUSIÓN

Ciertamente, las ideas de la inmediatez, desactualización y fragmentación del conocimiento (matemático y no matemático), del saber como algo producido por otros disponible en algún site, y las ya expuestas dificultades de acceso, son algunos de los problemas que presenta el uso de Internet para el diseño y desarrollo curricular de las matemáticas escolares, en especial para los pueblos, regiones y naciones que se ven afectadas por procesos de dominación cultural y económica y que poseen una rica fuente de saber matemático. Este debate alcanza la reflexión sobre los modelos de sujeto y sociedad que nos envuelven.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

**Beneitone, P. y otros**. 2007. *Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina*. España: universidad de Deusto-Universidad de Groningen.

**Delors, J. y otros**. 1996. *Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI*. Ediciones UNESCO.

**Freire, P**. 1970. *Pedagogía del oprimido*. México: Siglo XXI.

**Mora, D**. 1999. Presentación y reflexiones en torno al Tercer Estudio Internacional sobre Matemáticas y Ciencias (TIMSS). Parte II. *Enseñanza de la Matemática*, 8 (2).

**Mora, D**. 2003. Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*. Vol. 24 (70).

**Sánchez, D**. 2009. El sistema de numeración y algunas de sus aplicaciones entre los aborígenes de Venezuela. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 2 (1). Disponible en: http://www.etnomatematica.org/v2-n1-febrero2009/ sanchez.pdf

**Serrano, R**. 2009. *Una experiencia en la web basada en el Gurrumango. Aspectos a considerar en el diseño de materiales multimedia*. Trabajo de ascenso no publicado. Caracas: universidad Pedagógica Experimental Libertador.

**Serrano, W**. 2005. La alfabetización matemática. En: Mora, D. (ed.) y otros. *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

# DE LO REAL A LO FORMAL EN MATEMÁTICA

*Darwin Jesús Silva Alayón*
*Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico de Caracas República Bolivariana de Venezuela*

## INTRODUCCIÓN

Es impostergable el desarrollo de una educación matemática vinculada a las realidades de nuestra patria latinoamericana. Para ello, se hace necesario superar la enseñanza basada exclusivamente en pasos y algoritmos completamente descontextualizados y, avanzar hacia la producción de ideas matemáticas basadas en el estudio de fenómenos naturales o sociales, donde la capacidad de abstracción es necesaria pero sin perder jamás de vista la tierra firme.

La matemática, con sus conceptos, procedimientos, técnicas y representaciones, aporta elementos para la comprensión y la transformación de la realidad, mientras que esta misma realidad, a su vez, ofrece fenómenos naturales y sociales que permiten la producción de ideas matemáticas.

El proceso de enseñar y aprender matemática debe fundarse en metodologías formativas con base en la realidad experimental de la vida escolar y comunitaria, donde se promueva el trabajo cooperativo y en equipo, se favorezca el desarrollo de capacidades para la resolución de problemas, se impulse la concepción interdisciplinar de las ciencias, se vincule el aprendizaje con los medios de producción material y se potencie la integración afectiva y social de los responsables.

Apoyados en lo anterior y convencidos como estamos de que la educación venezolana debe ser transformada, presentamos nuestro trabajo, el cual esperamos sea de utilidad para nuestras y nuestros compañeros docentes de matemática interesados en comprender y cambiar el estado actual de la educación matemática en nuestros países latinoamericanos.

## EDUCACIÓN, MATEMÁTICA Y SOCIEDAD

*¿Por qué?* y *para qué* debe educarse a los habitantes de una nación?, ¿será acaso para domesticarlos y hacerlos cumplir, de manera irreflexiva, cada una de las ordenes de la clase dominante?, ¿tiene sentido un proceso educativo apartado de la vida, centrado en la palabra sin sentido y preocupado, casi exclusivamente, por los procesos económicos?, ¿podemos construir una patria verdaderamente democrática con una

educación no acostumbrada al diálogo, apartada de la investigación y sin amor por el estudio?

Las preguntas anteriores no son de sencillo abordaje, ante todo porque las respuestas que se puede ofrecer son muchas. Por lo tanto, en las líneas siguientes presentaremos lo mencionado en distintas fuentes sobre los puntos centrales de las interrogantes anteriores.

En el artículo 15, numeral dos de la Ley Orgánica de Educación (2009) venezolana, se establece como uno de los fines de la educación el siguiente:

> Desarrollar una nueva cultura política fundamentada en la participación protagónica y el fortalecimiento del Poder Popular, en la democratización del saber y en la promoción de la escuela como espacio de formación de ciudadanía y de participación comunitaria, para la reconstrucción del espíritu público en los nuevos republicanos y en las nuevas republicanas con profunda conciencia del deber social.

A partir de lo anterior, podemos decir que la educación debe permitir que el hombre y la mujer participen en los procesos de transformación social; dichas transformaciones deben siempre responder a los intereses de las mayorías y nunca a los de las clases económicamente dominantes e históricamente opresoras, pero sin dejar de reconocer los derechos que los miembros de estas ostentan como seres humanos. Para ello, es necesario avanzar hacia la formación de un ser crítico y apto para convivir en una sociedad democrática; para Skovsmose (1999: 16) *ser crítico significa prestarle atención a una situación crítica, identificarla, tratar de captarla, comprenderla y reaccionar frente a ella*. Ser crítico se refiere en parte a ser analítico ante cualquier situación, pero además, la idea de crítica está enmarcada en la necesidad de producir cambios y esclarecer las contradicciones presentes en nuestras sociedades. Skovsmose (1999: 11) afirma que *mientras crítica y educación se mantengan separadas, la segunda fácilmente puede tomar la forma de una entrega de información, o la función de socializar a la juventud dentro de la cultura existente*.

La educación debe ser el proceso mediante el cual el individuo aprenda y comprenda los valores y tradiciones de su cultura, para comprender su sociedad y ser capaz de transformarla. De acuerdo con Barreiro (1975, citado en Freire, 1975: 14), *La alfabetización, y por ende toda la tarea de educar, sólo será auténticamente humanista en la medida en que procure la integración del individuo a su realidad nacional, en la medida en que le pierda miedo a la libertad, en la medida en que pueda crear en el educando un proceso de recreación, de búsqueda, de independencia y, a la vez, de solidaridad.*

La educación debe contribuir a alcanzar una sociedad más democrática y participativa, donde cada persona encuentre las condiciones y oportunidades para su liberación. La escuela tiene que enseñar a los estudiantes a practicar, apreciar y defender valores básicos como el amor patrio, la equidad, la democracia, la fraternidad y la tolerancia.

Según Freire (1975: 92),

*La democracia y la educación democrática se fundan en la creencia del hombre, en la creencia de que ellas no sólo pueden sino que deben discutir sus problemas, el problema de su país, de su continente, del mundo, los problemas de su trabajo, los problemas de la propia democracia.*

La escuela no puede continuar *maravillada por la sonoridad de la palabra, por la memorización de los fragmentos, por la desvinculación de la realidad, por la tendencia a reducir los medios de aprendizaje a formas meramente nacionales* (: 57), lo cual sin duda no es más que una posición ingenua de nuestras sociedades latinoamericanas.

El ciudadano común debe ser capaz de comprender, analizar, utilizar y transformar el orden económico, cultural, social, político, ambiental, científico y tecnológico imperante en su sociedad. Pero esto es imposible si la ciencia en general y la matemática en particular, son vistas solamente como un conjunto de ejecuciones aisladas, donde en muchos casos no se ofrece ninguna imagen, ni siquiera parcial o limitada, del mundo.

Es necesario que nuestros estudiantes al, estudiar matemáticas, sientan que están estudiando un mundo real, donde los fenómenos sociales, políticos, económicos y culturales son considerados al momento de indagar, experimentar, errar, discutir, maravillar, dudar, crear, aplicar, generalizar, abstraer y formalizar.

Es importante que las y los estudiantes y también las y los profesores reconozcan que el conocimiento matemático se puede producir a partir de actos creativos e imaginativos, vinculados con métodos de búsqueda científica. Según De Guzmán (1993: 6), *la matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido*; esta afirmación permite vincular la enseñanza de la matemática a la resolución de problemas, los cuales deben tener como contexto el mundo político, económico y social en el cual están inmersos los y las estudiantes.

El proceso de aprender y enseñar matemáticas debe estar vinculado a la vida cotidiana de los actores del proceso, lo que significa que la matemática debe estar al servicio del entorno cultural, social, político, económico y natural.

> *...los problemas del mundo real serán usados para desarrollar conceptos matemáticos..., luego habrá ocasión de abstraer, a diferentes niveles, de formalizar y generalizar... y volver a aplicar lo aprendido..., y reinventar la matemática (De Lange, 1986, citado en Alsina s/f: 8).*

Una educación matemática vinculada a la realidad, es sin duda una tarea interesante y compleja. El método de proyectos y la modelación son dos importantes concepciones didácticas que hacen viable el binomio matemática-realidad.

## EL MÉTODO DE PROYECTOS

El método de proyectos tiene sus inicios a mediados del siglo XVII, cuando se funda en París la Academia Real. En dicha institución los estudiantes, para poder culminar los estudios de arquitectura, debían presentar un trabajo práctico vinculado a un problema de diseño para una construcción (Knoll, 1997).

En Venezuela, las primeras referencias vinculadas al método de proyectos las podemos encontrar dentro del marco de la Escuela Nueva. Para el año 1933, la Educación Primaria contaba con nuevos programas, y en ellos podemos encontrar algunas pequeñas referencias a principios y métodos de la escuela activa. El método de proyectos es incorporado en los programas de urbanidad e higiene a partir del 3er grado.

El año 1997, con la reformas de las primeras dos etapas de Educación Básica, el método de proyectos es introducido como estrategia de planificación central del currículo. De esta manera surgen el Proyecto Pedagógico de Plantel (PPP) y el Proyecto Pedagógico de Aula (PPA).

La experiencia más reciente con el método de proyectos, en nuestro país, está la relacionada con el Proyecto Educativo Integral Comunitario (PEIC), el Proyecto de Aprendizaje (PA) y el Proyecto de Desarrollo Endógeno, propuestos por el Sistema Educativo Bolivariano como una manera de organizar la gestión escolar a partir de la investigación de situaciones reales de la vida diaria y la participación integrada de todos los actores del proceso educativo (Ministerio del Poder Popular Para la Educación, 2007: 66).

El Sistema Educativo Bolivariano propone los proyectos como una forma de organización de los aprendizajes, pero, ¿en qué consiste el método de trabajo por proyectos?

Según Mora (2004: 114), *podemos definir el método de proyectos como una búsqueda organizada de respuestas, por parte del trabajo cooperativo entre estudiantes, docentes, padres, a un conjunto de interrogantes en torno a un problema o tema relevante desde el punto de vista social, individual y colectivo*. Los proyectos educativos representan una forma de organización escolar que propone estudiar la realidad para intervenir en ella.

En el mismo orden de ideas, Aravena y Jiménez (2002) mencionan, con respecto a los proyectos, que:

- Contribuyen al desarrollo de la autonomía. Este es un concepto clave en la forma de aprendizaje que se basa en la reflexión sobre la propia experiencia.

- Ayudan al desarrollo de la motivación. La relación entre motivación y aprendizaje desempeña un papel crucial en el trabajo por proyectos.
- Estimulan el uso de capacidades cognitivas y metacognitivas en las y los estudiantes.
- Favorecen, en la formación del estudiante, la capacidad para enfrentarse con flexibilidad y confianza a problemas nuevos y complejos, en un mundo que está en cambio permanente.
- Reflejan una integración de los contenidos aprendidos y permiten reconocer y mejorar concepciones del estudiante sobre el propio papel del contenido matemático como ayuda a la modelación, promoviendo un proceso de regulación importante.

Según Schulz (1973 y 1980, citado en Mora, 2004: 31), una unidad basada en proyectos debe estar constituida por las siguientes características:

1. Un proyecto de enseñanza debe partir de las necesidades de las y los estudiantes.
2. Dominio de situaciones concretas de la vida, las cuales no solamente están inmersas en el mundo cerrado de la escuela, sino aquellas que sean relevantes precisamente en la realidad cotidiana.
3. Orientado hacia la producción no solamente del conocimiento intelectual, sino además la producción y uso de tecnología en la elaboración de cosas útiles para el mismo aprendizaje y para beneficio de los estudiantes.
4. Superación de la frontera entre el tratamiento de las especificidades inherentes a cada disciplina científica, lo cual significa enseñanza basada en la interdisciplinariedad.
5. La enseñanza orientada en proyectos debe ser socialmente relevante y significativa para todos los individuos.

6. Este tipo de enseñanza requiere del trabajo en grupos.

La educación guiada por la metodología de trabajo por proyectos pareciera ser sumamente ambiciosa por lo que, tal vez, se ha ganado muchas enemistades y ha suscitado una gran desconfianza entre quienes defienden el trabajo disciplinar y especializado de los conocimientos científicos. Se dice que los proyectos son poco sistemáticos, lo que, para algunos, no beneficia el aprendizaje de conocimientos vinculados con las ciencias naturales y las matemáticas. Otros aseguran que la educación por proyectos beneficia la formación integral y crítica de las personas. Nuestra intención es determinar el grado de veracidad de esas afirmaciones a través de la práctica social.

Con respecto a la elección de los temas y contenidos de un proyecto, Mora (2004: 41) nos dice que un proyecto, en sentido estricto, debe permitir que las y los estudiantes determinen los temas y contenidos. Nosotros consideramos dos variantes de esta propuesta inicial: la primera deja que las y los estudiantes y profesores fijen en conjunto los temas de trabajo; y la segunda permite que los estudiantes escojan los temas a partir de una presentación previa, que debe ser bastante variada, efectuada por los profesores. Es importante señalar que Mora no considera como un proyecto aquel en que el docente impone el tema sin tomar en cuenta la opinión de los estudiantes.

Por su parte, Skovsmose (1999) no considera este último punto como una condición indispensable del método de proyectos. Las condiciones establecidas por este autor son las siguientes: a) el tema tiene que ser bastante conocido para los educandos, la situación escogida debe poderse formular y discutir en el lenguaje natural; b) los educandos deben poder desarrollar el tema aún si sus habilidades fuesen bastante diferentes entre sí; c) el tema debe poseer un valor por sí mismo, no debe convertirse en una mera introducción a una parte de una nueva teoría matemática o de alguna otra área del conocimiento; d) el trabajo debe crear conceptos matemáticos, físicos, biológicos, sociales, culturales, etc., así como también debe procurar que el estudiante identifique dónde y cómo aplicar o usar ideas matemáticas, físicas, biológicas, etc.

Con respecto a cómo decidir cuáles serán los objetivos del trabajo, Mora (2004) plantea tres posibilidades: a) las y los estudiantes, de manera independiente, formulan problemas y objetivos; b) las y los estudiantes y las y los profesores deciden los objetivos conjuntamente; c) las y los estudiantes escogen algunos objetivos de entre los presentados por la o el profesor. Si bien es necesario establecer unos objetivos iniciales que guíen el desarrollo del proyecto, también es importante atender los problemas y objetivos no considerados en la planificación inicial. Estas nuevas situaciones pueden ser abordadas en el desarrollo del mismo proyecto, o pueden ser el punto de partida de uno nuevo.

Otro elemento importante que se debe considerar durante la realización de proyectos educativos, es la evaluación. Generalmente, evaluar es una actividad poco amigable, de hecho pareciera ser más interesante desarrollar un proyecto que evaluarlo, lo que en ocasiones no es nada sencillo. Pero, a pesar de todo esto, no es concebible un proyecto educativo sin una evaluación y esto se debe a que este proceso permite determinar: a) el grado de desarrollo del proyecto; b) si es necesaria una reorientación; c) cuáles son los procesos y productos logrados por los estudiantes; d) a qué necesidades y a qué contexto responde el proyecto; y e) cuál es el desenvolvimiento de los participantes.

Cuando se habla de evaluación de los aprendizajes, generalmente se hace referencia a dos modalidades: la formativa y la sumativa. Refiriéndose al tema de los proyectos, Abrantes, P., Bastos, R., Brunheira, L. y da Ponte, J. (1998: 24) afirman que:

> *... la evaluación formativa se realiza en cualquier punto del proceso y tiene por objetivo verificar como andan las cosas..., la evaluación sumativa corresponde al balance final que se hace sobre un proyecto, inventariando la calidad de sus productos y aprendizajes.*

No podemos evaluar un proyecto educativo mediante una prueba de tiempo fijo, es importante que el(los) encargado(s) del proceso evaluativo documente(n), empezando en el mismo momento en que se elige el problema, desde la revisión bibliográfica, el diseño de la investigación y la descripción del modelo, hasta la entrega del informe final.

La información que se debe registrar y cómo hacerlo, de seguro estará determinada en gran medida por las creencias del docente y las particularidades individuales y colectivas de los grupos de trabajo. Sin embargo, creemos importante que, durante la ejecución del proyecto, en lo que a matemática se refiere, se registren: *datos cognitivos (producción de conocimientos matemáticos), epistemológicos (connotaciones matemática-realidad) y heurísticos (estrategias utilizadas en la resolución del problema)* (Fortuny y Gómez, 2002).

Por otra parte, consideramos necesario registrar las características socio-afectivas (motivación, participación, capacidad comunicativa) de todo el estudiantado que toman parte en las diferentes etapas del proyecto.

La evaluación debe ser un proceso que permita mejorar profundamente la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como también una manera de registrar y analizar información relevante que permita conocer qué, cómo, cuándo y cuánto aprenden los educandos.

Ya para finalizar, un elemento que puede hacer viable la enseñanza de la matemática basada en el método de proyectos, es el de la modelación, cuyo punto de partida es el planteamiento de un problema que puede provenir de la matemática o del mundo real.

## MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una forma de esquematizar el proceso de modelación planteado por D' Ambrosio (1985), se puede evidenciar en el gráfico 1 que presentamos a continuación:

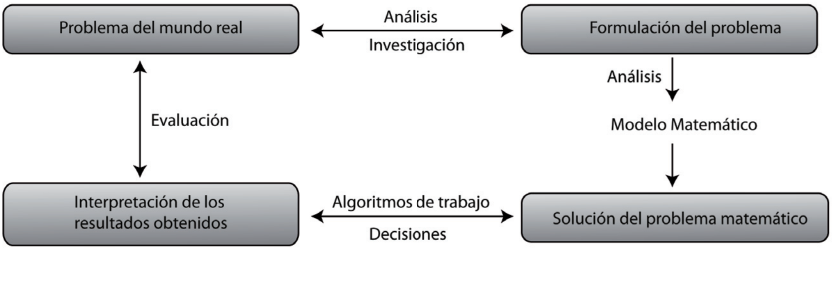



*Gráfico 1. Modelación matemática*
*Fuente: D'Ambrosio (1985).*

El esquema expuesto en este gráfico está diseñado de tal manera que se comience con un problema que provenga de la realidad. La experiencia educativa de una o un estudiante estará incompleta mientras no tenga ocasión de resolver problemas que estén vinculados con su localidad, región o país y que, además, sean de interés para la comunidad. En un primer momento, es normal que exista un enunciado vago de lo que se quiere, será a partir del análisis y de la investigación de los elementos vinculados con la situación real que se enunciará el problema con todo detalle. Las situaciones realistas deben contener informaciones ricas en contenidos para las y los estudiantes, incluir diversas interrogantes, incorporar diferentes áreas del conocimiento científico y permitir el tratamiento de amplios y variados contenidos matemáticos. Las situaciones problemáticas prácticas tomadas de la realidad siempre deben ser mostradas en forma de tareas verbales.

Las y los estudiantes deben construir el modelo matemático de la tarea expresada de forma verbal. No es lo mismo contar desde el principio con el modelo, que elaborarlo. La misión de construcción no es sencilla. En este momento, lo que se realiza es la sustitución de palabras por símbolos propios de la especificidad matemática (ecuaciones, inecuaciones, relaciones, funciones, etc.). Fortuny y Gómez (2002: 9) mencionan al respecto lo siguiente: *De esta forma se consigue una formulación matemática del problema y, de una manera natural, se establece el problema en términos matemáticos*.

Normalmente, las y los estudiantes tienen problemas para resolver modelos matemáticos (Fortuny y Gómez, 2002; Orellana, 2004). Es preciso resolver el modelo usando las herramientas adecuadas. Por ello, es importante auto-regular y controlar las decisiones globales referidas a la implementación de recursos y estrategias.

Resulta importante que el estudiante se dé cuenta de que, para llegar a resolver un problema usual de su ámbito social, necesita del aprendizaje de conceptos, términos, definiciones, procedimientos y algoritmos propios del saber matemático que proporcionen respuestas al modelo establecido. *De esta manera, el alumno alcanza un grado fuertemente elevado de interés por el aprendizaje de las matemáticas, ya que visualiza su utilidad* (Fortuny y Gómez, 2002: 9). Un estudiante motivado estará en condiciones de empezar a desarrollar su independencia cognitiva. Es importante acotar que, en este trabajo, el desarrollo de procesos mentales es entendido principal, aunque no exclusivamente, como un medio para la compresión y transformación de las estructuras sociales en crisis.

Por último, es necesario interpretar y reescribir los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto y, también, saber escoger, si hay diferentes soluciones, la más adecuada al problema real inicial.

## HABILIDADES MATEMÁTICAS

En los años 70 comenzó a surgir, entre los educadores matemáticos, una fuerte reacción contra la existencia de un currículo único y la forma impuesta de presentar la matemática en todos los países. La matemática moderna, con la sustitución de buena parte de la geometría por el álgebra, convirtió a la matemática escolar en puras generalidades sobre conjuntos y lógica, dejando de lado temas y problemas muy interesantes. Además, esta reforma no dejaba espacio a la valorización del conocimiento que la niña y el niño trae hacia la escuela.

Después del fracaso, desde el punto de vista de la enseñanza, de la matemática moderna, ha surgido en el mundo una gran discusión en torno a cuáles matemáticas se debe enseñar y de qué manera se debe enseñarlas.

Con respecto a este asunto, De Guzmán (1993: 5) afirma que:

> *La filosofía de la matemática actual ha dejado de preocuparse tan insistentemente como en la primera parte del siglo sobre los problemas de fundamentación de la matemática, para enfocar su atención en el carácter cuasi empírico de la actividad matemática (I. Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de la matemática en la cultura de la sociedad en la que se origina (R. L. Wilder).*

En su obra *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* (1978), Lakatos postula que la matemática deben ser desarrolladas siguiendo el patrón de las conjeturas, las pruebas y las refutaciones.

Según Gazcón (s/f), el punto de partida para este patrón debe ser un problema (no necesariamente matemático) en el que la atención se fija en los momentos más oscuros e informales de la teoría matemática en elaboración. Lo más importante, desde esta postura, son los procedimientos (no necesariamente algorítmicos): conjeturar, probar, contrastar, refutar, buscar contraejemplos, comparar con problemas similares, etc. Bajo este punto de vista, las matemáticas dejan de ser un conjunto de verdades eternas, infalibles, sagradas, dogmáticas y se convierten en una manifestación humana que se vale de los argumentos por analogía, del significado físico de algunos conceptos, del mundo real, de la intuición, la deducción, el análisis, la síntesis, la particularidad, la generalidad y la lógica para su conformación y evolución.

Es necesario motivar a los y las estudiantes para que reflexionen sobre sus pensamientos y actividades. Las situaciones problemáticas deben permitir que los educandos no se limiten a buscar la respuesta correcta, sino que traten de hallar las razones por las cuales un procedimiento, algoritmo o teorema es o no útil para la resolución del problema estudiado.

Tall (1991) caracteriza al pensamiento matemático a través de procesos como la clasificación, la representación, la deducción, la abstracción, la visualización, la generalización y la demostración. Este autor advierte que estos no son los únicos procesos presentes al momento de pensar matemáticamente. Cantoral (2000) se aproxima a la definición de pensamiento matemático, comparándolo con las formas en las que piensan los matemáticos profesionales.

Habilidades de pensamiento como particularizar, generalizar, conjeturar, argumentar, analizar, clasificar, sintetizar y explicar deben ser una referencia para cualquier programa que se interese por presentar a las matemáticas como una manera de conocer y rehacer el mundo real.

Una educación matemática preocupada por desarrollar en los estudiantes habilidades matemáticas que les permitan comprender y participar de manera activa en su entorno y entender la matemática como un sistema, debe considerar los elementos expuestos por Lakatos y Tall, pero además es necesario que se interese por estudiar los problemas de la matemática como disciplina científica, su desarrollo histórico, la veracidad de las proposiciones y por reflexionar entorno a preguntas como:

- ¿De qué manera la matemática contribuye a la comprensión de fenómenos sociales y naturales?, ¿qué tan próximos a la realidad son los resultados arrojados por un análisis matemático?, ¿se hubiese podido llegar a una conclusión similar sin matemáticas?, ¿el mundo exterior a las matemáticas aporta elementos para su desarrollo?, ¿se puede prescindir de las técnicas matemáticas a la hora de resolver un modelo matemático?, ¿la enseñanza de la matemática responde a intereses políticos y económicos?, ¿las matemáticas son una manera de legitimar la desigualdad educativa? Una enseñanza de la matemática y de las ciencias naturales vinculada con situaciones problemáticas reales y significativas para la sociedad y, por lo tanto, para las y los estudiantes, ¿puede contribuir a un cambio en las condiciones materiales de producción y al desarrollo de la conciencia de los ciudadanos venezolanos? Los y las estudiantes de nuestra educación media, ¿están preparados cognitiva, física y emocionalmente para el estudio del mundo real, que es su mundo?

Las preguntas anteriores son fáciles de formular, pero difíciles de responder científicamente y la única manera de contestar correctamente es participando en la práctica que modifica la realidad.

Si realmente existe un interés por alcanzar una enseñanza de la matemática vinculada a la comprensión y transformación de situaciones en crisis, es necesario aprovechar el marco conceptual de las matemáticas y el de las ciencias naturales para obtener una interpretación específica de un modelo de la realidad, para que, posteriormente, las mismas matemáticas, las ciencias naturales y la tecnología desarrollen e incorporen modelos que contribuyan a intervenir en la realidad.

## UNA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN CRÍTICA BASADA EN EL MÉTODO DE PROYECTOS

Toda investigación responde al enfoque, modelo conceptual o paradigma que se asuma, lo cual condicionará los procedimientos que se desarrollen en la misma. Cada enfoque tiene una conceptualización diferente de cómo, qué, para qué, dónde y por qué investigar. En nuestro caso, asumimos como enfoque de investigación el paradigma sociocrítico, que parte de supuestos emancipatorios y se vale de la investigación para comprender e intervenir en la realidad.

Para Carr y Kemmis (1988), bajo el marco de una Ciencia Social Crítica, la relación entre lo teórico y lo práctico no puede limitarse exclusivamente a prescribir una práctica en base a una teoría, ni a informar el juicio práctico. Para estos autores, la teoría debe ser el resultado de un proceso llevado a cabo por una persona o grupo con el fin de entender sus propias prácticas, así como las situaciones en que se realizan.

Con base en lo anterior, se hace indispensable una investigación educativa que se ocupe del mejoramiento de las prácticas, de la comprensión de las mismas y de las situaciones en que se llevan a cabo, para hallar la nueva educación a través de la crítica de la antigua.

Según Mckernan (2001: 47), *la investigación-acción crítica se ve como un proceso que da poder político a los participantes; la lucha es por formas más racionales, justas y democráticas de educación*. No es suficiente que unos pocos *expertos* se encarguen de investigar externamente la educación, con el fin de producir teorías educativas que luego serán puestas en práctica por las y los profesionales en ejercicio, lo cual crea una insalvable separación entre la teoría y la práctica; es necesario que el currículo se alimente de la investigación realizada por los docentes dentro de la escuela, se debe respetar el derecho que tienen las profesoras y los profesores de adquirir y producir conocimientos a partir de la reflexión sobre su práctica. Además, se debe reivindicar a la escuela como el centro de la investigación educativa.

En esta investigación, nos interesamos por reflexionar, analizar y describir los datos que emergiesen de la interacción entre los estudiantes, el profesor, las situaciones problemáticas y las matemáticas, con la intención de intervenir en la realidad del estudiante, del profesor y en el diseño curricular de las matemáticas escolares.

A través de este trabajo hemos aportado elementos que permitirán desarrollar unas matemáticas escolares que sean útiles para la comprensión y transformación de situaciones en crisis y, por ello, deseamos desarrollar en las y los estudiantes habilidades matemáticas tales como la reflexión, la argumentación, la visualización, la representación y la formalización, a partir del estudio de algún fenómeno proveniente del mundo real.

Los sujetos involucrados en esta investigación fueron:

- 25 estudiantes de tercer año de Educación Media, estudiantes de la Unidad Educativa Nacional General José Francisco Bermúdez, la cual está ubicada en la comunidad de El Rodeo, en el estado Miranda.

- El docente del curso, Magister en Educación Mención Enseñanza de la Matemática, con siete años de experiencia docente.

## PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación presentamos algunos de los análisis crítico-reflexivos elaborados a partir de los diarios, los talleres escritos, las pruebas escritas y los cuadernos de cinco estudiantes de tercer año de educación media que participaron en el desarrollo de los proyectos educativos, que tenían como tema generador *La valoración de las distintas fuentes de energía*. A partir de lo establecido por Becerra (2006) y Moya (2008), en nuestra investigación omitimos los nombres y el género de las y los estudiantes participantes, que serán identificados desde Estudiante 1 (E1) hasta Estudiante 5 (E5).

La información está organizada en categorías, que son una especie de etiquetas creadas para agrupar la información vinculada entre sí, respetando la naturaleza de la misma.

### Categoría 1: Concepto de función

Esta categoría se refiere a las formas en la que los estudiantes producen y se apropian del concepto de función. En el gráfico 2, se observa lo dicho por las y los estudiantes sobre este importante concepto de la matemática.

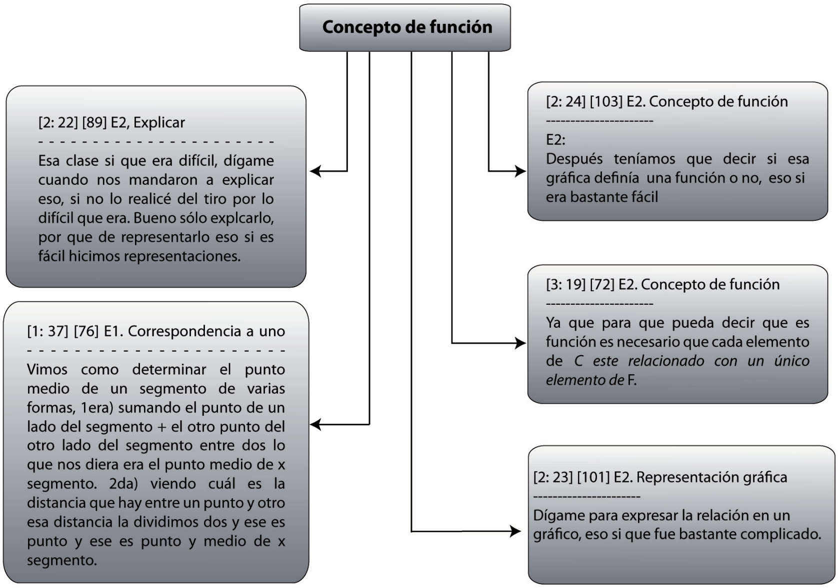



*Gráfico 2*
*Categoría: Concepto de función*

En el comentario aportado por el Estudiante 2, podemos observar que el establecimiento de variables y la representación gráfica de la relación establecida entre ellas no resultó ser una actividad sencilla, esto se evidencia en la cita [2:23] [101] *Dígame para expresar la relación en un gráfico, eso sí que fue bastante complicado*; la relación a la que hace referencia el Estudiante 2 es la que viene dada por las variables Kilovatios/hora (Kw/h.) y costo en bolívares (Bs.), sobre datos tomados de una factura emitida por Electricidad de Caracas. Lo importante aquí es observar cómo, a partir de un *recibo de luz* y de la necesidad que tiene el estudiante de conocer qué características tiene el consumo de energía eléctrica en su hogar, comienza a producir elementos vinculados con la matemática; en este caso, se apoya en una representación gráfica de tipo cartesiana que le permite comprender la situación planteada. Además, la representación en el plano cartesiano no aparece como resultado de un procedimiento mecánico de construcción punto a punto, sino que es una construcción con una intencionalidad, que consiste en representar una situación de una forma particular.

El Estudiante 2 continúa diciendo en la cita [2:24] [103]: *..después teníamos que decir si esa gráfica definía una función o no, eso sí que era bastante fácil*; en este caso, el estudiante utilizó, como se observa en la fi gura 1, el criterio de la línea vertical (cualquier recta de ecuación x = a, con a **R**, que corte a la curva en uno y sólo en un punto) para justificar que la gráfica define una función.

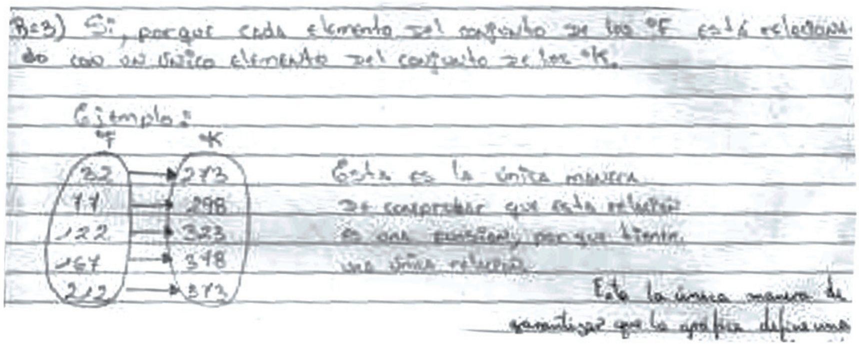



*Figura 1*
*Taller escrito 2*

En la figura 1 podemos observar cómo los estudiantes, a partir de los datos analizados en cada uno de los proyectos, se apoyan en representaciones, procedimientos y conceptos matemáticos que les permiten interpretar la situación problemática planteada. El Estudiante 3 afirma que [3:19] [72] *...ya que, para que pueda decir que es función, es necesario que cada elemento de ºC esté relacionado con un único elemento de ºF*; en este caso, utiliza un sistema de tipo verbal para justificar que la relación es una función. Consideramos importante señalar que no es conveniente hablar de un sólo registro representativo para algunos conceptos cuya naturaleza admite la posibilidad de diferentes representaciones, lo que nos permite hablar de *sistemas de representación* (Vernaugd, 1990).

La consideración exclusiva y absoluta de un modo de representación puede obstaculizar la plena comprensión del concepto. Según Bagni (2004), *el concepto de función se vincula, a menudo, directamente con la gráfica cartesiana de la relación examinada; para muchos alumnos, tal conexión es esencial para decidir si una relación es una función*. El autor afirma a continuación que:

*... tal situación, intuitiva y didácticamente importante, debe ser controlada por el profesor, una exagerada presentación visual podría llevar a los alumnos a malos entendidos a propósito del carácter de algunas relaciones que no se considerarían funciones en cuanto no pueden visualizarse como curvas.*

En la figura 2 se puede ver cómo uno de las y los estudiantes representa la relación Kw/h-Bs. de distintas maneras y se apoya en ellas para justificar que la relación define una función. Al estudiar este concepto, es importante considerar diferentes formas de representación, tales como: la descripción verbal, el modelo físico, la tabla de valores, el diagrama de Venn, el gráfico cartesiano y las fórmulas o ecuaciones, de manera que la diversidad de representaciones permita al estudiante una mejor comprensión del objeto representado.

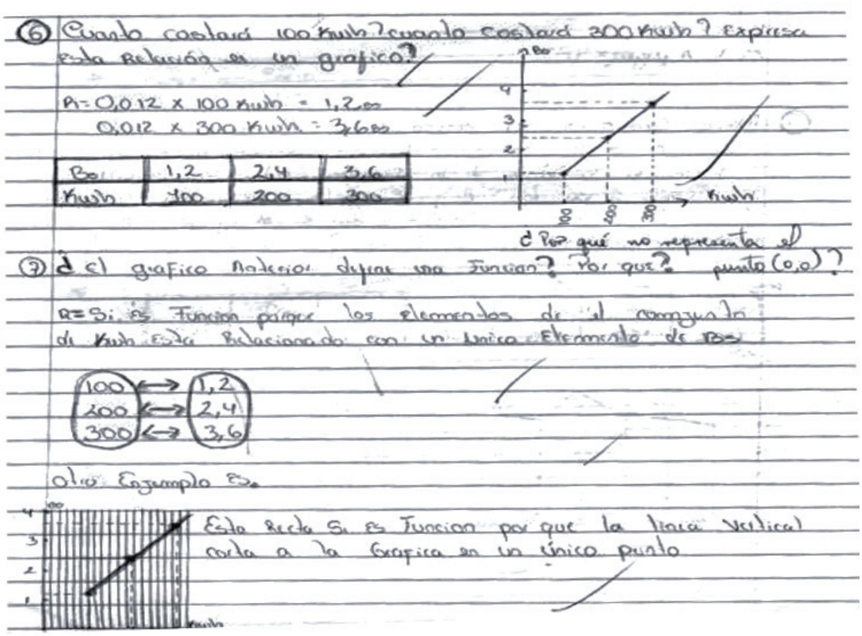


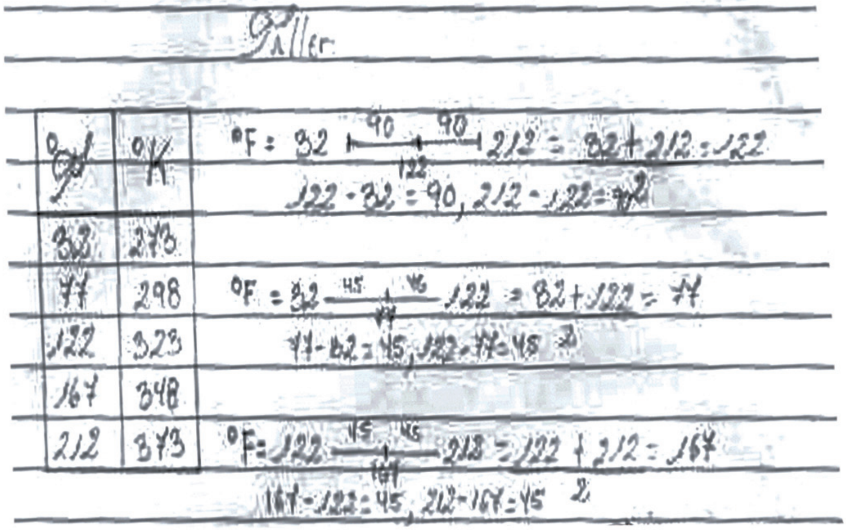

*Figura 2*
*Taller escrito 2*

El Estudiante 2 nos dice, en la cita [2:22] [89], que *esa clase sí que era difícil, dígame cuando nos mandaron a explicar, eso si no lo realicé del tiro por lo difícil que era. Bueno, sólo explicarlo, porque de representarlo eso sí que es fácil, hicimos representaciones*. En este punto el estudiante expresa claramente que tiene dificultad para realizar la explicación de un hecho en matemáticas, lo que se debe a: 1) que explicar no es una actividad común dentro del aula de matemáticas, generalmente los estudiantes realizan unos cuantos ejercicios de forma mecánica, pero sin enterarse del por qué y el para qué de esta actividad, a lo que se ha denominado paradigma del ejercicio (Skovsmose, 1999); y 2) que explicar está vinculado al por qué de las cosas, lo cual es una actividad cognitivamente exigente. Bishop nos dice que explicar es una actividad que conduce al desarrollo de las matemáticas, y la considera como *la actividad que eleva la cognición humana por encima del nivel asociado a la mera experiencia del entorno* (1999: 71).

Observemos cómo el Estudiante 1 [1:37] [76] se preocupa por explicar lo que para él significa *punto medio de un segmento*: *Vimos cómo determinar el punto medio de un segmento de varias formas, 1era) sumando el punto de un lado del segmento + el otro punto del otro lado del segmento entre dos, lo que nos diera era el punto medio de x segmento; 2da) viendo cuál es la distancia que hay entre un punto y otro, esa distancia la dividimos entre dos y ese es punto medio de x segmento*. El estudiante, al explicar cómo se calcula el punto medio de un segmento, produce un algoritmo que le será útil en futuras tareas.

Además, menciona algunos atributos de este concepto, lo que le permite ir apropiándose de esta idea matemática; de acuerdo con Skovsmose (2000), *el significado también puede verse, primero que todo, como una característica de las acciones y no sólo de los conceptos*. Para este autor, haber escuchado la definición conceptual no garantiza la comprensión del concepto. Según Vinner (1991), adquirir un concepto significa tener una imagen conceptual de él. En esta investigación, intentamos resolver el problema de la comprensión conceptual planteando situaciones a ser analizadas por medio de procedimientos, representaciones y conceptos de la matemática que los estudiantes debían aprender cómo y cuándo utilizar.

Para aproximarnos de mejor manera al significado que le han asignado los estudiantes a este concepto, analicemos lo realizado por ellos en uno de los talleres escritos.


Taller

| °F | °K |
|---|---|
| 32 | 273 |
| 77 | 298 |
| 122 | 323 |
| 167 | 348 |
| 212 | 373 |

°F: 32 —90— 122 —90— 212 = $\frac{32+212}{2}$ = 122
122 − 32 = 90, 212 − 122 = 90

°F = 32 —45— 77 —45— 122 = $\frac{32+122}{2}$ = 77
77 − 32 = 45, 122 − 77 = 45

°F = 122 —45— 167 —45— 212 = $\frac{122+212}{2}$ = 167
167 − 122 = 45, 212 − 167 = 45

*Figura 3*
*Taller escrito 1*

En la figura 3 podemos observar cómo se establece la relación entre las escalas Fahrenheit y Kelvin considerando sus equivalentes; para ello, se utiliza un concepto geométrico como el de *punto medio*, lo cual ofrece la posibilidad de que los estudiantes reconozcan la conexión que hay entre las distintas áreas de las matemáticas (Geometría- Álgebra) y que se benefi cien de la comprensión de cómo se ha establecido la relación entre las variables.

**Categoría 2: Papel del estudiante**

Para la conformación de esta categoría, hemos utilizado los comentarios realizados por el Estudiante 2 en su diario de clase, los cuales hacen referencia a un aspecto del papel que les corresponde tomar a los educandos durante el desarrollo de los proyectos educativos. Estas opiniones están reseñadas en el gráfico 3.

El Estudiante 2, en la cita [2:17] [176], refiriéndose a unos comentarios realizados por el profesor del curso durante el desarrollo de una de las actividades de los proyectos, indica: *se lo dije que no hablara con ese tono, que bajara más la voz, porque asustaba a uno, entonces pone nervioso a uno. Y bajó la voz y todo se normalizó*, y agrega en la cita [2:15] [168] *pero hasta lo irrespetuosa se me quería salir, es que provocaba lanzarle la regla que tenía para que dejara la criticadera y el quejar, pero como yo sé que son críticas constructivas, no me molestó.*

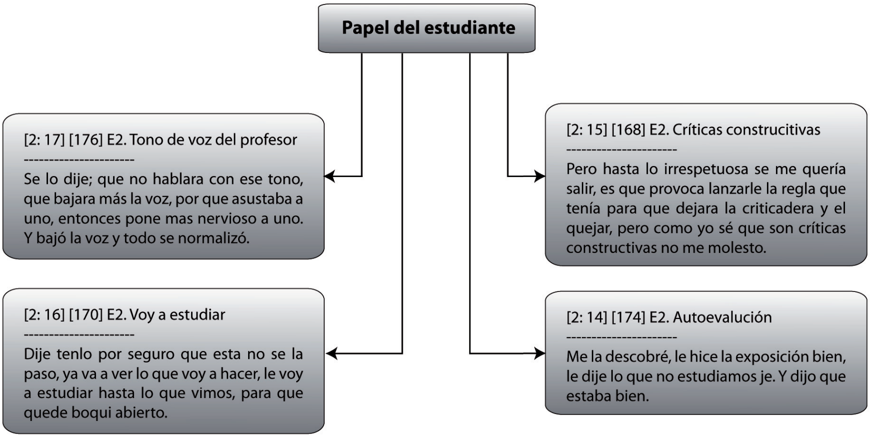



*Gráfico 3*
*Categoría: Papel del estudiante*

De las afirmaciones anteriores, podemos deducir que el estudiante está inconforme con el comportamiento del docente, lo que despierta en él la necesidad de reclamar un mejor trato, pero no lo hace de una forma irrespetuosa, sino que enfrenta la situación y al docente con argumentos que le hacen comprender al docente que su actitud no está beneficiando el proceso de aprendizaje de las y los estudiantes.

Bajo una estructura clásica de la escuela, el profesor o la profesora son la máxima instancia de poder y autoridad dentro del espacio de aprendizaje, lo que lo o la convierte en una figura que no puede ser cuestionada. Esta corriente considera que los y las estudiantes son meros receptores de la acción docente, lo que entra en plena contradicción con una educación democrática y participativa, donde las y los estudiantes tienen derecho a expresar sus ideas en torno a qué aprender y cómo aprenderlo.

Es cierto que, dentro del marco de una enseñanza de la matemática guiada por la metodología de trabajo por proyectos, el líder debe seguir siendo el docente, pero esto no quiere decir que sus decisiones y acciones no puedan ser cuestionadas por las y los estudiantes, o que no puedan existir líderes entre ellos que contribuyan a un mejor desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Es indispensable que la escuela enseñe a las y los educandos a enfrentar, de forma colectiva, legal, justa, consciente y sin importar la estructura de poder que los sustente, a cualquier acto o persona que vulnere valores y derechos como el respeto, la libertad, la vida, la libre expresión, el acceso a la educación, a la salud, a la vivienda, a la recreación, al transporte público, etc. Para ello, es indispensable que nuestras y nuestros estudiantes posean conocimientos científico-tecnológicos y que estén en la creencia de que pueden participar productivamente en su proceso educativo y en la formación de una patria mejor.

Con base en lo anterior, se hace necesario tener mucho cuidado de que, con el pretexto de garantizar la prosecución escolar, nuestros y nuestras estudiantes avancen en el sistema educativo sin obtener los conocimientos necesarios que les permitan analizar fenómenos naturales o comprender, criticar y transformar las situaciones de crisis que se presentan en su medio social; no podemos entregarles a la razón universal o a una ética carente de hechos, información y conciencia, negándoles la posibilidad de juzgar, participar y transformar el mundo, del que cada uno de nosotros es parte.

Es indispensable generar en los educandos el compromiso y amor por aprender, en esto los y las docentes jugamos un papel fundamental. En nuestro caso particular, si bien es cierto que en algunos momentos nos equivocábamos en la forma de guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje, tal como lo expresa el estudiante 2, nos agrada saber que los estudiantes no se detuvieron en su responsabilidad de aprender, lo cual se evidencia en la cita [2:16] [170] del Estudiante 2, quien comenta: *dije, 'tenlo por seguro que ésta no se la paso, ya va a ver lo que voy a hacer, le voy a estudiar hasta lo que no vimos para que quede boquiabierto'* y continúa diciendo, en la cita [2:14] [174], que *me la descobré, le hice la exposición bien, le dije hasta lo que no estudiamos. Y dijo que estaba bien*.

Algunos dirán que la motivación del estudiante por aprender se origina en un sentimiento de revancha contra el profesor, pero nos atrevemos a asegurar, apoyados en todas las citas presentadas y en los documentos completos que reflejan las opiniones del Estudiante 2, que este estilo de escribir es una forma de expresar su compromiso con todas las actividades del proyecto, sus compñaeras, compañeros y docente.

## CONCLUSIONES

A continuación presentamos un conjunto de consideraciones finales que pretenden dar cuenta de los hallazgos de este estudio. Esperamos que, a partir de ellos, se continúe desarrollando otras investigaciones que permitan la transformación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática correspondiente al nivel de educación media.

**Aprendizajes vinculados con el concepto de función**: las y los estudiantes, a partir de la necesidad que tienen de conocer las características de las situaciones planteadas en cada uno de los proyectos, por ejemplo el comportamiento que tiene el consumo de energía en su hogar, comienzan a generar representaciones, procedimientos e ideas matemáticas de manera contextualizada e intencional. De esta forma, cuestiones como representar gráficamente funciones, calcular la distancia entre dos puntos o determinar el punto medio de un segmento no son el resultado de un procedimiento mecánico.

Los educandos hacen uso de diferentes representaciones gráficas, tales como la descripción verbal, la tabla de valores, el diagrama de Venn, el gráfico cartesiano y las formulas o ecuaciones, para interpretar la situación planteada pero, además, las diversas representaciones permiten visualizar las características del concepto.

A lo largo del desarrollo del proyecto *La energía en la casa*, los estudiantes se dan cuenta de la necesidad de utilizar procedimientos matemáticos que les permitan ir analizando la situación no matemática, el contexto extra-matemático funciona como una forma de representación de los conceptos matemáticos.

**Papel del estudiante**: a medida que el desarrollo de los proyectos avanzaba, el grado de compromiso de los y las estudiantes era mayor, ellos y ellas se convirtieron, cada vez más, en los protagonistas de las experiencias de aprendizaje, aportaban ideas relacionadas con el tema abordado y, aunque existieron ciertas dificultades, se preocupaban por tener los materiales necesarios para el desarrollo de las actividades. A pesar de la poca tradición de trabajar en equipo, colaboraban entre sí durante el desarrollo de cada uno de los proyectos, lo que no significó que alguien realizara el trabajo correspondiente a otro compañera o compañero.

También lograron superar la barrera impuesta por nuestra educación, el no confrontar con argumentos los excesos y las faltas del profesor. En una educación democrática y participativa, los y las estudiantes tienen derecho a enfrentar cualquier instancia de poder que vulnere sus derechos.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA


**Abrantes, P. Bastos, R. Brunheira, L. y Da Ponte, J**. (1998). *Matemática. Proyectos Educativos*. Lisboa: Editorial do Ministério de Educaçao.

**Alsina, C**. (s/f). *Geometría y Realidad*. Disponible en: http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/documents/geometria_realidad.pdf [Consultado el 20 de abril de 2006].

**Aravena, M. y Jiménez, J**. 2002. Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*. Nº 31.

**Bagni, G**. 2004. Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 7*, Nº 1.

**Becerra, R**. 2006. *La formación del docente integrador bajo un enfoque interdisciplinario y transformador. Desde la perspectiva de los Grupos Profesionales en Educación Matemática*. Tesis Doctoral no publicada. Caracas: universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Caracas.

**Bishop, A**. 1999. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

**Cantoral, R**. (coord.) 2000. *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

**Carr, W. y Kemmis, S**. 1988. *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

**D'Ambrosio, U**. 1985. *Aspectos sociológicos de la Enseñanza de la Matemática. Vol. 3*. España: Thales.

**De Guzmán, M**. 1993. *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Disponible en: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htmIntroducción [Consultado el 10 de junio de 2006].

**Fortuny, J. y Gómez, J**. 2002. Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas universitarias. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*. N. 31.

**Freire, P**. 1975. *La educación como práctica de la libertad*. México: Siglo XXI.

**Gazcón, J**. (s/f). *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*. Disponible en: http://exa.unne.edu.ar/grado/carreras_a_termino/documentos/Gascon_Relime.pdf [Consultado el 14 de junio de 2007].

**Knoll, M**. 1997. The Project method: Its vocational education origin and international development. Journal of Industrial Teacher Education, 34(3). Disponible en: http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JITE/v34n3/ Knoll.html

**Lakatos, I**. 1978. *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza universidad.

**Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela Nº 5.929 Extraordinaria**. 2009. *Ley Orgánica de Educación*.

**Mckernan, J**. 2001. *Investigación-acción y Currículo*. Madrid: Morata.

**Mora, D**. 2004. "Aspectos pedagógicos y didácticos sobre el método de proyectos". En: Mora, D. (ed.) T*ópicos en educación matemática*. Caracas: Grupo de Investigación y Difusión sobre Educación Matemática.

**Ministerio del Poder Popular Para la Educación**. 2007. *Currículo Nacional Bolivariano. Diseño Curricular del Sistema Educativo Bolivariano*. Caracas: Autor.

**Moya, A**. 2008. *Elementos para la construcción de un modelo de evaluación en matemática para el nivel de educación superior*. Tesis Doctoral no publicada. universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez.

**Orellana, M**. 2004. *Modelos matemáticos como estrategia de enseñanza-aprendizaje y una historia breve de la matemática aplicada*. Seminario sobre Modelos y Modelado: Conceptos, técnicas y aplicaciones. universidad Fermín Toro, auspiciado por la Comisión de Estudios Interdisciplinarios de la universidad Central de Venezuela.

**Skovsmose, O**. 1999. *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente.

**Skovsmose, O**. 2000. *Escenarios de investigación*. Revista EMA. Nº 6.

**Tall, D**. (ed.) 1991. *Advanced mathematical thinking*. Holanda: Kluwer Academic.

**Vinner, S**. 1991. "The role of definitions in the teaching and learning of mathematics". En: Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Holanda: Kluwer Academic.

**Vernaugd, G**. 1990. La teoría de los campos conceptuales. *Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas*. 10 (23).