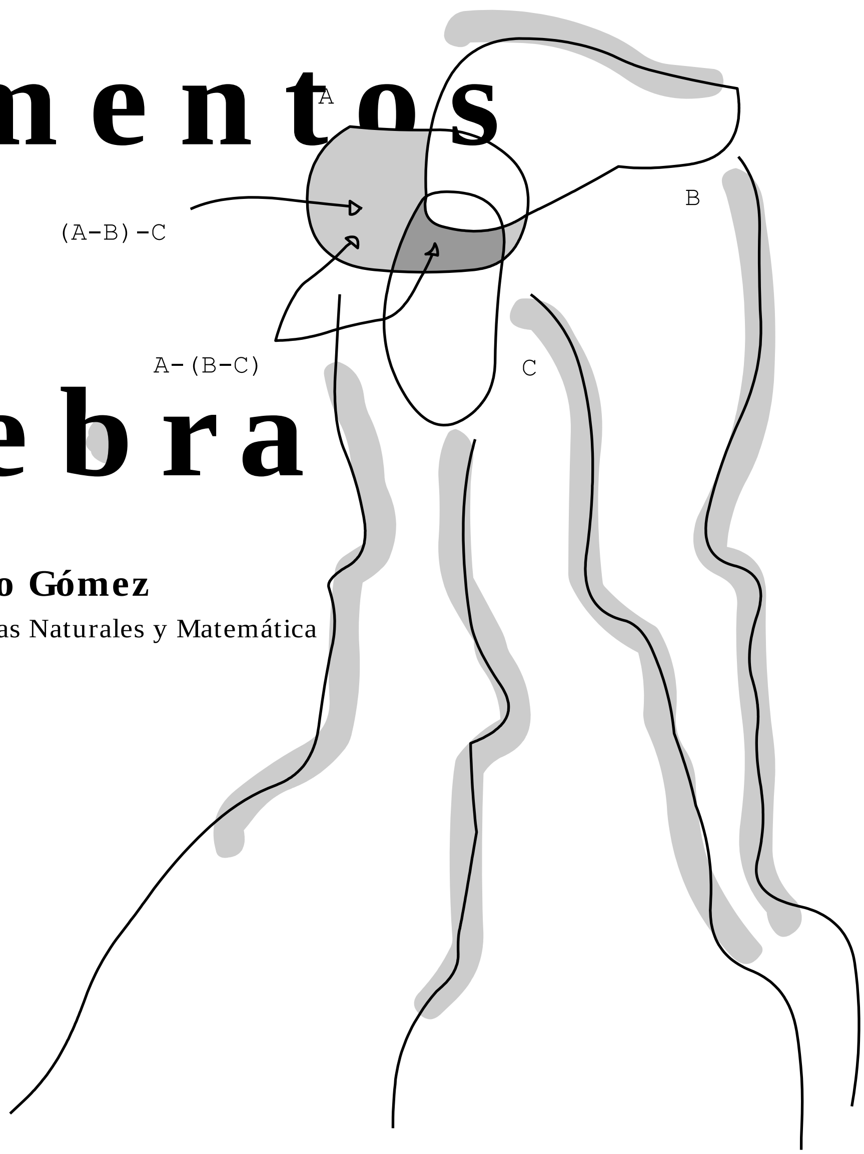
REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MIRANDA
JOSÉ MANUEL SISO MARTÍNEZ
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

RETOS Y LOGROS. BOLETÍN DE INVESTIGACIÓN

Elementos de Álgebra

Wladimir Serrano Gómez
Departamento de Ciencias Naturales y Matemática



Año 2005.

Retos y Logros. Boletín de Investigación
Postgrado@ipmjmsm.upel.edu.ve

Depósito Legal:
ISBN: 978-980-6357-04-4
Impresión:
Impreso en Venezuela / Printed in Venezuela

A mi esposa Hermelinda, a mis padres Rosa y Vicente,
a mis hermanos Rovimar y José Vicente.
Y a mis dedicados estudiantes, a todos aquellos que aman la profesión docente.
A la Sra. Inés María Medrano de T.

ÍNDICE GENERAL

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

Wladimir Serrano Gómez

RESUMEN

Elementos de Álgebra representa una de las formas de iniciarse en el Álgebra. Abarca el estudio de Elementos de Lógica, Pruebas por Reducción al Absurdo, El Principio de Inducción Completa y Teoría de Conjuntos. En el texto se ha prestado atención al uso del lenguaje matemático y al desplazamiento entre las dimensiones verbal, simbólica y gráfica como una manera de construir significados a los objetos y relaciones matemáticas así como para enriquecer el mismo lenguaje matemático (lengua/habla) de los alumnos. Se hace énfasis en la exploración (actividad que en muchos casos resulta ausente del aula y de los textos), verificación, argumentación y demostración.
Descriptores: elementos de lógica, reducción al absurdo, inducción completa, conjuntos.

ABSTRACT

Elements of Algebra represent one of the forms to begin in the study of Algebra. It includes the study of Elements of Logic, Tests by Reduction to the Absurd, the Principle of Complete Induction and Set theory. The text takes care of the use of the mathematical language and to the displacement between the verbal, symbolic and graphical dimensions, like a way to construct to meaning to the objects and mathematical relations as well as to enrich the same mathematical language of the students. It emphasizes the exploration (activity that in many cases is absent from the classroom and texts), verification, argumentation and in the demonstration.
Key Words: elements of logic, reduction to the absurd, complete induction, sets.

INTRODUCCIÓN

Este texto representa una de las formas de iniciarse en el estudio del Álgebra. Se concibió para los estudiantes de primer año del **profesorado en matemáticas** de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Instituto Pedagógico de Miranda (IPM), en especial para los estudiantes del curso *Introducción al Álgebra* (IAA). Encontró motivos en (a) las dificultades observadas por el autor en el manejo del lenguaje algebraico, (b) en el significado atribuido a algunas ideas fundamentales del álgebra por parte de alumnos del curso descrito y en general de otros cursos avanzados de la especialidad y, (c) en algunos materiales escritos diseñados entre 2000 y 2001 cuando el autor dictó el curso IAA en semestres sucesivos. También, el texto representa una forma de estimular el diseño de materiales educativos (como libros de texto, guías de clase, compendios de problemas, proyectos o actividades, etc.) en la comunidad de profesores y estudiantes de matemáticas de Venezuela.

El curso IAA representa el primer curso de álgebra en la especialidad matemática en el IPM; en él se contempla el estudio de algunas ideas matemáticas entendidas como básicas para emprender el estudio de cursos como álgebra lineal, estructuras algebraicas, geometría lineal, así como para ideas de otros campos como el cálculo, el análisis y la geometría. IAA abarca el estudio de la lógica proposicional, de las pruebas por reducción al absurdo y por inducción completa, de la teoría de conjuntos y de las relaciones y funciones.

Se ha dividido la presentación y discusión de *Elementos de Álgebra* en los capítulos: (1) **Elementos de Lógica**, (2) **Pruebas por Reducción al Absurdo**, (3) **El Principio de Inducción Completa** y, (4) **Teoría de Conjuntos**. No se incluye en *Elementos de Álgebra* el estudio de las relaciones y funciones. En el primer capítulo se discute la idea de *oración* en el lenguaje natural y en el lenguaje matemático con la intención de destacar sus diferencias; se estudian las *operaciones entre proposiciones*, algunas *leyes lógicas* y las *funciones proposicionales*. En el segundo capítulo se aportan dos ejemplos clásicos de *Pruebas por reducción al absurdo* (sobre la *irracionalidad* de $\sqrt{2}$ y sobre la infinitud de los números primos). En el tercero se estudia el *Principio de inducción completa apoyándose* en el *Axioma del mínimo entero positivo* y en una discusión sobre las cuestiones ¿Comprobar que una relación vale para algunos casos, aunque esta cantidad sea grande, implica que ésta es válida para los infinitos casos? y ¿Cuántos casos deben comprobarse para garantizar la validez de una relación?; las cuales se abordan a través de algunos ejemplos. Finalmente (capítulo 4), se estudia la *Teoría de Conjuntos*. Este último capítulo comienza con una breve revisión histórica de las ideas de Georg Cantor (considerado el *padre* de la Teoría de Conjuntos) y de la denominada *crisis conjuntista*. Las paradojas de Cantor y de Russell, además de ejemplificar el significado de la crisis, sirven de motivo para introducir al lector en algunas de las posturas epistemológicas que se desarrollaron a partir de ese momento (Logicismo, Formalismo e Intuicionismo).

El trabajo, en general, se nutre de muchas preguntas planteadas al lector para orientar la discusión y para aportar ideas en sí mismas. Las demostraciones expuestas se nutren de observaciones, comentarios e incluso de preguntas, con la intención de hacer instructivo el proceso. En algunos momentos se propone al lector descubrir u observar el o los errores cometidos en una *prueba* o *solución* de un problema.

Los capítulos 1 y 2 son requisito para el 4. En cambio, el 3 puede estudiarse, de acuerdo con el plan del curso, luego de estudiar el 4.

Existen muchas personas a las cuales estoy agradecido por el desarrollo de este trabajo, en especial al Licenciado Walter O. Beyer K. por sus críticas y sugerencias, por su ejemplo; a los profesores José Peña E. y Dr. Manuel Reyes B. por su desde el Departamento de Ciencias Naturales y Matemática y, de la Subdirección de Docencia y Dirección del *Instituto Pedagógico de Miranda*, respectivamente; a las profesoras Julia Machmud, Nieves Amoretti, Marlene Arteaga, Yaritza Cova y Dra. Yajahira Smitter de la Subdirección de Investigación y Postgrado*,* por su interés en publicar *Elementos de Álgebra*. También agradezco las importantes observaciones de los árbitros que evaluaron este trabajo; y, el impulso hacia la investigación del Dr. C. D. Mora y de los profesores Y. Serres y C. Torres del *Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática*. Naturalmente *Elementos de Álgebra* se debe, además, a mis alumnos de álgebra: a Antonieta Angileri y a todos los demás: a ellos obedece este trabajo.

OBJETIVOS

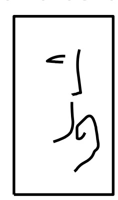
El principal objetivo del texto es iniciar al lector en el *Álgebra*. Para ello, el estudiante, en este primer curso, debe:

(a) Manejar las ideas de *proposición*, *operaciones* con proposiciones, *función proposicional* y *razonamiento deductivo*.
(b) Comprender y utilizar los métodos de demostración por *reducción al absurdo* y por *inducción completa*.
(c) Estudiar la *Teoría de Conjuntos*, las ideas de conjunto que llevaron a plantear paradojas en el seno de la teoría de Georg Cantor, los programas que se ocuparon de los fundamentos de las matemáticas, así como las nociones de inclusión e igualdad de conjuntos, los conjuntos distinguidos, las operaciones y sus propiedades.

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Elementos de Álgebra es un texto que debe complementarse con la **discusión entre el profesor y los alumnos en el aula**. El texto no se entiende como una exposición de definiciones, propiedades y técnicas; busca, en cambio, involucrar el pensamiento reflexivo de los alumnos.

Elementos de Álgebra incluye actividades en las que se propone descubrir errores o argumentar los *pasos* expuestos. Deja, también, muchas preguntas abiertas a lo largo del texto, esto es, en el desarrollo teórico. En cada capítulo se asignan algunas actividades que van un poco más allá del nivel básico en que se desarrolla el curso IAA, con la intención de estimular el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos. Las actividades que el autor ha considerado de mayor dificultad se han señalado con el icono adjunto.



Se han dispuesto espacios para que el alumno responda los planteamientos que se le dejan. Hecho que puede ser un insumo importante para las discusiones en el aula, no sólo sobre los problemas y ejercicios, sino sobre las mismas ideas teóricas (definiciones y propiedades). Muchos comentarios, sugerencias, recordatorios, reglas y referencias históricas se copian al margen del texto con la intención de enriquecer la diagramación del texto y para reforzar algunas ideas.

> Se dejan al lector muchas actividades en las que se deben construir tablas y gráficos para organizar los cálculos. **Exploración** que *consideramos* parte importante (y muchas veces olvidada) de la actividad matemática en el aula, además de la **verificación**, **argumentación** y **demostración**.

Parte de *Elementos de Álgebra* (en versiones previas), en particular de los capítulos Elementos de lógica y Pruebas por reducción al absurdo (capítulos 1 y 2), fueron utilizados por el autor en el curso *Introducción al Álgebra* del Instituto Pedagógico de Miranda, siguiendo el *diseño* antes expuesto.

Wladimir Serrano Gómez
Caracas, 2005

SÍMBOLOS UTILIZADOS

$=$	*Igual a*
$\neq$	*diferente de*
$<$	*menor que*
$\leq$	*menor o igual que*
$\overline{p}$	*no p*
$\sim p$	*no p*
$\overline{\overline{p}}$	*doble negación de p*
$\wedge$	*y*
$\vee$	*o*
$\veebar$	*o (excluyente)*
$\Rightarrow$	*implica, si ... entonces*
$\Leftrightarrow$	*equivalente, si y solo si*
$\exists$	*existe*
$\forall$	*para todo, cualquiera que sea, cualesquiera que sean*
$x!$	*factorial de x*
$a \mid b$	*a divide a b*
$\sum_{i=a}^{b} \cdots$	*suma de ... desde i=a hasta i=b*

$\mid$	*tal que, se verifica que*
$\in$	*pertenece a, es elemento de*
$\notin$	*no pertenece a, no es elemento de*
$\{x \mid \ldots\}$	*conjunto cuyos elementos son las x tales que ...*
$\varnothing$	*conjunto vacío*
$\subset$	*es subconjunto de*
P(A)	*conjunto de partes de A*
A_U^c	*complemento del conjunto A en U*
$A-B$	*diferencia de los conjuntos A y B*
$\cap$	*intersección*
$\cup$	*unión*
Δ	*diferencia simétrica*

Aristóteles (griego, 384/383-322 a.C.) es uno de los filósofos de mayor importancia junto con Platón. Fue hijo de Nicómano (médico de Amintas, el Rey de Macedonia) y preceptor de Alejando Magno. Ingresó a los 17 años a la *Academia* de Platón. Todo conocimiento (episteme) es, según Aristóteles, **práctico, productivo o teórico** (Metafísica, 1025b). El saber productivo consiste en la técnica de saber hacer cosas, como la agricultura, la retórica, el arte y la poética. El práctico es el saber que mejora la conducta: la ética y la política. Y el teórico busca

Capítulo 1

Elementos de *Lógica*

La lógica estudia métodos y leyes que permiten distinguir razonamientos válidos de los que no lo son.
Aristóteles fue el primero que aportó una base para la argumentación a través de su "teoría del silogismo"; para ello usó el lenguaje natural. Aunque la lógica, actualmente, abarca muchos otros temas y problemas.
Fue a partir de los trabajos de Leibnitz, Boole, Frege, entre otros, así como el impulso que generó en todas las matemáticas el descubrimiento de geometrías no euclidianas, que se desarrolló un simbolismo para la lógica en términos algebraicos y se convirtió en un área profunda.

Proposición en el lenguaje natural y en el lenguaje matemático

En nuestro lenguaje natural (o lengua materna) están presentes *oraciones* de las cuales se puede establecer si son verdaderas o falsas; pero también se encuentran oraciones de las que no se puede decir si son verdaderas o falsas.

Se propone al lector exponer algunos ejemplos de oraciones en el lenguaje natural de las que se pueda decir si son verdaderas y, otras en las que no se pueda decir si son o no verdaderas:

____

____

____

____

____

____

la verdad, en las cosas y en uno mismo. «Todos los hombres por naturaleza desean saber» (Metafísica, 980a).

La lógica, fundada por Aristóteles, se convierte en una ciencia formal e instrumento del conocer. Es fundamentalmente una lógica de predicados, o términos (también llamada silogística).

Por ejemplo:

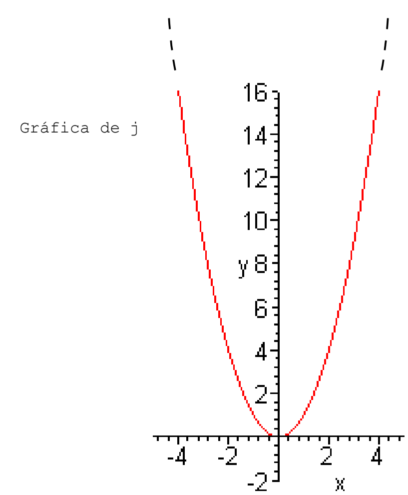
(a) ¿Quién faltó a la primera clase?,
(b) Préstame el libro,
(c) ¡Tengo calor!,
(d) ¿Cómo estás?
(e) ¿Vamos a ir a comer?, etc.

En todos estos casos no se puede afirmar que estas oraciones sean verdaderas o falsas. Más aún, no tiene sentido hacerlo. Es muy conocido que en la interpretación y razonamiento empleando el lenguaje natural está presente la *ambigüedad*. Esto es, una misma oración puede ser entendida de diferentes formas en un mismo contexto. La interpretación y razonamiento con el lenguaje de las matemáticas debe reducir las ambigüedades propias del lenguaje natural.

Veamos un ejemplo: Supongamos que deseamos conocer el valor de verdad de la oración: *la función definida por* $j(x) = x^2$ *es inyectiva*. Es muy común que se responda que la oración es *falsa*, esto es, que la función *j* no es inyectiva, basándose en el hecho de que x y $-x$ siendo distintos (con $x \neq 0$) tienen la misma imagen: $(-x)^2 = x^2$.

En la interpretación y razonamiento basada en el lenguaje natural está presente la *ambigüedad.*

Otros aluden a una representación gráfica y observan que a todo $j(x) \neq 0$ le corresponden dos preimágenes x y $-x$ (ver gráfico adjunto).
Pero alguien puede considerar como dominio de la función *j* al conjunto R^+, R^-, o a [0,1]. En los cuales la función *j* sí es inyectiva, con lo cual la oración dada sería verdadera.

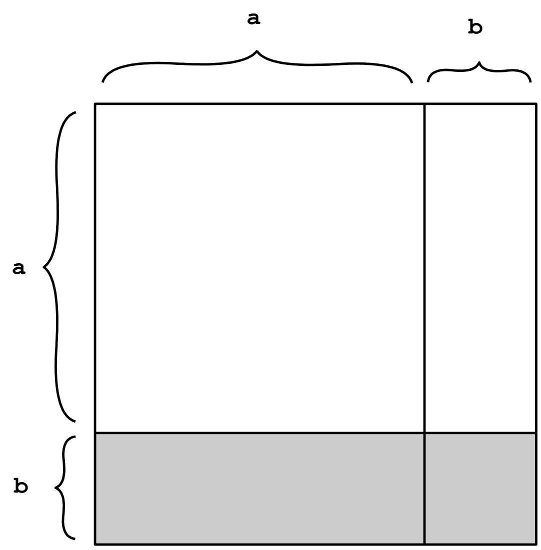


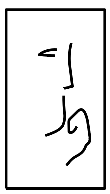
¿De dónde proviene la ambigüedad? Precisamente de la definición de *j*, en ella se describe la regla que asocia a *x* con su imagen **pero no se describen el dominio y codominio de *j*.** Esta observación es importante, ya que se refiere a uno de los conceptos fundamentales de la matemática: en el *función*. Concepto que, no obstante, es objeto de malentendidos en el contexto de la matemática escolar.

Observación: para definir una función se requiere describir tanto la regla que asocia a *x* con su imagen como el dominio de ésta. Sería un error, entonces, preguntar por "el *dominio* que sirve

Consideremos ahora el gráfico que sigue.

a cierta función g"; o por el conjunto $D \subset R$, que verifique que (a) D "sirva de dominio a la *función g*", y (b) si M también "sirve de *dominio* a g", entonces $M \subset D$. Si hablamos de una función g, entonces sabemos cuál es la regla que la define y su dominio.





¿Cuál de las siguientes expresiones representa a la región sombreada? ¿Qué gráficos corresponden a las demás expresiones?

$$(a+b)a$$
$$(a+b)b$$
$$(a+b)^2-a^2$$
$$(a+b)^2-ab$$

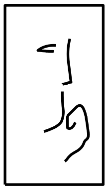
En este caso, sólo una de las expresiones corresponde a la región sombreada en el cuadrado, esto es, una de las proposiciones del tipo "*(a+b)a* representa a la región sombreada", "*(a+b)b* representa a la región sombreada", etc., es verdadera.
Como vemos, hay proposiciones a las que podemos asociar un valor de verdad (verdadero o falso). De este tipo de proposiciones se encarga la lógica que estudiaremos en este Capítulo.

Hay proposiciones matemáticas a las que se puede asociar un valor de verdad, en cambio, hay otras en las que aún se desconoce éste, tal es el caso de la conjetura de Goldbach, de la existencia o no de infinitas parejas de primos gemelos, etc.

Proposición

En este capítulo **trataremos con proposiciones, u oraciones, de las que se puede decir si son verdaderas o falsas**. Esto concuerda con nuestro interés de iniciarnos en el estudio de la *lógica de proposiciones*. No obstante, dejamos claro que en la matemática son comunes también proposiciones de las que aún no sabemos si son verdaderas o falsas, tal es el caso de, por ejemplo: (a) ¿Es todo número par, mayor que dos, la suma de dos primos? (conjetura de Goldbach) y (b) ¿Existen infinitas parejas de *primos gemelos*, esto es, de parejas cuya diferencia sea dos: 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31, etc.? (problema formulado ya por los matemáticos griegos y, sin embargo, aún espera su solución).
Entonces, *en el marco de un plano lógico*, hablaremos de proposiciones o verdaderas o falsas, con la intención de estudiar las operaciones entre éstas y las propiedades que verifican, así como la estructura que conforman.

Exponga algunos ejemplos de proposiciones matemáticas:



Como ejemplos de proposiciones se tienen los siguientes:

En cada caso sí puede caracterizarse el *valor de verdad* de cada oración. **¿Qué valor de verdad considera el lector que tiene cada una de estas proposiciones?**	*(a) La función h: R$\rightarrow$R definida por $h(x)=x$ es inyectiva,* *(b) 2 es una raíz del polinomio $x^4-4x^3+5x^2-4x-1$,* *(c) Existen infinitos números primos,* *(d) Si n es un número entero positivo, entonces $2n+1<n^2$,* *(e) Si x es un entero positivo, entonces la última cifra de los números x y x^5 son iguales, etc.*

Investigue además, otras proposiciones matemáticas de las que no se conozca su valor de verdad (estas son las *conjeturas*), y discútalas con el grupo.

Notación para las proposiciones y para las operaciones entre ellas

Las proposiciones suelen denotarse con las letras *p*, *q*, *r*, *s*, etc.

Las proposiciones suelen denotarse con las letras *p*, *q*, *r*, *s*, etc. Sin embargo, pueden denotarse con otras letras del alfabeto (a, b, c, etc.).

Partiendo de proposiciones atómicas se pueden obtener otras (llamadas moleculares) a través de *operaciones entre proposiciones*. Éstas últimas se describen en la siguiente tabla:

CONECTIVO	*OPERACIÓN*	*LECTURA*
~ o bien $\overline{\ }$	*Negación*	*NO*
$\wedge$	*Conjunción*	*Y*
$\vee$	*Disyunción*	*Ó*
$\Rightarrow$	*Implicación*	*ENTONCES*
$\Leftrightarrow$	*Doble implicación*	*SI Y SÓLO SI*
$\veebar$	*Diferencia simétrica*	*Ó EXCLUSIVO*

La primera de las operaciones es “unaria”; es decir, es una operación que se realiza a una sola proposición. El resto de las operaciones de la tabla son “binarias”; en ellas intervienen dos proposiciones.

Para obtener el *valor de verdad* de una proposición molecular se debe confeccionar, en el marco de la lógica de proposiciones, su correspondiente **tabla de valores de verdad.** El valor de verdad de las proposiciones fuera del marco lógico en que se inscribe este primer capítulo de *Elementos de Álgebra*, se determina, si ello es posible, con *apoyo en una definición*, en una *demostración* o por medio de un *contraejemplo* (es decir, de la exposición de un caso en el que no se verifique la proposición que se da en estudio).

Para caracterizar el *valor de verdad* de una proposición molecular que esté expresada en función de los conectivos antes citados confeccionaremos su correspondiente tabla de valores de verdad. El valor de verdad de una proposición molecular va a depender de los respectivos valores de verdad de las proposiciones atómicas que la conforman y de las operaciones involucradas. En ella se considerarán todos los posibles valores de verdad de las proposiciones que intervienen, las combinaciones de sus valores de verdad y se establecerá un valor de verdad para la proposición generada. De seguidas definiremos cada una de las seis operaciones descritas antes a través de su correspondiente tabla de valores de verdad.

Negación ~ o bien $\overline{}$

Dada una proposición *p*, se definirá ~*p* a través de la tabla de valores de verdad siguiente:

p	~*p*
V	F
F	V

La proposición ~*p* se lee "no *p*" o bien "negación de *p*". También es muy común el uso de la notación $\overline{p}$.

Observe que en la tabla se indicaron los posibles valores de verdad de la proposición *p*, esto es, V y F, luego, la negación de *p* tendrá como valores de verdad:	(1) F si *p* es V y (2) V si *p* es F.

El valor de verdad de "no *p*" (~*p*) es precisamente el opuesto al de *p,* y recíprocamente. Si decimos "*z* es primo, entonces ~*z* no es primo – es compuesto".

Conjunción $\wedge$

Sean *p* y *q* proposiciones, se definirá $p \wedge q$ a través de la tabla de valores de verdad expuesta de seguidas:

p	*q*	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Dadas *p* y *q*, podemos construir otra proposición, llamada "*p* y *q*", o bien, "con-junción de *p* y *q*", que denotaremos así: $p \wedge q$.

$p \wedge q$ se lee "*p* y *q*" o "la conjunción entre *p* y *q*".

(1) $p \wedge q$ es verdad solamente si *p* es verdad y *q* también lo es, y
(2) Si al menos una de las proposiciones (*p* o *q*) es falsa, entonces $p \wedge q$ será falsa.

Por ejemplo, la proposición:	"2 y 4 no son números primos"	z
Ésta puede descomponerse en sus proposiciones atómicas así:	"2 no es un número primo" y "4 no es un número primo"	$p \wedge q$
La primera de ellas, como sabemos, es falsa. Por lo tanto:	"2 y 4 no son números primos" también es falsa.	$p \wedge q$ es F

Otra de las proposiciones que podemos construir dadas p y q, es precisamente la "disyunción de p y q", o bien, "p o q", que escribiremos simbólicamente, así: $p \vee q$. Fuera del plano lógico, podemos hablar de proposiciones como "z se puede descomponer en un producto de número primos o $z=1$", o bien "$-z$ es un número negativo o es igual a cero". Proponemos discutir estas disyunciones, así como las que se expongan en el grupo.

Disyunción $\vee$

Dadas las proposiciones p y q, se definirá $p \vee q$ por la tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p \vee q$ se leerá "p o q" o bien "la disyunción entre p y q".
La tabla expone 4 casos posibles de combinaciones entre los valores de verdad de p y de q. Observe que para que $p \vee q$ sea F es necesario que p y q sean F. Si al menos una de las dos proposiciones es V, se tiene que $p \vee q$ es V.

Consideremos la proposición molecular:	"2 no es un número primo ó 4 no es un número primo"	$p \vee q$
p es falsa y q es verdadera, por lo tanto:	"2 no es un número primo ó 4 no es un número primo" es verdadera	$p \vee q$ es V

$p \Rightarrow q$ es falsa solamente cuando el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) es falso. En los casos restantes, *$p \Rightarrow q$ siempre es verdadera.*

Implicación $\Rightarrow$

La implicación entre las proposiciones p y q, esto es, $p \Rightarrow q$, se define a través de la tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p \Rightarrow q$ se lee "*p* implica *q*" o bien "si *p*, entonces *q*".

Dada la proposición $p \Rightarrow q$, a *p* se le denomina *antecedente* y a *q* *consecuente*. La falsedad de $p \Rightarrow q$ se tiene solamente en el caso en que el antecedente sea V y el consecuente sea F.

$p \Leftrightarrow q$ es V solamente en dos casos: cuando *p* y *q* tienen el mismo valor de verdad. En los otros dos casos $p \Leftrightarrow q$ *es F.* ¿Qué ejemplos de doble implicación puede dar? Discuta su valor de verdad.

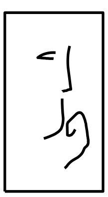
Doble Implicación $\Leftrightarrow$

Se denota a la *doble implicación* entre *p* y *q* por $p \Leftrightarrow q$ y se define a través de la tabla siguiente:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Leeremos $p \Leftrightarrow q$ así: "*p* si y sólo si *q*", "doble implicación entre *p* y *q*" o bien "bicondicional entre *p* y *q*". Observe que $p \Leftrightarrow q$ es V solamente cuando *p* y *q* tienen el mismo valor de verdad simultáneamente. $p \Leftrightarrow q$ es la conjunción entre las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, para convencernos de ello:

Demuestre que $p \Leftrightarrow q$ y $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ tienen los mismos valores de verdad.
[Se dice entonces que $p \Leftrightarrow q$ y $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ son proposiciones *equivalentes* o simplemente que son *equivalentes*]



Diferencia Simétrica $\underline{\vee}$

Antes de definir $p \underline{\vee} q$ realicemos un comentario. Cuando definimos $p \vee q$ observamos que ésta es V cuando al menos *p* o *q* es V. Si *p* es V y *q* es V decimos que $p \vee q$ es V. Pero existen proposiciones expresadas en forma de "disyunción" en las cuales no se cumple que *p* y *q* sean simultáneamente V o F.

Por ejemplo:

$p : x \in Q \veebar x \in I$	"Un número real x ó es racional ó es irracional"

O bien:

$p : x \in (-\infty, 3]$	La proposición p se lee "x pertenece al intervalo menos infinito, tres. Cerrado en tres. Y la proposición q así:
$q : x \in (3, \infty)$	x pertenece al intervalo tres, infinito. Abierto en tres.

A partir de *p* y *q* formemos *r*:

$$r : x \in (-\infty, 3] \text{ ó } x \in (3, \infty)$$

Con lo cual,

(a) Si *p* es V y *q* es V, entonces *r* es F,
(b) Si *p* es F y *q* es F, entonces *r* es F. En cambio,
(c) Si *p* es V y *q* es F, entonces *r* es V y
(d) Si *p* es F y *q* es V, entonces *r* es V.

La proposición $p \veebar q$ (ó *p* ó q) es verdadera solamente cuando *p* y *q* tienen valores de verdad opuestos. "Este sistema de ecuaciones lineales, o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones". Aquí, se entiende que las proposiciones atómicas que la componen no pueden ser ambas V o ambas F. O incluso "*p* es V o F". Siendo *p* una proposición de las que trata la lógica; no así del

Diferencia Simétrica $\veebar$

Se define entonces $p \veebar q$ a través de la tabla de valores de verdad:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p \veebar q$ se lee "la diferencia simétrica entre *p* y *q*", "disyunción excluyente entre *p* y *q*", o bien, "ó *p* ó *q*". $p \veebar q$ es V solamente cuando *p* y *q* tienen valores de verdad distintos. Observe además, que $p \veebar q$ tiene valores de verdad contrarios a los de $p \Leftrightarrow q$, para demostrar esto: Construya, apoyándose en las definiciones anteriores, tablas de valores de verdad para las proposiciones $\overline{p \veebar q}$ y $p \Leftrightarrow q$.

lenguaje natural o materno, ya que, como vimos, en él se dan proposiciones que carecen de valor de verdad, o bien, que para algunos puede ser V, y no obstante, para otros F.

Las leyes lógicas son proposiciones verdaderas independientemente de los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen. Algunas de las leyes lógicas que estudiaremos aquí son: Modus Poniendo Ponens, Modus Tollendo Tollens, Modus Tollendo Ponens, Doble negación o Involución, Silogismo hipotético, las Leyes de *De Morgan*, Silogismo disyuntivo, Separación de la conjunción, Adición, Conmutatividad, Asociatividad y, Distributividad de la conjunción con respecto a la disyunción (y viceversa).

Leyes Lógicas

Ahora estudiaremos proposiciones que son verdaderas independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen, a tales proposiciones se les denomina LEYES LÓGICAS o TAUTOLOGÍAS. Comprobaremos algunas de estas LEYES LÓGICAS a través de sus correspondientes tablas de valores de verdad, *las restantes se proponen como ejercicio y tema de discusión a los lectores*. Estudiaremos en primer lugar, la ley "Modus Poniendo Ponens".

Modus Ponendo Ponens

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge p\right] \Rightarrow q$$

Otra forma de representar esta ley es la siguiente:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

Nota: la proposición que se encuentra bajo la línea es consecuencia lógica de la conjunción de las proposiciones que están sobre la línea. Es decir, suponemos que si dos o más proposiciones están dispuestas de esa forma, la conjunción de las proposiciones sobre la línea implica la que se encuentra bajo ésta. De seguidas, expondremos la prueba de esta ley apoyándonos en su correspondiente tabla de valores de verdad.

Prueba.
Primero disponemos los valores de verdad de $p \Rightarrow q$. Esto lo hacemos en la tercera columna:

Presentaremos la construcción de la tabla de valores de verdad correspondiente a $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ "paso a paso".

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

Ahora, determinamos los valores de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge p$. Para ello debemos considerar los valores de verdad de $p \Rightarrow q$ (dispuestos en la tercera columna), los de *p* (en la primera columna) y apoyarnos en la definición de conjunción entre proposiciones:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	F	V	F	

Finalmente, para determinar el valor de verdad de

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

consideramos los de $(p \Rightarrow q) \wedge p$, los de *q* y la definición de implicación entre proposiciones:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como el valor de verdad de

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

es V independientemente de los valores de verdad que tomen p y q, entonces esta proposición es, en efecto, una *ley lógica* o *tautología*. Observe que las primeras dos columnas contienen todas las combinaciones de valores de verdad de las dos proposiciones atómicas que intervienen en $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$. Luego incluimos dos columnas para determinar el valor de verdad de la proposición que conforma el antecedente de la ley a probar [Como este antecedente es la conjunción de $p \Rightarrow q$ y p, incluimos columnas para estas proposiciones].

La última columna es precisamente la ley *Modus Ponendo Ponens:* $\left[(p \Rightarrow q) \wedge p\right] \Rightarrow q$.

Para calcular los valores de verdad de las proposiciones de las columnas 3, 4 y 5, nos apoyamos en las tablas de valores de verdad que definen a la implicación, conjunción e implicación, respectivamente [Recuerde que la conjunción de dos proposiciones es V sólo cuando éstas son V, y la conjunción es F en los demás casos. Por otra parte, la implicación es V cuando el antecedente y el consecuente son ambos V o bien cuando el antecedente es F].

Observe que $\left[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}\right] \Rightarrow \overline{p}$ también puede escribirse así:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \overline{q} \\ \hline \overline{p} \end{array}$$

Modus Tollendo Tollens

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}\right] \Rightarrow \overline{p}$$

En esta ley, dada una implicación y la negación del consecuente de esta implicación, entonces de la conjunción de ambas premisas se concluye la negación del antecedente de la implicación dada.

¿Qué ejemplos puede dar de la aplicación de esta ley fuera del plano lógico? Discuta con el grupo sus ideas.

Prueba.

En primer lugar, debemos disponer los valores de verdad de las proposiciones $p \Rightarrow q$, $\overline{q}$ y de $\overline{p}$ (apoyándonos en las definiciones de implicación y de negación). Observe que una no depende de las otras.

Se han sombreado las columnas que corresponden a cada paso de la prueba con la intención de ilustrar el proceso.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\left[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}\right] \Rightarrow \overline{p}$
V	V	V	F	F		
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	V		
F	F	V	V	V		

Luego, determinamos los valores de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ considerando los de $p \Rightarrow q$, los de $\overline{q}$ y la definición de conjunción de proposiciones. Lo cual dispondremos en la sexta columna.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\left[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}\right] \Rightarrow \overline{p}$
V	V	V	F	F	F	
V	F	F	V	F	F	
F	V	V	F	V	F	
F	F	V	V	V	V	

Por último, determinamos los de $\left[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}\right] \Rightarrow \overline{p}$: considerando los valores de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ [dados en la sexta columna] y los de $\overline{p}$, así como la definición de implicación.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}$	$\left[(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow \bar{p}$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

***Note que** $\left[(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow \bar{p}$ **es V cualquiera sea el valor de verdad de** p **y de** q. Por lo tanto:* $\left[(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow \bar{p}$ ***es una ley lógica**.*
Es la ley denominada *Modus Tollendo Tollens.*

Modus Tollendo Ponens

$$\left[(p \vee q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow p$$

Escriba la otra forma de denotar esta ley (tal como se hizo para las dos primeras leyes que hemos discutido).

Pruebe esta ley completando la siguiente tabla de valores de verdad.

p	q	$p \vee q$	$\bar{q}$	$(p \vee q) \wedge \bar{q}$	$\left[(p \vee q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow p$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Señale los errores presentes en la tabla adjunta. ¿En qué consiste el error?, Cuál es entonces el valor de verdad de la proposición $\left[(p \vee q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow p$ Discuta con el grupo.

Indique **cuáles son los errores presentes en la siguiente tabla y por qué lo son** (exponga argumentos para sus respuestas):

p	q	$p \vee q$	$\bar{q}$	$(p \vee q) \wedge \bar{q}$	$\left[(p \vee q) \wedge \bar{q}\right] \Rightarrow p$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V

La negación de la negación de *p* es equivalente a *p*; tienen los mismos valores de verdad. En relación con esta ley podemos hablar de proposiciones como "no se cumple que $f(n)=2^{2^n}+1$ no genere números compuestos". Ésta es una conocida conjetura de Fermat. Luego, Euler probó que $f(5)$ es compuesto, y no primo, como supuso Fermat.

Si *p* implica *q* y *q* implica *r*, entonces, *p* implica *r.* Aquí podemos poner como ejemplo "Si *a* divide a *b* y *b* divide a *c*, entonces *a* divide a *c*", precisamente una de las propiedades básicas de la divisibilidad en el conjunto de los enteros. ¿Qué otros ejemplos se pueden dar? **Para probar el Silogismo hipotético** observe que en esta ley

Doble Negación o Involución

$$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$$

Prueba.

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

En este caso existe sólo una proposición atómica que interviene en $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$, por ello, hay únicamente dos posibilidades de valores de verdad a considerar: V y F. Esta ley también se puede representar a través de $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$. Nosotros usaremos indistintamente, en lo que sigue, ambas notaciones.

Silogismo Hipotético

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Leyes de De Morgan

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$
$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Existe una forma abreviada de construir tablas de valores de verdad en la cual se disponen menos columnas; la ilustraremos al probar una de las leyes de *De Morgan*. En ella se comienza describiendo las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones atómicas que intervienen y luego se determinan las de las más complejas. En el caso de la ley $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$, hay dos proposiciones atómicas, *p* y *q*, entonces existen cuatro posibilidades al considerar las combinaciones de sus valores de verdad, las cuales escribimos debajo de *p* y *q*.

intervienen tres (3) proposiciones atómicas, no dos o una como en todos los casos que hemos estudiado hasta ahora. Entonces, ¿Cuántas combinaciones de valores de verdad se tienen para tres proposiciones atómicas? Esta consideración es básica para construir su correspondiente tabla de valores de verdad. Discuta esto con el grupo.

De Morgan (1806-1871, India) perdió la vista de su ojo derecho poco después de nacer. No tuvo un desempeño destacado en la escuela. Ingresó al *Trinity College Cambridge* a la edad de 16 años (1823). A los 21 años ocupó en cargo de profesor

Ahora determinamos los valores de verdad de $p \wedge q$, que escribimos debajo del símbolo $\wedge$, y luego los de $\overline{p \wedge q}$, listados debajo del símbolo ~.

~	(p	∧	q)	⇔	~p	∨	~q
F	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V

Seguimos un proceso similar para determinar el valor de $\overline{p} \vee \overline{q}$, y finalmente el de $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ [que copiamos debajo de $\Leftrightarrow$. **Observe que esta última proposición es V cualquiera sea el valor de** *p* **y de** *q*].

Pruebe las leyes que se dan a continuación.

Silogismo Disyuntivo

Para probar esta ley puede aplicar la "forma abreviada" que se mostró antes.

$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$	$\Rightarrow$	$r \vee s$

en la Universidad de Londres. Su libro *Elementos de Aritmética* (1830) se editó muchas veces. En 1838 definió e introdujo el término **inducción matemática**; aunque ya esta técnica se había usado sin una base rigurosa. Dio una **interpretación geométrica para los números complejos** (1849), reconoció la **naturaleza simbólica del álgebra**, introdujo las **Leyes de De Morgan** y **reformuló la *lógica matemática*** (su más grande contribución).

En el ***Silogismo Disyuntivo*** (ver página anterior) intervienen cuatro (4) proposiciones atómicas. ¿Cuántas combinaciones de valores de verdad se tienen con cuatro proposiciones? ¿Y para cinco? Proponga una conjetura para *n* proposiciones.

Separación de la Conjunción

$$p \wedge q \Rightarrow p$$
$$p \wedge q \Rightarrow q$$

Adición

$$p \Rightarrow p \vee q$$
$$p \Rightarrow q \vee p$$

Conmutatividad

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Asociatividad

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \text{ y } (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Leyes distributivas (de la conjunción con respecto a la disyunción y, viceversa). En estos casos puede construirse una tabla "abreviada", tal como ilustramos para una de las leyes de *De Morgan*.

Distributividad (de la conjunción con respecto a la disyunción y, viceversa)

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$
$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

Razonamiento Deductivo Válido

- Premisas
- Razonamiento
- Razonamiento deductivo
- Razonamiento deductivo válido

El razonamiento es el método a través del cual partiendo de ciertos supuestos o premisas, se infiere o concluye de estos una proposición (que aquí etiquetamos con *s*).

Supongamos que tenemos *n* proposiciones $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, las cuales llamaremos *premisas*. Si la conjunción de las *n* premisas implica la proposición *s*, esto es,

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow s$$

llamaremos a este proceso de concluir *s*: RAZONAMIENTO. Convendremos que en un razonamiento interviene un número finito de premisas. Diremos que un razonamiento es DEDUCTIVO si se tiene que:

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *son verdaderas y s también es verdadera*

Además, un razonamiento deductivo es VÁLIDO si se cumple que:

$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow s$ *es una ley lógica.*

Es muy importante diferenciar las proposiciones moleculares y atómicas que se expresan en el enunciado, pues, como vemos en este ejemplo, constituyen proposiciones fuera del plano lógico.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

(a) "Las piezas negras pueden dar el mate más corto: en dos jugadas"

Consideremos la siguiente proposición enunciada en lenguaje natural; utilizaremos las leyes lógicas para demostrar la proposición dada como conclusión.

> *Si las blancas no mueven su peón Rey, entonces las piezas negras pueden dar el mate más corto: en dos jugadas. Si las blancas mueven su peón Rey, entonces dan el mate más corto: en tres jugadas. Las piezas blancas no dan el mate más corto. Por lo tanto, las piezas negras pueden dar el mate más corto: en dos jugadas.*

En ella observamos varias proposiciones más simples, tal es el caso de "s*i las blancas no mueven su peón Rey, entonces las piezas negras pueden dar el mate más corto: en dos jugadas*", o "s*i las blancas mueven su peón Rey, entonces dan el mate más corto: en tres jugadas*", entre otras.

Después de esto, podemos representarlas simbólicamente.

La primera tarea que haremos es **diferenciar éstas etiquetándolas y traduciéndolas al lenguaje proposicional**, veamos:

$a \Rightarrow b$*: Si las blancas no mueven su peón Rey, entonces las piezas negras pueden dar el mate más corto: en dos jugadas.*

$\bar{a} \Rightarrow c$*: Si las blancas mueven su peón Rey, entonces dan el mate más corto: en tres jugadas.*

$\bar{c}$ *: Las piezas blancas no dan el mate más corto.*

b*: Las piezas negras pueden dar el mate más corto: en dos jugadas.*

Se debe tener cuidado al traducir la proposición "*las blancas no mueven su peón Rey*", que representamos por *a*, y "*las blancas mueven su peón Rey*", que llamamos $\bar{a}$ [no *a*]; al igual que entre "*las piezas blancas dan el mate más corto*", etiquetada con *c*, y "*las piezas blancas no dan el mate más corto*", que etiquetamos con $\bar{c}$.

A partir de las ideas anteriores podemos plantear simbólicamente la proposición a probar.

Por otra parte, en la proposición que llamamos *c* el referente no se da explícitamente, se sobreentiende. Además asumimos que "[las piezas blancas] *dan el mate más corto: en tres jugadas*" es la negación de "*las piezas blancas no dan el mate más corto*". Observe que *b* se distingue como la conclusión de las premisas dadas.

En lenguaje proposicional escribimos:

Con este ejemplo, aún cuando no se refiere a ideas matemáticas, vemos el importante papel que juega la lógica de proposiciones en el razonamiento, así como en la comunicación y discusión de ideas.

$$(a \Rightarrow b) \wedge (\bar{a} \Rightarrow c) \wedge \bar{c} \;\Rightarrow\; b$$

Ahora nuestra tarea es deducir *b* a partir de las premisas dadas apoyándonos en las leyes lógicas como argumentos.

Proposición.

$$(a \Rightarrow b) \wedge (\bar{a} \Rightarrow c) \wedge \bar{c} \;\Rightarrow\; b.$$

Prueba.

De la conjunción de $\bar{a} \Rightarrow c$ y $\bar{c}$ concluimos a [por la ley lógica *Modus Tollendo Tollens*, esto es, $(\bar{a} \Rightarrow c) \wedge \bar{c} \;\Rightarrow\; a$]	$\bar{a} \Rightarrow c$ $\bar{c}$ ——— a
Ahora conjugamos $a \Rightarrow b$ y a y, por la ley lógica *Modus Ponendo Ponens*, obtenemos *b*, es decir, $(a \Rightarrow b) \wedge a \;\Rightarrow\; b$	$a \Rightarrow b$ a ——— b
Y la proposición está probada.	

□ Descubriendo errores

Es válido o no concluir *b* a partir de $(a \Rightarrow b) \wedge (\bar{a} \Rightarrow c) \wedge \bar{c}$

¿Hay errores en el razonamiento expuesto? Si es así, ¿en qué consisten?

(b) "Sobre errores ..."

¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento?

Se dispuso una serie de proposiciones indicando con ello que la primera de ellas implica la segunda y así hasta la cuarta proposición. Justifique además, ¿por qué una o algunas de las implicaciones allí establecidas son falsas? Para esto puede construir las correspondientes tablas de valores de verdad o apoyarse en las leyes lógicas ya probadas.

$$(a \Rightarrow b) \wedge (\bar{a} \Rightarrow c) \wedge \bar{c}$$

$$(a \Rightarrow b) \wedge \left[(\bar{a} \Rightarrow c) \wedge \bar{c}\right] \quad \text{¿por qué?}$$

$$(a \Rightarrow b) \wedge \bar{a} \quad \text{¿por qué?}$$

$$b \quad \text{¿por qué?}$$

(c) "Determinando valores de verdad"

Supongamos que dada la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge r$ y la condición de que *r* es Verdadera (V) [es decir, sabemos que *r* es V]. Podemos plantear la pregunta: ¿Es suficiente esta condición para determinar el valor de verdad de:

$$(p \Rightarrow q) \wedge r \,?$$

O en otras palabras ¿es suficiente que *r* sea V para que $(p \Rightarrow q) \wedge r$ sea V (o bien para que sea F)? Para saber esto nos apoyaremos en la tabla adjunta.

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	r
V	V	V	V	V
V	V	V		~~F~~
V	F	F	F	V
V	F	F		~~F~~
F	V	V	V	V
F	V	V		~~F~~
F	V	F	V	V
F	V	F		~~F~~

V ó F

Nota: la flecha indica toda la columna.

Note que hemos omitido los casos en que *r* es F, de acuerdo con la condición dada, por lo tanto, dejamos libres las casillas para los valores de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge r$ cuando *r* es F. Ahora bien, en los casos en los cuales *r* es V, $(p \Rightarrow q) \wedge r$ puede ser V o F [observe en la tabla la columna señalada con la flecha]. Por esta razón la condición *r* es V **no es suficiente** para saber el valor de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge r$.

Sucede algo similar si tomamos la condición *r* es F.

En cambio, si, por ejemplo, tomamos como condiciones *r* es V y *p* es F, sí podemos responder la pregunta planteada: en este caso $(p \Rightarrow q) \wedge r$ es V [**verifíquelo**].

____

____

____

____

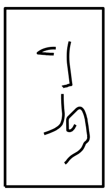
____

____

¿Qué condiciones deben establecerse para que $(p \Rightarrow q) \wedge r$ (con r V) sea F?

Actividades

A1: *Traduciendo proposiciones*



Estas pruebas también pueden hacerse construyendo las tablas de valores de verdad correspondientes; no obstante, la intención es apoyarnos en las leyes lógicas que se han probado. Discuta sus ideas con el grupo.

Traduzca (al lenguaje proposicional) las siguientes proposiciones. Utilice las LEYES LÓGICAS y demuestre la proposición dada como conclusión.

(1) Si *Fritz/Primergy* no opera con ocho procesadores a *700* Mhz, entonces no tiene una memoria de *18* Gigabytes. *Fritz/Primergy* tiene una memoria de *18* Gigabytes. Si *Fritz/Primergy* opera con ocho procesadores a *700* Mhz, entonces calcula *2,8* millones de posiciones por cada segundo. Por lo tanto, el programa de ajedrez *Fritz/Primergy* calcula *2,8* millones de posiciones por cada segundo.

(2) Si Juan no resolvió el último ejercicio, entonces su calificación es *12*. Su calificación no es *12* ó su calificación es menor que *12*. Su calificación no es menor que *12*. Si Juan resolvió el último ejercicio, entonces Juan aprobó el examen. Por lo tanto, Juan aprobó el examen.

(3) Los *William* no se retiraron y los *Ferrari* no salieron de carrera. *Ralf Schumacher* ganó la carrera. Si hubo podio para el equipo *McLaren*, entonces los *William* se retiraron o los *Ferrari* salieron de carrera. Por lo tanto, no hubo podio para el equipo *McLaren* y *Ralf Schumacher* ganó la carrera.

La proposición $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ es el **contrarrecíproco** de $p \Rightarrow q$. **El contrarrecíproco de una proposición es una forma de hacer una *prueba indirecta*.**

A2: *Sobre las leyes lógicas*

Determine si las siguientes proposiciones son LEYES LÓGICAS o no.

(1) $p \Rightarrow p \wedge q$

(2) $p \Rightarrow p \vee q$

(3) $p \Rightarrow p \veebar q$

(4) $p \wedge q \Rightarrow p$

(5) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

(6) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

(7) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$

Observación: no todas las proposiciones que se indican al final (en cada caso) son consecuencia lógica de las que le preceden. Determine cuáles son estos casos.

A3: “*Probando*”

Demuestre en cada caso (si es posible), usando las leyes lógicas, que la última proposición citada es consecuencia lógica de las anteriores:

(1) $p\Rightarrow q$, $q\Rightarrow\overline{r}$, r, $p\vee(w\wedge t)$, w.

(2) $\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$, $p\Rightarrow r$, $\overline{r}$, $\overline{q}$.

(3) $\overline{p\vee q}$, $\overline{q}\Rightarrow r$, $s\vee r$, $s\vee r\Rightarrow t$, $t\wedge r$.

(4) $p\Leftrightarrow q$, p, q.

(5) $r\veebar\overline{s}$, $\overline{\overline{s}}$, t, $r\wedge t$.

(6) $(p\vee q)\wedge r$, $\overline{q\vee s}$, $t\Rightarrow\overline{r}$, $\overline{t}\wedge p$.

(7) $p\wedge q\Rightarrow r$, q, $\overline{r}\vee w$, $w\Rightarrow z$, $\overline{z}$, $\overline{p}$.

Una **Tautología** es una proposición verdadera, cualquiera sea el valor de verdad de las proposiciones atómicas que la componen.

Las proposiciones pueden clasificarse, de acuerdo con su valor de verdad, en: **Tautologías**, **Contingencias** y **Contradicciones**.

Consideremos las proposiciones "Existe al menos un número primo entre *n* y *2n,* para cualquier entero positivo *n*", o bien, "los números *111*, *11111*, *1111111*, ..., son divisibles por *11*". ¿Cómo pueden clasificarse? ¿Son tautologías, contingencias o contradicciones? Estudie lo mismo en el caso de "$M_n = 2^n - 1$ es primo para cada entero positivo mayor que 2". Estos números son conocidos como *números de Mersenne*.

Tautología, Contingencia y Contradicción

Como ya se señaló, una TAUTOLOGÍA es una proposición que es verdadera, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. Por ejemplo: cada una de las leyes lógicas es una Tautología. Otras Tautologías son:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$
$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

las cuales se denominan *Leyes de Idempotencia.*
Pero hemos observado que existen proposiciones que en algunos casos son verdaderas y en otros son falsas, y también, otras que siempre son falsas. Por ejemplo, la proposición $p \vee q$ no siempre es verdadera. Y, por otra parte,

$$p \wedge \overline{p}$$

es siempre falsa.

Clasificaremos las proposiciones, *de acuerdo a su valor de verdad*, en:

(a) TAUTOLOGÍAS
(b) CONTINGENCIAS y
(c) CONTRADICCIÓN.

Las CONTINGENCIAS son proposiciones que en algunos casos son verdaderas y en otros son falsas.
Las CONTRADICCIONES, en cambio, son proposiciones que siempre son falsas.

Aporte otros ejemplos de Tautología, Contingencia y Contradicción.

____
____
____
____

Leyes de inferencia y de equivalencia

Es muy importante distinguir entre las leyes de INFERENCIA y de EQUIVALENCIA. Uno de los errores que se pueden presentar al estudiar un problema o en una *demostración* es confundir una ley de inferencia con una de equivalencia. Por ejemplo: "concluir *p* a partir de $p \vee q$" (La ley $p \Rightarrow p \vee q$ es de inferencia y no de equivalencia).

La ley $p \Rightarrow p \vee q$ es de inferencia y no de equivalencia. Observe que $p \vee q \Rightarrow p$ (su recíproco) es una contingencia [en algunos casos es V y en uno es F]. En cambio, $p \Rightarrow p \vee q$ siempre es V. ¿Qué otros ejemplos puede dar?

Dejamos al lector la tarea de clasificar las leyes que hemos estudiado en esta sección.

De **INFERENCIA**		De **EQUIVALENCIA**	
$p \wedge q \Rightarrow p$	Separación de la conjunción	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$	Doble negación
$p \wedge q \Rightarrow q$			

Función Proposicional

□ Función proposicional
□ **Cuantificadores**:
Universal ($\forall$) y **existencial** ($\exists$)

Llamaremos FUNCIÓN PROPOSICIONAL a toda oración que depende de una variable *x* y que, al variar *x* se obtiene una proposición. Las Funciones Proposicionales suelen denotarse con el símbolo $P(x)$. A una función proposicional es posible asociarle la idea de *cuantificación* para así obtener otra proposición.
Los CUANTIFICADORES que estudiaremos son:

(a) CUANTIFICADOR UNIVERSAL y
(b) CUANTIFICADOR EXISTENCIAL.

Los símbolos para denotarlos son, respectivamente, $\forall$ y $\exists$.

Observe que al negar la función proposicional $\forall x:\ P(x)$ cambia el cuantificador (de universal a existencial)

Expresiones como:	Se escriben, empleando la notación descrita antes, así:	
Para todo *x, se verifica* $P(x)$		$\forall x:\ P(x)$
Existe *x tal que se verifica* $P(x)$		$\exists x \mid\ P(x)$
		Los Símbolos ":" y "/" se utilizan indistintamente.

Para ***negar*** *una función proposicional cuantificada* se debe considerar la siguiente regla: el cuantificador cambia y se niega la función proposicional. Esto es:

$$\sim\left[\forall x:\ P(x)\right] \Leftrightarrow \exists x:\ \sim P(x)$$

Consideremos la proposición "Para todo *k*, existen *k* números compuestos consecutivos". ¿Cómo se puede escribir "simbólicamente"? Discuta su valor de verdad. Por ejemplo, para *k=2*, podemos exponer a los enteros *8* y *9* (observe que ambos son compuestos y consecutivos). Aporte ejemplos, si los hay, para *k=3, 4, 5, 6, 7,...*

$$\sim\left[\exists x:\ P(x)\right] \Leftrightarrow \forall x:\ \sim P(x)$$

Por ejemplo, la negación de: "Existen números enteros que no se pueden descomponer en factores primos" es:	*"Todo número entero se puede descomponer en factores primos", y recíprocamente.*

Estas ideas serán fundamentales al estudiar, en las próximas secciones, pruebas por reducción al absurdo, pruebas por inducción completa y teoría de conjuntos.

Actividades

B1: ***Negación de proposiciones***

Niegue las siguientes funciones proposicionales:

(1) $\exists x \mid\ P(x) \vee Q(x)$

(2) $\exists x \mid\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

(3) $\forall x\, \exists y \mid\ x + y = 0$

(4) $\forall x\, \exists x^{-1} \mid\ xx^{-1} = 1$

La proposición: "$x^n + y^n = z^n$ sólo tiene soluciones enteras para $n \leq 2$" es precisamente el denominado ***Último Teorema de Fermat***. Sin embargo, éste no fue formulado como un teorema, pues Fermat no expuso su demostración. Constituyó entonces, una conjetura. Sólo recientemente, después de aproximadamente

B2: ***Exprese las siguientes proposiciones simbólicamente, niegue y traduzca la negación al lenguaje natural.***

(1) El cubo de todo número real es mayor que 2.
(2) Todo número entero *z* verifica que su cuadrado aumentado en uno es igual al siguiente de *z*.
(3) Todo número natural se puede expresar como la suma de dos cubos.
(4) Si *n* es un número natural mayor que 2, para cualesquiera números naturales *x*, *y* y *z* se satisface la ecuación $x^n + y^n = z^n$.

300 años, se pudo demostrar esto; pasando así a constituir un teorema.

Algunas lecturas recomendadas

Bosch, J. (1968). *Introducción al simbolismo lógico* (4ª ed.). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Orellana, M., Rivas, S. y Monagas, O. (1980). *Álgebra I. Módulos 1, 2 y 3.* Caracas: Universidad Nacional Abierta.

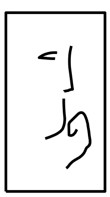
Rojo, A. (1972). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Capítulo 2

Pruebas por *Reducción al Absurdo*

¿En qué consisten?

Sugerimos al lector aportar la idea que tiene de una **“Prueba por Reducción al Absurdo”**. Aún cuando no haya estudiado con anterioridad este tipo de pruebas, es importante evocar la concepción que tenemos del término y compararla con la forma cómo se le entiende en matemáticas.



Las pruebas por **Reducción al Absurdo** constituyen uno de los razonamientos de tipo indirecto

Dada una proposición en la que podemos distinguir *premisas* y *conclusión*, una prueba por **REDUCCIÓN AL ABSURDO** consiste en un razonamiento que indica que el conjunto de afirmaciones formado por las premisas y la negación de su conclusión lleva a una *contradicción*.
Equivale a razonar de la siguiente manera:
Dadas *n* premisas

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \dots,\ p_n$$

y una proposición *s*

la cual se cree es consecuencia lógica de estas premisas.
Si es posible concluir una *contradicción* a partir de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ y de la negación de *s*, esto es $\overline{s}$, entonces se puede concluir *s* a partir de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Esta técnica puede estructurarse en los pasos que siguen:

(1) **Se considera la negación de** *s* **como otra premisa,**
(2) **Se opera con las premisas y, de encontrar una contradicción, entonces,**
(3) **La proposición** *s* **es consecuencia lógica de las premisas.**

Veamos un ejemplo.

Proposición.

Demostrar $\overline{p}$, teniendo como premisas: $p \Rightarrow \overline{r}$, $q \Rightarrow \overline{p}$ y $r \vee q$.

Observe que tomamos como una nueva premisa a p, pues la tesis es, en este caso, $\overline{p}$, y su negación es $\overline{\overline{p}}$. No importa con cuáles de las proposiciones atómicas presentes en las premisas se forme la contradicción

Prueba. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que p es cierta [la consideraremos otra premisa además de las listadas]. De $p \Rightarrow \overline{r}$ se tiene $r \Rightarrow \overline{p}$, ya que esta última proposición es el contrarrecíproco de $p \Rightarrow \overline{r}$ y son equivalentes. Ahora, $(r \vee q) \wedge (r \Rightarrow \overline{p}) \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$ implica $\overline{p} \vee \overline{p}$ por silogismo disyuntivo. Luego $\overline{p} \vee \overline{p}$ es equivalente a $\overline{p}$ [*idempotencia*]. Conjugando $p \wedge \overline{p}$ obtenemos una contradicción o absurdo. El absurdo proviene de suponer que p es verdadera, por lo tanto, p debe ser falsa y $\overline{p}$ verdadera.	*Otra forma de presentar la prueba es:* $\dfrac{p \Rightarrow \overline{r}}{r \Rightarrow \overline{p}}$ Luego: $r \vee q$ $r \Rightarrow \overline{p}$ $q \Rightarrow \overline{p}$ $\overline{}$ $\overline{p} \vee \overline{p}$ $\overline{}$ $\overline{p}$ Ahora, conjugamos $p \wedge \overline{p}$, y obtenemos el absurdo.

Aunque en general no se sabe de antemano que lo que se propone como tesis es consecuencia lógica de las premisas, y si lo fuese, no sabemos si el método de demostración por reducción al absurdo nos llevará a una prueba de dicha proposición.

El método de **Reducción al Absurdo** es uno de los tipos de demostración de que disponen las matemáticas

Una duda que se presenta con frecuencia y de manera natural entre los estudiantes es que pareciera que las proposiciones que se pueden probar por reducción al absurdo *se dan* en la forma:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow b$$

Esto no es así en general. El ejemplo que sigue es una muestra de ello y además posee la característica de que muy probablemente haya sido estudiado en alguno de los cursos de bachillerato; aunque de todas formas lo tratamos aquí. Es la prueba de la *irracionalidad* de $\sqrt{2}$.

La prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ era ya conocida en la antigüedad.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Proposición.

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

Como se observa no se dan de forma explícita las premisas en las que nos podemos apoyar para proceder por reducción al absurdo. En estos casos sirven como argumentos para el proceso deductivo cualesquiera de las nociones y propiedades conocidas sobre los números racionales *Q*.
Sabemos, por ejemplo, que un número racional tiene la forma

$$\frac{m}{n}\text{, donde } m, n \in Z \text{ y } m \neq 0$$

[*Z* representa al conjunto de los números enteros]. Sabemos además que existen en *Q* números que son irreductibles, esto es, donde *m* y *n* no tienen factores en común.
Estos dos hechos serán argumentos importantes en la prueba que exponemos de seguidas.
Por otra parte, un número es irracional si no es posible expresarlo como razón de dos números enteros.

Prueba.

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{2}$ no es un número irracional, es decir, que es racional. Si $\sqrt{2} \in Q$, entonces tiene la forma:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

para algún *m* y algún $n \neq 0$ en *Z*.

Al escoger a $\frac{m}{n}$ *irreducible* decimos que **no perdemos generalidad en la prueba**, ya que si $\frac{m}{n}$ no fuese irreducible es posible encontrar una fracción equivalente que sí lo es. Estas convenciones son comunes en la actividad matemática. De esta forma se abrevian las pruebas de las proposiciones y la resolución de problemas.

Supongamos además, sin pérdida de generalidad, que $\frac{m}{n}$ es irreductible [ya que cualquier fracción es equivalente a una fracción irreducible].

Como $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ entonces $2n^2 = m^2$. De esto se deduce que m^2 es par; por lo tanto, m es par [observe que uno de los factores de m es precisamente 2], es decir, $m = 2k$, para algún $k \in Z$. Ahora sustituimos $m = 2k$ en $2n^2 = m^2$:

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

de donde

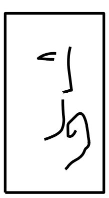
$$n^2 = 2k^2$$

con lo cual, n también es par. Entonces m y n tienen ambos como factor al 2, absurdo, pues habíamos supuesto que m y n no tenían factores en común.

El absurdo viene de suponer que $\sqrt{2}$ es racional, por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional. Lo que queríamos demostrar.

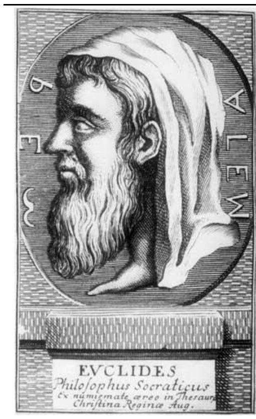
Las proposiciones que siguen pueden ser probadas por el método directo apoyándose en las leyes lógicas (estudiadas en el Capítulo 1) y también por reducción al absurdo. Ambas tareas quedan propuestas al lector.

(1) Demostrar $r \wedge t$ si las premisas son: $r \underline{\vee} \bar{s}$, $\bar{\bar{s}}$, t.



Discuta, además, los posibles errores en que puede incurrirse al aplicar este método de prueba.

(2) Demostrar $\bar{r} \vee s$ si las premisas son: $p \vee q$, $p \Rightarrow \bar{r}$, $q \Rightarrow s$.



Euclides: De este matemático griego apenas se tienen algunos datos biográficos. Incluso, en la Edad Media, se le confundió con el filósofo *Euclides de Megara* hasta el punto de que su monumental obra ***Los Elementos*** –en una de sus ediciones– fue publicada bajo este nombre. Los *Elementos* no están dedicados sólo a la geometría plana [libros 1 al 4], además se trata la teoría de proporciones [libros 5 y 6], números racionales [7, 8 y 9], método exhaustivo y teoría de los números irracionales [10] y también geometría del espacio [11, 12 y 13]. A **Euclides** se le considera el gran sistematizador de

(3) Concluir *q* a partir de: $t \Rightarrow q$, $\bar{r}$, $(z \wedge t) \vee r$.

Construya proposiciones que no puedan ser probadas por reducción al absurdo (*raa*). La probada antes puede dar algunas ideas al respecto.

¿Se puede probar por *raa* que $\sqrt{3}$ **es irracional?** Discuta en el grupo.

Infinitud de los Números Primos

El *teorema* que sigue corresponde a un problema clásico resuelto por Euclides hace aproximadamente 2300 años.

Teorema.

Existen infinitos números primos.

Prueba.
Procedamos por Reducción al Absurdo. Supongamos, por el contrario, que existe una cantidad finita de números primos: p_1, p_2, ..., p_k. Consideremos el número $b = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$.

la matemática de su época. Expuso la geometría a través de un sistema formal axiomático-deductivo.

Sabemos que b no es primo pues b es mayor que todo p_i. Como b no es primo, existe un número primo que divide a b, es decir, $b = p_j \cdot z$, donde p_j es uno de los primos listados y z es un número entero. Luego,

$$p_j \cdot z = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$$

de donde

$$p_j \cdot z - p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = 1$$

y como p_j es un factor del producto $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, podemos escribir que

$$p_j \cdot (z - p_1 \cdot p_2 \cdots p_{j-1} \cdot p_{j+1} \cdots p_k) = 1$$

esto implica que p_j divide a 1, lo cual es absurdo pues p_j debe ser mayor a 1. La contradicción viene de suponer que existe una cantidad finita de números primos.
En conclusión, existen infinitos números primos.

Si una propiedad puede ser probada *directamente*, es preferible esta prueba a una por *reducción al absurdo*, ya que la primera es "más constructiva" que la segunda.

Capítulo 3

El *Principio* de Inducción Completa

¿Cómo probar *todos* los *casos*?

Consideremos, por ejemplo, la *sucesión*

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Se observa que las sumas siguientes:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \to & 2, \\ 2 & \to & 2+4, \\ 3 & \to & 2+4+6, \\ 4 & \to & 2+4+6+8, \\ 5 & \to & 2+4+6+8+10, \\ 6 & \to & 2+4+6+8+10+12 \\ & \cdots & \end{array}$$

Verificar sólo algunos casos no constituye una prueba

Euler (1707-1783): matemático suizo influenciado en sus estudios por

se pueden representar respectivamente por los productos *1(2)*, *2(3)*, *3(4)*, *4(5)* y *5(6)*. Más aún, podemos verificar esto para muchas otras sumas de este tipo en la sucesión descrita. Estas relaciones permiten conjeturar que **la suma de los n primeros números pares mayores o iguales que *2* es igual a *n(n+1)***, *pero estas verificaciones no constituyen la prueba de ello*. Más aún, la verificación para las infinitas sumas que se generan es *experimentalmente imposible*.

Tiene sentido entonces preguntarse:

(a) *Comprobar que una relación vale para algunos casos (inclusive cuando esta cantidad es grande) ¿implica que ésta es válida para los infinitos los casos? y*

(b) *¿Cuántos casos deben comprobarse para garantizar la validez de la relación?*

los hermanos **Bernoulli** (Daniel y Nicolás). Su vasta obra matemática se estima en cuarenta volúmenes editados. Sistematizó y desarrolló el *Cálculo Infinitesimal*, estableció las ecuaciones fundamentales de la hidronámica, abordó problemas de balística, métodos en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, entre otros aportes. Es muy conocida la llamada relación de Euler: ***C+V=A+2***, donde C, V y A representan el número de *caras*, *vértices* y *aristas* de un *poliedro* cualquiera, respectivamente (aunque también se atribuye esta relación a **Descartes**). [Examine esto en una pirámide triangular, un paralelepípedo, etc., o bien en los denominados poliedros platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro].

Para responder a estas preguntas presentamos el siguiente ejemplo.

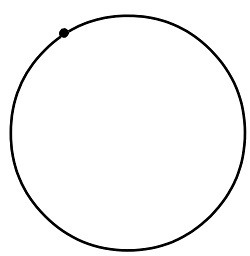
Estamos interesados en conocer la validez de la proposición: **Sea** *n* **un entero positivo, entonces** n^2+n+41 **es un número primo**. Supongamos que para ello vemos que se cumple para cada n entre *1* y *15*.

$$
\begin{array}{ll}
1^2+1+41=43 & 8^2+8+41=113 \\
2^2+2+41=47 & 9^2+9+41=131 \\
3^2+3+41=53 & 10^2+10+41=151 \\
4^2+4+41=61 & 11^2+11+41=173 \\
5^2+5+41=71 & 12^2+12+41=197 \\
6^2+6+41=83 & 13^2+13+41=223 \\
7^2+7+41=97 & 14^2+14+41=251 \\
 & 15^2+15+41=281 \\
 & \ldots
\end{array}
$$

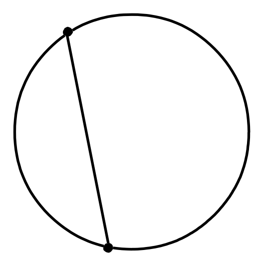
Y *concluimos* que la proposición es cierta apoyándonos en el hecho de que cada suma obtenida es un número primo. Incluso si probamos para $n=1, 2, 3, ..., 40,$ se obtienen primos. No obstante, $41^2+41+41$ no es primo pues *41* lo divide. Por tanto la proposición descrita es falsa.

Nota: el polinomio $\boldsymbol{n^2+n+41}$ fue propuesto por Euler.

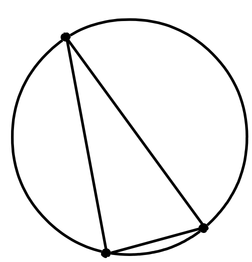
Otro ejemplo es el siguiente: Consideremos algunos círculos. En sus circunferencias representamos *1, 2, 3, 4, ...,* puntos y trazamos todos los segmentos que los unen. En cada caso contaremos el número máximo de regiones que se determinan.



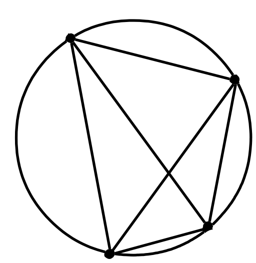
1



2



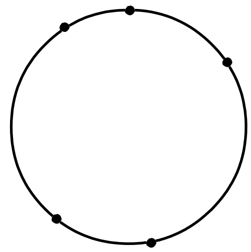
4



8

Las verificaciones de algunos casos particulares son de mucha ayuda para formular conjeturas. Sin embargo, no debemos apresurarnos para formularlas. Siempre es conveniente una exploración profunda del problema que abordamos

Hemos indicado, junto a cada gráfico, el número máximo de regiones que se determinan para *1, 2, 3* y *4* puntos sobre la circunferencia. Observe que $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$ y $8=2^3$. ¿Cuántas regiones se tienen para $n=5$?: ¿*16*? ¿Cuántas regiones se tienen para $n=6$?: ¿*32*? ¿Se cumple la regla "el número de regiones es igual que 2^{n-1}" (donde n es el número de puntos)?



¿Cómo se prueban este tipo de proposiciones? A través del método de demostración por *Inducción Completa*.

En los ejemplos presentados resulta imposible chequear todos los casos (pues son infinitos) y vimos, además, que las *generalizaciones* a partir de algunos casos pueden ser erróneas (como en los casos de *concluir* que el polinomio de Euler genera números primos y en el de las regiones en el círculo).

¿Cómo se establece entonces el valor de verdad de este tipo de proposiciones?

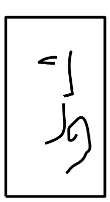
El método de demostración que lo permite se basa en el *Principio de Inducción Completa*, también conocido *como método de demostración por recurrencia,* que pasamos a describir.

El Principio de Inducción Completa

Este *principio* se apoya en el *Axioma del mínimo entero positivo* el cual citamos y utilizaremos en la demostración del Principio de Inducción Completa (Recíprocamente, es posible demostrar el *Principio del mínimo entero positivo* tomando como axioma el *Principio de inducción completa*).

□ Principio del Mínimo Entero Positivo.

Principio del Mínimo Entero Positivo (o de buen orden de los números naturales): **Un conjunto *S* no vacío *N*** (es decir, que posee al menos un elemento) **de números naturales tiene un elemento mínimo**. Este principio no se verifica en conjuntos como *Z*, *Q*, $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ ó $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in N\right\}$, etcétera.

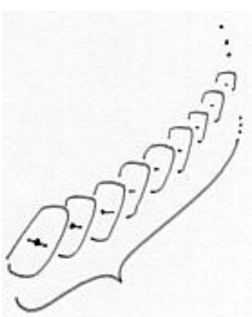


Exponga el lector otros conjuntos en los que no se verifique el *Principio del mínimo elemento*:

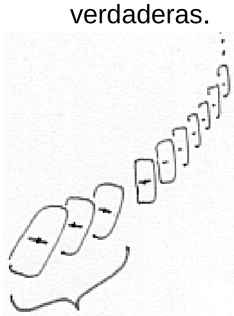
____

□ El Principio de Inducción Completa.

El Principio de Inducción Completa lo podemos ilustrar como sigue: Identifican-do la sucesión de proposiciones con una hilera de fichas de dominó. **Las fichas que caen representan a las proposiciones verdaderas**. Se pueden dar, entre otros, los siguientes casos:
(1) Todas las proposiciones son verdaderas



(2) Sólo algunas de las primeras proposiciones son verdaderas.



Principio de Inducción Completa.
Supongamos que

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$$

es una sucesión de proposiciones matemáticas que involucran un número natural n y verifican las condiciones:

(a) la proposición p_1 es verdadera y
(b) para cualquier k, si es verdadera p_k, también lo es p_{k+1}; entonces, todas las proposiciones de la sucesión dada son verdaderas, es decir, p_n es verdad para cualquier número natural n.

Prueba.
Debemos probar que dada una sucesión de proposiciones p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_n, ..., *que* verifican las condiciones (a) y (b), entonces p_i es verdadera para cualquier $i \in N$.
Supongamos lo contrario, esto es, que existe al menos un $i \in N$ para el cual p_i es falsa. Luego, el conjunto

$$\mathrm{I} = \{i \in N : p_i \ es \ \ falsa\}$$

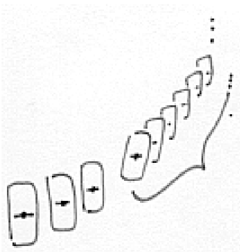
es no vacío y, por el Principio del buen orden en N, este conjunto posee un elemento mínimo que llamaremos m.
Como m es el mínimo de I, $m-1 \notin \mathrm{I}$, con lo cual p_{m-1} es verdad. Pero por la condición (b) debe suceder que

$$p_{(m-1)+1} = p_m \text{ es también verdadera,}$$

contradiciendo la afirmación de que p_m es falsa.
Esta contradicción proviene de suponer que “existe al menos un $i \in N$ para el cual p_i es falsa”. Por tanto, las proposiciones de la sucesión dada son verdaderas.

Dejamos como ejercicio asumir como axioma el principio de inducción completa y probar el principio del buen orden en los naturales. Por esta razón se dice que son principios *equivalentes*.

(3) Algunas de las primeras proposiciones no son verdaderas; sin embargo, a partir de una en particular las demás sí lo son.



Observación: Naturalmente no toda sucesión de proposiciones involucra a todos los números naturales, puede suceder que involucre los naturales a partir de un *m>1* o bien que involucre al cero. Los casos siguientes exponen cómo varía la *prueba*. (1) Cuando se desea probar que una proposición es cierta para los valores *n* mayores o iguales que un entero positivo *m*, la primera condición del *principio de inducción* queda así “la proposición p_m es verdadera” (en tal caso debemos probar que p_m es verdad). (2) También existen proposiciones que deben verificarse para todos los enteros no negativos *0, 1, 2, 3, ...,* con lo cual la primera condición queda “la proposición p_0 es verdadera” (y naturalmente debemos probar en primer lugar que p_0 es verdad). En los casos (1) y (2) la segunda condición no se altera. Exponemos ahora una prueba, aplicando el método de inducción completa.

> *Proposición.*
>
> La suma de los *n* primeros números pares mayores o iguales que *2* es igual a *n(n+1)*.

Prueba.
Debemos probar que se cumplen las condiciones (a) y (b).
El teorema también puede escribirse así:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \quad \forall\, n \in N.$$

i) Como $2 = 1(1+1)$ se verifica que p_1 es verdad [condición (a)].
ii) Supongamos que p_k es verdad, es decir, suponemos que

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = 2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$$

Debemos probar ahora que p_{k+1} también es verdad, esto es, que

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i = 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)\,.$$

En efecto:

$$\underbrace{\left[2+4+6+\cdots+2k\right]}+2(k+1) = \underbrace{k(k+1)}+2(k+1)$$

HIPOTESIS INDUCTIVA

$$\begin{aligned} &= (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+1+1) \\ &= (k+1)((k+1)+1) \end{aligned}$$

Por tanto, p_{k+1} es verdad. Esto muestra que la condición (b) también se cumple. Entonces $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ es cierta para todo $n \in N$.

Veamos otro ejemplo *elemental*.

Supongamos que deseamos hallar una fórmula para la **suma de los *n* primeros números naturales** $1+2+3+4+\cdots+n$. Para ello nos apoyamos en la tabla anexa: ¿Existe una función que establece las asociaciones *1→1, 2→3, 3→6, 4→10, 5→15, 6→21, ...?*

$$\sum_{i=1} i = ?$$

$n=1$	1
$n=2$	$1+2 = 3$
$n=3$	$1+2+3 = 6$
$n=4$	$1+2+3+4 = 10$
$n=5$	$1+2+3+4+5 = 15$
$n=6$	$1+2+3+4+5+6 = 21$
$\dots$	

Observe que cuando n toma los valores *1, 3, 5* y *7*, basta multiplicar a *n* por *1, 2, 3* y *4* respectivamente. Y cuando *n* es *2, 4* ó *6*, necesitamos multiplicar por $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{4}$ y $\frac{21}{6}$, respectivamente, que son equivalentes

El lector puede ampliar esta tabla considerando otros valores de *n*.

	n		$f(n)$
1	1	$\to$	1
$\frac{3}{2}$	2	$\to$	3
2	3	$\to$	6
$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$	4	$\to$	10
3	5	$\to$	15
$\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$	6	$\to$	21
4	7	$\to$	28

a $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{7}{2}$ (ver la tabla adjunta).

Observe que 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3 y $\frac{7}{2}$ tienen la forma $\frac{(n+1)}{2}$.

Con estas relaciones se puede exponer una función *candidata* (lo que representa nuestra *conjetura*) para la suma de *n* primeros números naturales:

$$n \to \frac{n(n+1)}{2}$$

Ahora probaremos por inducción que esta función "vale" para cualquier $n \in N$.

> *Proposición.*
>
> La suma de los *n* primeros números naturales $1+2+3+4+\cdots+n$ está dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Prueba.
Estructuraremos la prueba en dos partes (veremos que se cumplen las condiciones (a) y (b).

i) p_1 es verdad pues $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

ii) Supongamos que p_k es verdad, es decir, que

$$1+2+3+4+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Y veamos que p_{k+1} es verdad. Para ello debemos ver que la suma de los *k+1* primeros enteros positivos es $\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.

En efecto:

$$\underbrace{[1+2+3+4+\cdots+k]}_{\textit{HIPOTESIS}} + (k+1) = \underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_{\textit{INDUCTIVA}} + (k+1)$$

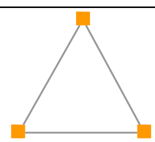
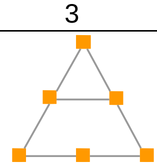
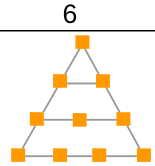
$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Lo que queríamos probar. Entonces, la regla vale para todo *n* en *N*.

Los números de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$, $\forall\, n \in N^*$ *(1,3,6,10...)* guardan relación con los denominados **números poligonales**, en particular con los **triangulares (NT)**. Estos últimos se obtienen a partir de las construcciones geométricas que siguen:

O	**NT**
1	 1
2	 3
3	 6
4	 10

O = Orden

Además de los triangulares, se encuentran los números **cuadrados**, **pentagonales**, **hexagonales**, **heptagonales**, etc. (todos ya conocidos por los

Pitagóricos). Los números poligonales tienen la forma $n+\frac{n(n-1)b}{2}$, con $b=1,2,3,...$

Veamos el siguiente ejemplo.
Dada la suma

$$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n!$$

con $n \in N$, **debemos obtener (si existe) una fórmula para S_n.**

> *Nota.*
> Sea *x* un entero no negativo, recuerde que $x!$ ("*x* factorial" o bien "factorial de *x*"), se define como sigue:
>
> $$x! = \begin{cases} 1 \;\; si\ x=0 \\ x(x-1)(x-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \;\; si\ x \geq 1. \end{cases}$$

Nos apoyaremos en los cálculos que siguen para plantear nuestra conjetura.

$$\begin{array}{ll} n=1 & S_1 = 1\cdot 1! = 1 \\ n=2 & S_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! = 5 \\ n=3 & S_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! = 23 \\ n=4 & S_4 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! = 119 \\ \ldots & \end{array}$$

Plantear una hipótesis en este tipo de problemas [tal como el referido a encontrar la forma que tienen los términos S_n] no siempre es tarea sencilla.

¿Qué función se comporta de esta forma? *La función $x!$ nos da una idea de ello*. Observe que cuando *x=1, 2, 3, 4 y 5*; $x!$ toma los valores *1, 2, 6, 24* y *120*, respectivamente. *2, 6, 24* y *120* exceden en *1* a S_1, S_2, S_3 y S_4. Necesitamos además que cuando *n* sea *1*, *x* sea *2*; si n es *2*, *x* debe ser *3*, etc. Este *ajuste* lo logramos así:

$$\begin{array}{l} S_1 = 1 = (1+1)!-1 \\ S_2 = 5 = (2+1)!-1 \\ S_3 = 23 = (3+1)!-1 \\ S_4 = 119 = (4+1)!-1 \\ \ldots \end{array}$$

Con esta idea planteamos una hipótesis para cualquier *n*:

$$S_n = (n+1)!-1$$

> *Proposición.*
>
> $$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)!-1.$$

Isaac Newton (1642-1727). Nació en Inglaterra. Fue profesor de la Universidad Trinity College (Cambridge) a los 26 años (estudió en ella misma desde los 18 años). Sus investigaciones representan la culminación de la *Revolución Científica*. Es autor de la teoría sobre la *gravitación universal*. Es considerado junto a Leibniz "descubridor" del *cálculo infinitesimal* (lo que al parecer se sucedió en la misma época e independienteme n-te). Su obra principal (1687) es *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural), precisando en ella la existencia de la *gravitación universal*.

Prueba.
Ya vimos que la proposición es cierta para *n=1* [se verifica la condición (a)]. Probemos que se verifica también la condición (b):
i) Supongamos que para un $k \in N$, S_k es verdad, esto es, suponemos que

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + k! = (k+1)! - 1.$$

ii) Resta ver que de la verdad de S_k se deriva la verdad de S_{k+1}:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&= ((k+1)! - 1) + (k+1)\cdot(k+1)!\text{, por hipótesis inductiva} \\
&= (k+1)! + (k+1)\cdot(k+1)! - 1 \\
&= (k+1)!(1+(k+1)) - 1 \\
&= (k+1)!(k+2) - 1 \\
&= (k+2)(k+1)(k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 - 1 \\
&= (k+2)! - 1 \\
&= ((k+1)+1)! - 1
\end{aligned}$$

Lo que queríamos probar. Entonces, la proposición vale para cualquier *n* en *N*.

Proposición.

El Binomio de Isaac Newton.
Dado un binomio *a+b*, el desarrollo de sus potencias enteras está determinado por la regla siguiente:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

con $0 \le k \le n$.

Prueba.
Para *n=1* tenemos que
$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^{1-0} y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 = x + y = (x+y)^1$, entonces p_1 es cierta.
Supongamos que p_a es cierta, esto es, que

$$(x+y)^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^{a-k} y^k$$

Y probemos que vale para *n=a+1*. Para ello debemos ver que el desarrollo de $(x+y)^{a+1}$ tiene la forma que determina la sumatoria $\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a+1}{k}x^{a+1-k}y^k$.

En efecto:

$$(x+y)^{a+1}=(x+y)^a(x+y)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}x^{a-k}y^k\right)(x+y)\text{, por hipótesis inductiva}$$

$$=\left(\binom{a}{0}x^a+\binom{a}{1}x^{a-1}y+\binom{a}{2}x^{a-2}y^2+\cdots+\binom{a}{a-1}xy^{a-1}+\binom{a}{a}y^a\right)(x+y)$$

$$=\binom{a}{0}x^{a+1}+\binom{a}{1}x^a y+\cdots+\binom{a}{a-1}x^2y^{a-1}+\binom{a}{a}xy^a+$$

$$+\binom{a}{0}x^a y+\binom{a}{1}x^{a-1}y^2+\cdots+\binom{a}{a-1}xy^a+\binom{a}{a}y^{a+1}$$

$$=\binom{a}{0}x^{a+1}+\left[\binom{a}{0}+\binom{a}{1}\right]x^a y+\cdots+\left[\binom{a}{a-1}+\binom{a}{a}\right]xy^a+\binom{a}{a}y^{a+1}$$

$$=\binom{a+1}{0}x^{a+1}+\binom{a+1}{1}x^a y+\cdots+\binom{a+1}{a}xy^a+\binom{a+1}{a+1}y^{a+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a+1}{k}x^{a+1-k}y^k .$$

Lo que queríamos probar.

Discuta con el grupo.

En la prueba se utilizaron las siguientes propiedades:

(1) $\binom{a}{0}=\binom{b}{0}$

(2) $\binom{a}{a}=\binom{b}{b}$ y

(3) $\binom{a+1}{k}=\binom{a}{k-1}+\binom{a}{k}$

Dejamos al lector la tarea de probar (1) y (2): ¿Cómo se puede expresar $\binom{a}{0}$? ¿Y $\binom{b}{0}$?

Veamos que se cumple (3).

Prueba.

Sabemos que $\binom{a+1}{k}=\dfrac{(a+1)!}{k!(a+1-k)!}$. Por otra parte,

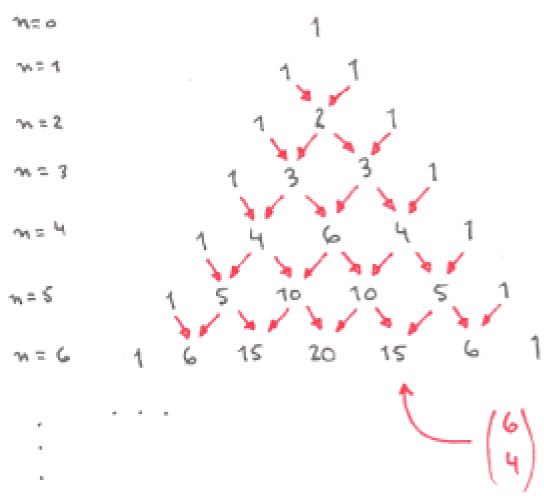
Blaise Pascal (1623-1662) nace en Francia, Clermont. Es hijo de **Étienne Pascal** (geómetra) quien se encargó de ofrecerle una esmerada educación, incluso asiste con su padre a las reuniones que éste sostenía con **Pierre de Fermat**, **Descartes** y otros, convocadas por **Marin Mersenne**. Ya a los 16 años publica un primer ensayo sobre cónicas (1640); su obra no se limita a las *ciencias*, también se dedica a la *filosofía* y *letras*.

Observe que en la primera fila del Triángulo colocamos el 1, en la segunda y siguientes, se coloca un 1 al principio y al final de cada fila, y los demás términos se obtienen sumando los dos términos "que están sobre él" en la fila superior.

$$\binom{a}{k-1}+\binom{a}{k}=\frac{a!}{(k-1)!(a-(k-1))!}+\frac{a!}{k!(a-k)!}$$
$$=\frac{ka!+(a-k+1)a!}{k!(a+1-k)!}$$
$$=\frac{a!(a+1)}{k!(a+1-k)!}$$
$$=\frac{(a+1)!}{k!(a+1-k)!}.$$

Esto completa la prueba.

Los números combinatorios $\binom{n}{k}$ son precisamente los términos del ***Triángulo* de Pascal o de Tartaglia** (ver la tabla adjunta) [Llamado así por la forma en que se disponen sus términos. Diversos autores atribuyen este *triángulo* tanto a **Pascal** como a **Tartaglia**; aunque ya era conocido por los chinos]. Éste se *construye* disponiendo filas de la siguiente forma: la fila *0* consta de un solo término, el *1*, la fila *1* y siguientes tienen unos a los extremos y los demás términos son la suma



de los dos dispuestos sobre éste en la fila anterior. Esta regla que está dada por la propiedad (3) que probamos párrafos atrás:

$$\binom{a+1}{k}=\binom{a}{k-1}+\binom{a}{k}$$

Aquí $\binom{a+1}{k}$ representa el *k+1-ésimo* término (contando desde *0*) de la fila *a+1* del *triángulo*.

Por ejemplo:

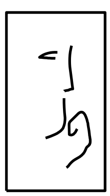
Tartaglia (Nicola Fontona, 1500-1557). Matemático italiano. Halló un método para la resolución por radicales de la *ecuación de tercer grado* y aplicó la matemática a la *artillería*.

$$\binom{6}{4}=\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$$

Es decir, *15=10+5*.
Así los coeficientes de los términos del desarrollo del binomio $(x+y)^n$ están dados por la fila *n* del *Triángulo* de Pascal o de Tartaglia.

Otras propiedades de este *triángulo*, como la simetría con respecto al eje vertical o la de la suma de los elementos de una fila, se proponen como actividades.

A1: Para todo *k*, $0 \leq k \leq n$, se verifica que $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.



A2: La suma de los términos de la fila *n*-ésima del *Triángulo* de Pascal o de Tartaglia es 2^n.

FILA	TÉRMINOS DE LA *N-ÉSIMA* FILA	SUMA	*FORMA* DE LA SUMA
0	1	1	$2^0=1$
1	1 1	2	$2^1=2$
2	1 2 1	4	$2^2=4$
3	1 3 3 1	8	$2^3=8$
4	1 4 6 4 1	16	$2^4=16$
5	1 5 10 10 5 1	32	$2^5=32$
6			¿2^6?
7			¿2^7?
8			¿2^8?

Este problema guarda relación con el número de subconjuntos que están contenidos en un conjunto con un número finito de elementos. Sugerimos al lector completar la tabla adjunta para explorar esta propiedad. Al conjunto que no posee elementos le asociamos *n=0*, al que posee un solo elemento le asociamos *n=1*, etc.

En el capítulo "Teoría de Conjuntos" se retomará este problema.

Hay problemas que tienen que ver con la divisibilidad de números enteros que también pueden ser abordados con el método de inducción completa.

¿Es *133* un divisor de $11^{n+2}+12^{2n+1}$, para cualquier n$\in$N?

Este hecho lo podemos simbolizar así: $133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1},\ \forall n \in N$ (que se lee: *133 divide a* ...).

133 divide a $11^{n+2}+12^{2n+1}$, $\forall n \in N$.

Proposición.

$$133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1},\ \forall n \in N .$$

Prueba.

Para *n=0* se tiene que $11^{0+2}+12^{2(0)+1}=11^2+12^1=133$, entonces $133 \mid 11^2+12^1$. [Para n=1, vemos que 133 es un factor de 11^3+12^3; en efecto: $11^{1+2}+12^{2(1)+1}=11^3+12^3=1331+1728=3059=133\cdot 23$. Entonces, $133 \mid 11^3+12^3$]

Supongamos que para *n=k*, $133 \mid 11^{k+2}+12^{2k+1}$ (ésta es nuestra HIPOTESIS INDUCTIVA).

Veamos que $133 \mid 11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}$:

$$\begin{aligned}
11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1} &= 11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}\\
&= 11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}\\
&= 11\cdot 11^{k+2}+(133+11)\cdot 12^{2k+1}\\
&= 11\cdot 11^{k+2}+133\cdot 12^{2k+1}+11\cdot 12^{2k+1}\\
&= 11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}\\
&= 11\cdot 133\cdot p+133\cdot 12^{2k+1},\ \text{por hipótesis}\\
&\qquad \text{(ya que si } 133 \mid 11^{k+2}+12^{2k+1}\text{, entonces}\\
&\qquad \exists p \in Z : 11^{k+2}+12^{2k+1}=133\cdot p\text{)}\\
&= 133\cdot(11\cdot p+12^{2k+1})
\end{aligned}$$

Y como $11\cdot p+12^{2k+1}\in Z$, entonces

$$133 \mid 11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}$$

Expréselos como múltiplos de *133*.

Por tanto, la proposición $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $\forall n \in N$.

Los primeros *10* términos de la sucesión son:

n=0 *133*
n=1 *3.059*
n=2 *263.473*
n=3 *35.992.859*
n=4 *5.161.551.913*
n=5 *743.027.857.859*
n=6 *106.993.419.737.953*
n=7 *15.407.023.932.534.059*
n=8 *2.218.611.132.677.861.593*
n=9 *319.479.999.655.934.597.459*
...

Actividades y Proyectos

Para ello, complete primero una tabla. Esto facilitará la formulación de conjeturas. Aplique esto, también, en los problemas que siguen.

B1: ¿Qué divisor(es) común(es) tiene $n^2 + n$, con *n=1, 2, 3, 4, ...*? Plantee una conjetura y verifique su veracidad.

n	$n^2 + n =$	DIVISORES DE $n^2 + n$	CONJETURA
1	$1^2+1=2$	1,2	
2	$2^2+2=6$	1,2,3,6	
3	$3^2+3=12$	1,2,3,4,6,12	
4	$4^2+4=20$	1,2,3,4,5,10,20	
5			
6			
7			
8			

Un ERROR al aplicar el Principio de Inducción puede deberse a no verificar la condición (a).

B2: Un *error* en la aplicación del Principio de Inducción puede ser causado por la omisión de la verificación o prueba de que se cumple la condición (a). Expongamos un caso como alerta al lector.
Supongamos que deseamos probar que:

Proposición.
$3^k - 1 > 3k$ para k>0.

Prueba (?).
Supongamos que para k=j es cierto que $3^j - 1 > 3j$.
Veamos que la proposición p_{j+1} también es cierta; esto es, debemos probar que $3^{j+1} - 1 > 3(j+1)$:

$3^j > 3j + 1$ por hipótesis inductiva

$3^j + 3^j + 3^j > 3j + 1 + 3$ ¿Por qué sumar $3^j + 3^j$ del lado izquierdo y 3 en el segundo?
¿Por qué no se altera la desigualdad?

____

____

____

$3 \cdot 3^j > 3j + 1 + 3$

$3^{j+1} > 3j + 1 + 3$ con lo cual

$3^{j+1} - 1 > 3(j+1)$.

Proponemos al lector encontrar ejemplos de proposiciones falsas para algunos valores de *n* y ciertas para infinitos valores de *n.* Discuta sus ideas con el grupo.

Ahora, de concluir que "$3^k - 1 > 3k$ es cierto para k>0" se caería en un *error*, ¿por qué?
Observe que cuando k es 1, $3^k - 1 = 2$ y $3k$ es 3, pero 2 no es mayor que 3. Es decir, la proposición p_1 es falsa y no se verifica la "condición (a)" para aplicar el principio de inducción.
Entonces, la *condición (b)* no garantiza por sí sola que p_n sea cierta para cualquier número natural n.

B3: En los siguientes *problemas* ya se expone una conjetura en cada caso. *Examine* cada una y, de ser ciertas, demuéstrelas por el *Método de Inducción Completa*; de ser falsas, presente un *contraejemplo*, esto es, exponga un caso en que la proposición dada no se verifica. Si debemos estudiar la proposición "$f(n) = 2^{2^n} + 1$ es primo, $\forall n \in N$" (Una de las conjeturas de Fermat), podemos, tal como hizo Euler, exponer que $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ (con lo cual $f(5)$ es compuesto), y con ello probar que $f(5)$ no es primo y, por tanto, la conjetura de Fermat es falsa; este es precisamente el papel de los contraejemplos.

En estos problemas es muy importante explorar la proposición que se da a través de cálculos para algunos casos y organizándolos en tablas. Esto, quizás más que la aplicación del método, permite desarrollar ideas matemáticas.

Observe que: $f(0)=3$, $f(1)=5$, $f(2)=17$, $f(3)=257$ y $f(4)=65537$ son todos primos.

Entonces, exponer un contraejemplo para una varias de las proposiciones que siguen, en caso de que los haya, significa encontrar un caso, para un *n* en particular, en que la proposición sea falsa.

(a) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \frac{n}{6}(n^2+1)$

(e) $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n-1)$

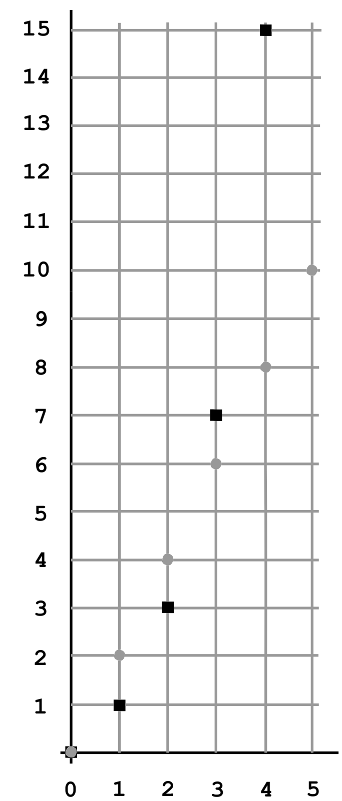
(f) $\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$

(g) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

Hemos representado en el plano algunos valores de $2^n - 1$ y de *2n*. Los puntos que corresponden a $2^n - 1$ se indican con ■ y los que corresponden a *2n* con ●.

Pruebe la conjetura dada por el Método de Inducción Completa.

B4: ¿Para qué números naturales *n* se cumple la desigualdad $2^n - 1 > 2n$?



Gráficos de $2^n - 1$ y de *2n*, $n \in N$

n	$2^n - 1$	*2n*
0	0	0
1	1	2
2	3	4
3	7	6
4	15	8
5	31	10
6		
7		
8		

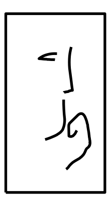
Observe que para *n=0*, $2^0 - 1 = 2(0)$.
Para *n=1* y *n=2*, $2^n - 1$ no es mayor que *2n*. Sin embargo, para $n \geq 3$ el gráfico permite conjeturar que $2^n - 1 > 2n$.

B5: Considere la suma de *3* enteros positivos cualesquiera:

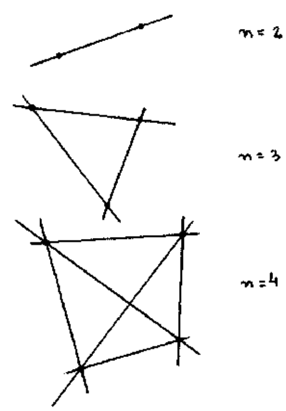
$$a+(a+1)+(a+2)$$

y explore qué divisor tienen en común al variar *a* en Z^{+}. Pruebe su conjetura aplicando inducción sobre *a*.

Con dos puntos se determina *1* recta, con tres puntos no colineales (*nc*) se determinan *3* rectas, con cuatro puntos (*nc*): *6* rectas, ...



B6: El gráfico adjunto indica el número de rectas distintas determinadas por *2, 3* y *4* puntos no colineales (que no se encuentran en una misma recta) del plano: *1, 3* y *6* rectas, respectivamente. *Amplíe la tabla* y *conjeture* cuántas rectas distintas quedan determinadas con *n* puntos no colineales del plano.

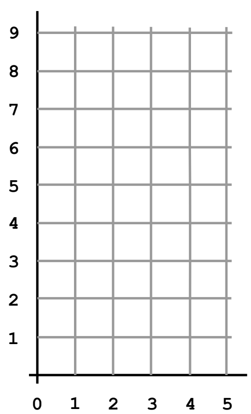


Pruebe su(s) conjetura(s) o refútelas a través de contraejemplos.

Para la propiedad expuesta en B7, resulta más extensa su prueba si se sigue el Método de Inducción Completa. ¿Qué idea puede aplicarse? Discuta con el grupo.

B7: ¿Qué divisores comunes tienen los términos de la forma $5^n - 1$, $n \geq 1$? Si se factoriza $5^n - 1$ (observe que tiene la forma a^n-b^n).

Construya un gráfico que permita explorar las proposiciones contenidas en B8.



B8: ¿Es $2^n < n^2$, $\forall n \in N^*$? ¿$2^n > n^2$, $\forall n \in N^*$?

n	*2n*	n^2	CONJETURA
1	*2*	*1*	
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Fibonacci es en realidad una contracción que significa “hijo de Bonacci”), que es por la que se conoce a **Leonardo de Pisa** (1175-1250), destacado matemático de la Edad Media. En su más afamado libro *“Liber Abaci”* (1202, conocido por su segunda versión de 1228) expone un problema que sigue el esquema de la *sucesión de Fibonacci*: **un hombre con una pareja de conejos cuyos hábitos reproductivos (y los de su descendencia) son que al segundo mes de edad procrean una pareja, se pregunta ¿cuántas parejas tendrá en un año?** Este problema motivó el estudio de los números de Fibonacci.

Sucesión de Fibonacci

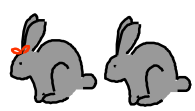
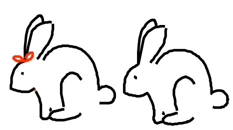
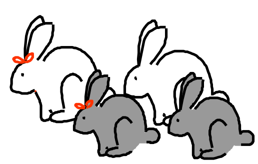
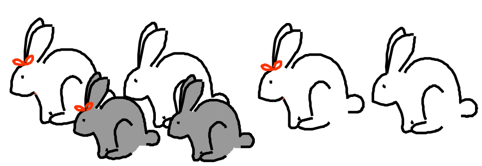
La sucesión ***1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...***, recibe el nombre de *Sucesión de Fibonacci*. Observe que sus dos primeros términos son unos (esto es, $u_1=1$ y $u_2=1$) y cada uno de los siguientes está determinado por la suma de los dos que le preceden, es decir:

$$u_{n+1}=u_{n-1}+u_n, \text{ para } n\geq 2$$

El problema de los conejos de Leonardo de Pisa:

Un hombre tiene una pareja de conejos que se reproduce de acuerdo a la siguiente regla:
(1) Los conejos al primer mes son jóvenes;
(2) Al segundo mes son adultos y;
(3) Al siguiente mes, procrean una pareja. Su descendencia también sigue esta regla.

¿Cuántas parejas tendrá en un año?

	PAREJAS DE CONEJOS	*Nº de PAREJAS*
	 Nuestra primera pareja es joven (en GRIS).	***1***
1er mes	 Pasado un mes es adulta (en BLANCO).	***1***
2º mes	 En este mes procrean una pareja (siempre una hembra y un macho).	***2***
3er mes	 La primera pareja procrea una nueva pareja y la pareja joven del mes anterior ahora es adulta. Observe que esta última podrá procrear desde el mes siguiente.	***3***

Dejamos al lector la tarea de determinar cuántas parejas de conejos se tendrán para el 4º, 5º y 6º mes. Discuta con el grupo sus resultados.

Observe que el número de parejas en cada mes coincide con la Sucesión de Fibonacci.

Los términos de esta sucesión *representan* una variedad de fenómenos en la *naturaleza,* entre ellos: El número de espirales a izquierda y a derecha en un girasol es *34* y *55*, respectivamente, dos términos consecutivos de la *Sucesión de Fibonacci*.

Verifique para algunos casos particulares cada una de las propiedades que siguen y luego *pruébelas*:

La suma de los primeros *n* términos de la sucesión de Fibonacci es igual a la diferencia entre el término de orden *n+2* y el *1*. Por ejemplo: *1+1+2+3=8-1*. Observe que *1+1+2+3* es la suma de los primeros *4* términos y el *8* es precisamente el *6º* término.

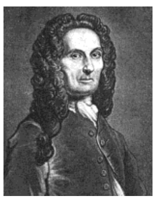
(1) $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_{n+2} - 1, \ \forall n \in N^*.$

Y además que:

(2) $u_n \mid u_{nm}$ (u_n “divide a” u_{nm}) para todo par *n* y *m* de números naturales.

(3) $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$.

(4) Para *m>1* y *n>1*, $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$.



Abraham de Moivre (1667-1754): matemático francés nacido en *Vitry le Francois*. Publicó *Doctrina del azar* (1718), *Miscelánea analítica* (1730), entre otras obras.

C1: Probar el conocido *Teorema de De Moivre*:

$$\left(r(\cos\sigma + isen\sigma)\right)^n = r^n(\cos n\sigma + isenn\sigma)$$

$\forall n \in N^*$.

Observación: Recuerde que si *z* es un número complejo y *n* es un entero positivo, entonces al número complejo *w* se le llama **raíz *n-ésima* de** *z* si $w^n=z$. Por otra parte, **todo número complejo distinto de cero tiene *n* raíces *n-ésimas* diferentes**.

La suma de los ángulos internos de un polígono de *n* lados es: *(n-2)180º*.

C2: Probar que la suma de los *ángulos internos* de un *polígono* de *n* lados es

(n-2)180º

Observación: Naturalmente la prueba inductiva se hace para *n≥3* (esto es, consideramos al *triángulo*, *cuadrilátero*, etc.) Para probar que se cumple la *condición (a)*, debemos verificar que la suma de los ángulos internos de un triángulo (*n=3*) es *(3-2)180º=180º*. Esto es muy conocido *desde* el bachillerato, pero poco se conoce (en este nivel) su demostración. La exponemos aquí a manera de referencia y como fuente de "sugerencias" (especialmente las que tienen que ver con el apoyo en representaciones gráficas) para probar la *condición (b)* (que dejamos al lector).

Veamos:

Proposición.

La suma de los ángulos internos de un triángulo (*n=3*) es

$$(3-2)180^o=180^o$$

Nota: esta proposición es cierta en la *geometría euclídea*, sin embargo, no es cierta en las geometrías *hiperbólica* y *elíptica*. En la geometría euclídea, como sabemos, se tiene como axioma que “Por un punto X pasa una única recta G paralela a una recta H”; en cambio, en la geometría hiperbólica se asume que “Por X pasa más de una recta paralela a H” y, en la elíptica, que “Por X no pasa ninguna recta paralela a H”. Dejamos como temas de investigación y discusión al grupo la historia de estas geometrías, así como su consistencia.

Prueba. Condición (a)
En la figura adjunta α_1, α_2 y α_3 representan la medida de los ángulos internos de un triángulo de vértices A, B y C (Figura *1*).

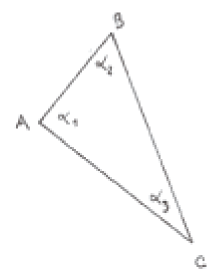


Figura 1

Como sabemos que dada una recta y tres puntos en ella P, P´ y P´´, con P´ *entre* P y P´´, la medida del ángulo PP´P´´ es 180º, orientaremos la prueba a ver que la suma de α_1, α_2 y α_3 es un ángulo de este tipo. (1)
Con esta idea hacemos las siguientes *construcciones*, representadas en las Figuras *2* y *3* [*l, m* y *n* son las rectas que contienen a los lados del triángulo].
Consideremos la intersección de las rectas *m* y *n*, es este punto los *ángulos opuestos* tienen la misma medida (Figura *2*).

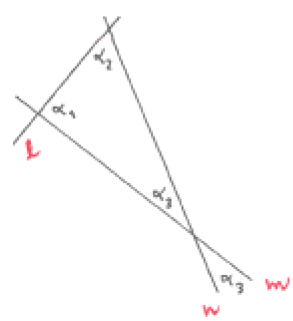


Figura 2

Ahora tracemos por C una recta paralela a *l*, que etiquetamos con *l´*. Como *m* y *n* intersecan a las rectas paralelas *l* y *l´*, entonces los ángulos alternos internos tienen la misma medida (ver la Figura *3*). Por lo tanto:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180^o, \text{ por lo descrito en (1).}$$

Nota: sabemos que dada una recta y tres puntos en ella P, P´ y P´´, con P´ *entre* P y P´´, la medida del ángulo PP´P´´ es *180º*. Es decir, se verifica p_1.

La proposición es cierta para *n=3*.

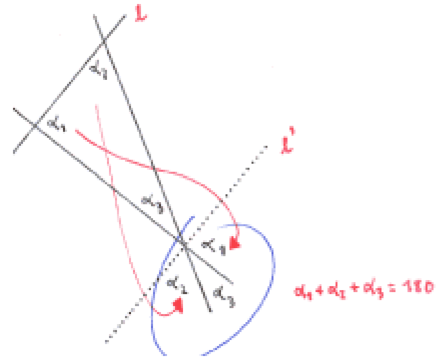


Figura 3

Pruebe ahora el lector que se cumple la *condición (b)*.

□ Sobre proposiciones falsas.

C3: De haber realizado todas las actividades de este apartado *indique cuál (o cuáles) de las proposiciones expuestas en esta sección es (son) FALSA (S)*. Discuta con el grupo.

Otros *Proyectos*

D1: *La Sucesión de Fibonacci "en espiral"*

Ordenemos los primeros n^2 números de la *Sucesión de Fibonacci* en una especie de espiral dentro de una tabla como muestran los ejemplos expuestos (para *n=3, 4* y *5*).

Observe que para *n=3*, la suma *21+1* es un múltiplo de *8+3*, para *n=4*, *5+610* es múltiplo de *34+89* y, curiosamente, 46368+55 también es múltiplo de los números dispuestos en los cuadros adyacentes al número de la esquina opuesta. Puede chequear si esto se cumple para otros valores de *n*.
¿Qué número cree debe multiplicarse por una de las sumas para obtener la otra suma? Note que en los casos anteriores eran *2*, *5* y *13*, respectivamente. **¿Y para** *n=7***?** Ahora **formule una *conjetura* para el caso general, demuéstrela** (no necesariamente por inducción) **o encuentre un contraejemplo**.

n=3

5	3	2
8	1	1
13	21	34

2(8+3)=21+1

n=4

987	610	377	233
5	3	2	144
8	1	1	89
13	21	34	55

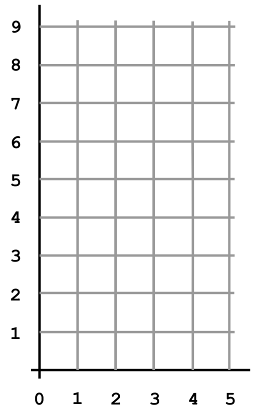
5+610=5(34+89)

n=5

1597	987	610	377	233
2584	5	3	2	144
4181	8	1	1	89
6765	13	21	34	55
10946	17711	28657	46368	75025

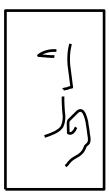
13(2584+987)=46368+55

Para ello, apóyese en tablas de valores o en gráficos construidos en el *Plano*.



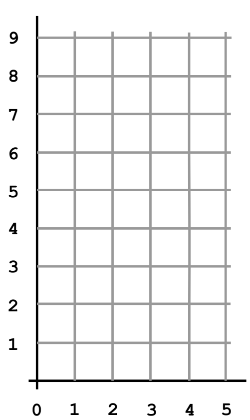
D2: *Construyendo conjeturas para la suma de términos*

(a) Estudie, en primer lugar, la forma de los términos $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\forall n \in N^*$, considere su suma y construya una conjetura para ésta. Luego, compruebe su conjetura: si es falsa, muestre un contraejemplo, si es cierta, exponga su prueba por inducción completa.



Construya una tabla en la que se organicen los cálculos como apoyo para formular su(s) conjetura(s).

(b) Considere ahora la suma de términos de la forma $\dfrac{1}{n(2n+2)}$ para $n \geq 1$ y realice la misma actividad descrita en (a).



Lecturas recomendadas

Cotlar M. y Sadosky, C. (1962). *Introducción al álgebra*. Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Gentile, E. (1985). *Aritmética elemental*. Washington, DC: Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Moore, J. (1962). *Elements of abstract algebra*. New York: The Macmillan Company.

Sominski, I. (1972). *El método de la inducción matemática*. México: Limusa. (Original en ruso de 1959).

Vorobyov, N. (1963). *The fibonacci numbers*. The University of Chicago. (Traducción y adaptación al inglés de la 1ª edición rusa (1951) por Whaland Norman, Jr., y Titelbaum Olga).

Georg Cantor (Ruso) inicialmente estudió ingeniería por orientación de sus padres y luego se interesó por las matemáticas. Trabajó acerca del número real, su teoría de los números irracionales (1872) contribuyó en este campo junto con las de **Weierstrass**, **Méray** y **Dedekind**. **Cantor** desarrolló su teoría en una serie de memorias publicadas entre 1874 y 1884, y luego, desde 1887 hasta 1897. El "intermedio" *se cree* fue causa de una enfermedad nerviosa producto de la crítica de matemáticos alemanes muy conocidos y de sus intentos por demostrar la "hipótesis del continuo". Este formidable matemático y catedrático de la

Capítulo 4

Teoría de Conjuntos

Desde la Educación Básica hemos estudiado **conjuntos**: el de los números naturales (N), enteros (Z), racionales (R), irracionales (I), reales (R) y complejos (C), así como operaciones y propiedades de sus elementos. En la vida cotidiana también hacemos uso frecuente de la noción de conjunto. Muchas veces organizamos cosas y hechos basándonos en las propiedades que poseen. En este capítulo estudiaremos los conjuntos, las operaciones que podemos definir entre ellos (no entre sus elementos) y sus propiedades.

Georg Cantor (1845-1918) es considerado el "padre" de la *Teoría de Conjuntos*, sus ideas se encontraron por delante de su tiempo e incluso levantaron muchas controversias entre los matemáticos de su época (y posteriores a ella), derivando en lo que algunos llaman "crisis conjuntista" (o crisis de la teoría de conjuntos). El impacto de esta teoría se extendió a todas las matemáticas por varias razones: trajo a primer plano las cuestiones sobre el *infinito* en matemática (alejado de planteamientos *metafísicos y filosóficos* y de aversiones contra el uso en matemáticas de *magnitudes infinitas* como planteaba Gauss en sus cartas a Cantor), la importancia en sí de sus conceptos y su uso como lenguaje en las distintas áreas de las matemáticas.

Nota: Para **Gauss** el infinito era "una manera de decir" y "su verdadero significado es el de un límite al cual se acercan indefinidamente ciertas razones cuando otras aumentan sin restricción". Sin embargo, **Cantor** le responde distinguiendo entre *infinito potencial* ("magnitud finita variable que crece más allá de todo límite finito") e *infinito actual* ("magnitud fija, constante, que se mantiene más allá de todas las magnitudes finitas") y señala que el extendido *horror infiniti* entre los científicos (rechazo del *infinito actual*) "no deja de ser una violación de la naturaleza de las cosas, que han de tomarse como ellas son".

Universidad de Halle (desde 1869) pasó sus últimos días en un psiquiátrico.

Richard Dedekind matemático alemán (6-10-1831, 12-2-1916) conocido por su estudio de la *continuidad* y la *definición de los números reales* por los *"cortes de Dedekind"* o "*Cortaduras de Dedekind"*, sobre naturaleza de los números e inducción matemática, conjuntos finitos e infinitos, números algebraicos. Sus ediciones de los trabajos de **Dirichlet**, **Gauss** y **Riemann** le condujeron a estudiar campos de números algebraicos, ideales y anillos.

Una primera *idea* de CONJUNTO

Sugerimos al lector exponer la idea que tiene del término "conjunto", así como algunos ejemplos:

____

____

____

____

____

____

____

____

¿Qué es un conjunto? Para Cantor un conjunto es el:

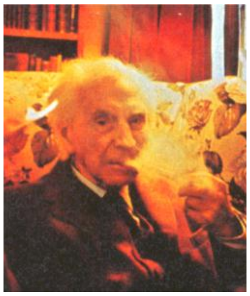
"Agrupamiento de un todo de objetos bien definidos, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento".

Para Dedekind un conjunto **"es un saco lleno de elementos"**. Estas definiciones dejaban mucho lugar a la *intuición*, de hecho, no tardaron en surgir las famosas **antinomias** o **contradicciones** (también llamadas **paradojas**) en la teoría de conjuntos, lo que llamó la atención de notables matemáticos, lógicos y filósofos de la época y derivó en **axiomáticas** para esta teoría (que alejaban de su seno estas antinomias o contradicciones).
Antes de estudiar algunos conjuntos notables, operaciones y propiedades expondremos algunas antinomias.

Paradojas en la Teoría de Conjuntos de G. Cantor

Paradoja de Cantor: (Los objetos de un conjunto se denominan *elementos* del conjunto. A cualquier agrupación de los elementos que se encuentran agrupados en un conjunto A se le llama *parte de A* o *subconjunto de A*). Georg Cantor logró probar que dado un conjunto A de *n* elementos (con *n* finito o infinito), el conjunto formado por todas las partes de A tenía mayor número de elementos que *n*. La paradoja surge al considerar al ***conjunto universo*** o ***conjunto de todos los conjuntos*** *U*, también denominado **conjunto universal**:

Por una parte, de acuerdo a lo probado por Cantor, el conjunto de partes del conjunto universo P(U) debe tener más elementos, pero, de acuerdo con la definición de conjunto universo (conjunto de todos los conjuntos), el conjunto de partes del conjunto universo debe ser un elemento del conjunto universo, es decir, el conjunto de sus partes tiene menos o igual número de elementos que el propio conjunto universo.



Bertrand Russell (1872-1970), Conde de Russell es considerado una de las inteligencias más agudas del siglo XX. Además de su característica polémica en las ciencias, arte y filosofía era *humanista* y *pacifista*. Aparte de su obra *Principia Mathematica*, citada párrafos más adelante, posee una amplia producción escrita.

Entonces, por un lado P(U) tiene más elementos que U, y por otra, U tiene más elementos que P(U), he allí la *paradoja*.
La siguiente paradoja es considerada una de las más ingeniosas y se debe al escritor (premio Nóbel de Literatura en 1950), filósofo y lógico-matemático Bertrand Russell.

Paradoja de Russell (de 1905): Russell distinguió a los conjuntos en *normales* (conjuntos que no se contienen a sí mismos –que no son elementos de sí mismos) y *anormales* (conjuntos que se contienen a sí mismos) y se preguntó por la naturaleza del ***conjunto de todos los conjuntos normales T*** (¿Era *normal* o *anormal*?).
Si es normal, no se contiene a sí mismo, por tanto debe ser un elemento de T, es decir es un elemento de sí mismo, con lo que debe ser anormal. Contradicción. Si es anormal, se contiene a sí mismo, por tanto debe ser normal. Nuevamente contradicción.

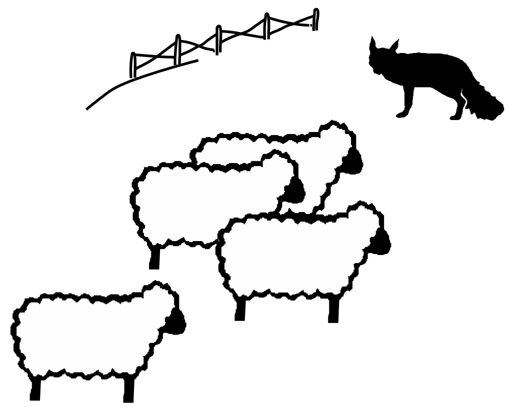
> Vale preguntarse:
>
> **¿Qué significado tuvieron estas paradojas en el seno de la teoría de conjuntos? ¿Cómo contribuyeron a su desarrollo?**

Las siguientes ideas no pretenden agotar este amplio tema. La formulación de estas paradojas en la teoría constituyó en sí un *escándalo*, también conocido como “crisis de los fundamentos”. No despertaban solamente curiosidad como la motivada por las paradojas planteadas “fuera” de las matemáticas, se estaba ante una teoría que presentaba *inconsistencias*. *Problema* quizá comparable al generado por los intentos de probar que el *Postulado de la Paralela* no era tal sino que se podía deducir de los restantes, tarea que ocupó a eminentes matemáticos del siglo XIX entre ellos a Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann y, anteriormente, a Proclo, Ptolomeo, el padre Saccheri (1677-1733), Beltrami (1836-1900), entre otros.
Las paradojas de Cantor y de Russell lejos de representar un obstáculo para el desarrollo de la teoría, motivaron el desarrollo de esta ciencia encontrando no una sino *varias* soluciones al problema, además, permitió profundizar en el conocimiento de los *fundamentos de las matemáticas*.
Para 1908 se formuló la primera de las soluciones, luego se desarrollaron otras. Entre ellas se distinguieron tres grandes tendencias: LOGICISMO, FORMALISMO e INTUICIONISMO.
Para una descripción de estas tendencias remitimos al lector al texto de José Babini (1980, capítulo 9 “y restantes”); de seguidas exponemos sólo algunas de sus características.

(1) Para el <u>*logicismo*</u> los conceptos básicos de la matemática podían formularse con recursos lógicos. Bertrand Russell (considerado como uno de los *precursores* del *logicismo*) en sus *Principia Mathematica* se planteó dos objetivos principales:

Hilbert (1862-1943): matemático alemán, profesor de la Universidad de Koenigsberg y en Gotinga. Su obra toca tanto los fundamentos de las matemáticas como una diversidad de problemas. Es considerado uno de los matemáticos de mayor influencia en todas las matemáticas. En un congreso celebrado en París (1900) enunció en su discurso ***23* problemas no resueltos**, éstos derivaron en el desarrollo de buena parte de la matemática del siglo *XX*.

> (a) probar que toda la matemática pura trata exclusivamente con conceptos definibles en términos de un muy pequeño número de *conceptos lógicos fundamentales* y que todas estas proposiciones son deducibles de un muy pequeño número *de principios lógicos fundamentales* y (b) la explicación de los conceptos que la matemática acepta como *indefinible*. (Prefacio, v)



El primer objetivo derivó en reescribir todas las matemáticas utilizando exclusivamente *recursos* lógicos (conceptos y principios lógicos fundamentales), el segundo es una tarea tratada filosóficamente.

En los *Principia Mathematica* desarrolla la *teoría de los tipos*: con la *intención* de eliminar las antinomias o paradojas de la matemática (o mejor, evitar su aparición). "Si bien (...) [la] "teoría de los tipos" no ha asomado ninguna nueva paradoja, nada asegura que no aparezca en el futuro" (Babini, 1980, p. 59), hecho que es ilustrado por Poincaré: *no basta con encerrar el rebaño para protegerlo de los lobos, se debe estar seguro de que no quedó dentro lobo alguno*.

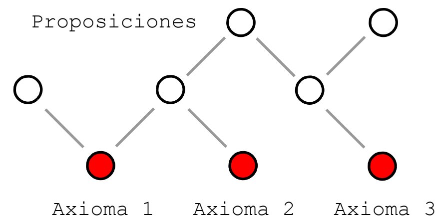
(2) El <u>*formalismo*</u> *ofreció* un modelo de matemática construida de acuerdo al **método axiomático** (consiste en: (a) enunciar, sin demostración, postulados y nociones de que se parte y, (b) deducir por procesos lógicos teoremas a partir de los postulados y nociones), tarea que encuentra su punto de partida en los *Grundlagen* de Hilbert. Los *textos formalizados* y el *método axiomático* son pilares fundamentales de esta tendencia:

> Un texto matemático suficientemente explícito podría expresarse en un lenguaje convencional que contenga sólo un número pequeño de "palabras" fijas, congregado según una sintaxis que consiste en un número pequeño de reglas inviolables: se dice que semejante texto está formalizado. (Bourbaki, 1968, p. 7)

Además,

> El método axiomático es, estrictamente hablando, nada más que el arte de dibujar textos cuya formalización es sencilla en principio. Como tal, no es una nueva invención; pero su uso sistemático como un instrumento de descubrimiento es uno de los rasgos originales de la matemática contemporánea. (Bourbaki, 1968, p. 8)

La axiomática no se aplica solamente a la Teoría de Conjuntos, sino a muchas otras teorías matemáticas. Un ejemplo notable es la geometría euclídea.



Un sistema de este tipo depende de su validez lógica; el problema central del formalismo es probar que el grupo de axiomas de cada sistema formal no es contradictorio, tarea de la que se ocupó la “meta-matemática” (disciplina creada por Hilbert y su *escuela*) y su “teoría de la demostración”. No obstante, de acuerdo con Bourbaki, *la matemática está destinada a sobrevivir*, incluso *ninguna de sus partes esenciales colapsará a causa de la aparición súbita de una contradicción*.

(3) El intuicionismo es considerada la más radical y revolucionaria de las tendencias citadas. Constituye una posición filosófica sobre la verdad matemática y su elaboración; se fundamenta en el carácter intuitivo inmediato que se le atribuye al conocimiento matemático, cuya verdad se *comprueba* a través de una experiencia *sui generis*, intuición que no va más allá de la sucesión de los números naturales. Algunos de sus precursores, como Kronecker (1823-1891), sostuvieron que toda la matemática debía fundarse sobre el número natural [**Poincaré**, **Brouwer** (1881-1966), **Weyl** (1885-1955) y **Lebesgue** (1875-1941) son considerados precursores del *intuicionismo*]. Con esta tendencia ya no se ve a la matemática como algo acabado sino como “el ingrediente exacto de nuestro pensamiento”, incluyendo así a la lógica intuicionista.

Las proposiciones no constructivas son criticadas (y no aceptadas) por esta tendencia, por ejemplo:

Goldbach expresó estas conjeturas a Euler, en una carta dirigida a éste fechada en 1742.

> Cualquier numero impar mayor que *5* ha de ser suma de *3* o menos números primos. (Conjetura de Goldbach *impar*).
> *Nota*: esta es considerada una variación de la denominada Conjetura de Goldbach: cualquier número par, mayor que *2*, es suma de dos números primos.

Según los intuicionistas, además de las dos *posibilidades* de la proposición anterior [(1) todo entero mayor que 5 es suma de ... y (2) existe un entero mayor que 5 que no es suma de ...] vale agregar una tercera: que mientras no se demuestre uno de los dos casos (o no se pruebe que el problema es insoluble) *no es lícito enunciar que uno de los dos casos es el verdadero*. Como el lector podrá advertir, buena parte de la matemática contiene este tipo de proposiciones. Quienes se oponen a esta tendencia entienden esto como amputar “buena parte de la matemática” y de allí proviene precisamente la mayor parte de las críticas al intuicionismo; pero puede entenderse su postura en términos de Babini (p. 63-64): se delimitan ciertas zonas que son susceptibles de ser estudiadas mediante nuevos recursos que hasta ahora no se habían concebido.

Otra de las posturas epistemológicas desarrollada a partir de la *crisis de los fundamentos*, además del logicismo, formalismo e intuicionismo, se denominó escuela conjuntista.

Esta escuela se inició en 1908 con la axiomatización de la teoría de conjuntos por Zermelo (1871-1953) y perfeccionada en 1922 por Fraenkel (1891-1965) [conocida como *axiomática de Zermelo-Fraenkel*]. Sin embargo, se desarrollaron también, otras axiomáticas (para la Teoría de Conjuntos) como la de Von Neumann-Bernays.

Ejemplos de Conjunto

□ Conjunto vacío.
□ Conjuntos dados por "extensión" y por "comprensión".

El **conjunto vacío** es aquel que carece de elementos.

Conjunto Vacío $\varnothing$ *- Conjuntos dados por Extensión o Comprensión*

El *conjunto vacío* es aquel que carece de elementos. Éste se denota comúnmente con el símbolo $\varnothing$. En cambio, si un conjunto tiene elementos se le suele definir:

(a) Listando sus elementos o
(b) Enunciando una propiedad que los describa, y disponiendo sus elementos o la propiedad entre llaves: {}.

Si un conjunto se define mediante (a) se dice que está dado por extensión, y si está definido mediante (b), se dice que está dado por comprensión.

Otros ejemplos de Conjunto: *Dado el conjunto* $\{a,b,c\}$*, sus elementos son precisamente las letras a, b y c. Y resulta cierto escribir que*

$$a \in \{a,b,c\}$$
$$b \in \{a,b,c\} \text{ y}$$
$$c \in \{a,b,c\}$$

```
Pertenece a ...
Está en ...
Es elemento de ...
```

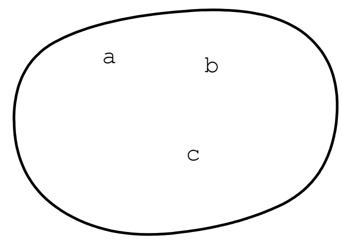
que se lee "*a* es elemento de $\{a,b,c\}$", "*a* pertenece a $\{a,b,c\}$" o bien que "*a* está en $\{a,b,c\}$"; y de forma similar con las otras dos afirmaciones. Si *d* no es un elemento de $\{a,b,c\}$ se escribe:

$$d \notin \{a,b,c\}$$

```
No pertenece a...
```

La representación gráfica del conjunto $\{a,b,c\}$ a través de un diagrama de Venn o de Venn-Euler es la siguiente:

□ Diagrama de Venn o de Venn-Euler.



Con estas ideas volvamos a los ejemplos de conjunto.

- $\{5\}$ representa al conjunto cuyo único elemento es el número 5.

  Pero los elementos de un conjunto pueden ser conjuntos en sí, por tanto:
- $\{\varnothing\}$ es también un conjunto y representa al conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío.
- El conjunto formado por las raíces reales de la ecuación $\frac{1}{3}x-2=0$, el cual podemos representar así:

Este ejemplo es importante porque distingue el conjunto vacío $\varnothing$ del conjunto $\{\varnothing\}$. Este último es *no vacío* pues tiene un elemento.

$$\left\{ x \in R \,\middle|\, \tfrac{1}{3}x-2=0 \right\}$$

Tales que ...
Que verifican ...

Pertenece(n) a ...
Que está(n) en ...

Nota: La expresión $\left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{1}{3}x-2=0 \right\}$ se puede leer así: **conjunto de los x que pertenecen a R tales que x es raíz de la ecuación** $\frac{1}{3}x-2=0$.

Entonces $\left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{1}{3}x-2=0 \right\}=\{6\}$.

- Podemos plantearnos ahora las preguntas ¿cuántos elementos tiene el conjunto $\{\{\varnothing\}\}$? y ¿cuántos tiene $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$?

Llamemos A=$\{\{\varnothing\}\}$ y B=$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, ¿es válido decir que A tiene dos elementos? Si es así ¿cuáles son?; ¿tiene A un sólo elemento?, si es así, ¿cuál es? Por otra parte, ¿cuáles son los elementos de B?

Sobre los abusos de notación

En algunos casos, en especial cuando se trata de conjuntos con infinitos elementos, se suele abusar de la notación que se ha comentado al comienzo de este capítulo –al hablar de conjuntos definidos por extensión y por comprensión. Citemos un ejemplo que ya el lector seguramente ha observado, este tiene que ver con el conjunto formado por los múltiplos positivos de 3:

$$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$$

El hecho de escribir los puntos suspensivos es en sí un abuso de notación, pues no se listan todos los elementos (cosa que es imposible) ni se enuncia una propiedad que los describa. Estos abusos en la notación de conjuntos son usados con mucha frecuencia y en general no representan mayores inconvenientes; más aún, en ciertas ocasiones esta notación es usada si se consideran algunos aspectos didácticos. El conjunto citado antes se escribe por comprensión como sigue (se presenta en el lado derecho de la igualdad). Z^+ representa al conjunto de los enteros positivos.

$$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\} = \{y \mid \; y = 3r \;\; con \;\; r \in Z^+\}$$

Los abusos de notación pueden llevar a malentendidos.

Estos abusos en la notación suelen evitarse en caso que se presten a malentendidos entre los lectores o entre quienes se comunican. Por otra parte, el *uso de notaciones incorrectas* lleva también a malentendidos. Por ejemplo, si al querer representar el conjunto de números primos positivos lo hacemos de la siguiente forma:

$$\{2, 3, 5, 7, ...\}$$

se puede pensar que éste está formado por el 2 y los impares positivos mayores o iguales que 3, y no en los números primos positivos como se quería. En este caso vale la notación que sigue, la cual se lee así "el conjunto *W* está formado por los enteros positivos z, tales que z sea un número primo" o bien "*W* es el conjunto de los números primos positivos":

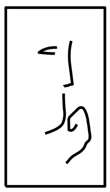
$$W = \{z \in Z^+ \mid \;\; z \;\; es \;\; primo\}$$

Una forma equivalente de representar *W* es:

$$W = \{ z \in Z^{+} - \{1\} \mid \text{ los UNICOS divisores de } z \text{ son } 1 \text{ y } z \}$$

Aquí $Z^{+} - \{1\}$ es el conjunto de los enteros positivos exceptuando al 1.

(a) Sean $A = \{0\}$ y $B = \{\{0\}\}$, ¿cuáles expresiones son correctas y cuáles incorrectas? ¿Por qué?: $0 \in A$, $0 \in B$, $\{0\} \in A$ y $\{0\} \in B$.



Discuta sus ideas con el grupo.

(b) Construya un conjunto *M* de tres elementos tal que $0 \in M$ y $\{0\} \in M$.

(c) ¿Es válido representar al conjunto vacío así: $\varnothing = \{ x \mid x \neq x \}$? ¿De qué otra manera se puede representar?

Un **subconjunto** de un conjunto B es un conjunto; sus elementos también son elementos de B.

Subconjunto

La definición que sigue permite caracterizar *subconjuntos* de un conjunto dado. Sean A y B conjuntos. Consideremos a los elementos de A; **si todo elemento de A es también elemento de B, entonces diremos que A es *subconjunto* de B**, o también que A está incluido en B, que B contiene a A o también que A es parte de B. Y lo simbolizamos por:

$$A \subset B$$

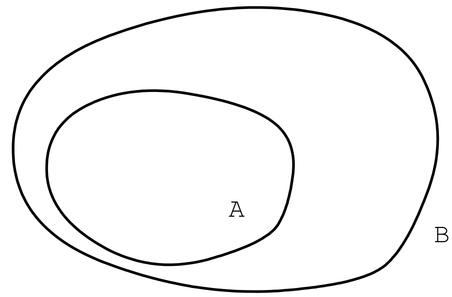
Podemos enunciar esta definición utilizando el *lenguaje proposicional* así:

$$A \subset B \iff \forall x \mid x \in A \Rightarrow x \in B$$

Observe que el **diagrama de Venn-Euler** adjunto representa el hecho de que A es parte (o subconjunto) de B ($A \subset B$).

Esto es, $A \subset B$ si y sólo si, para todo *x* que esté en A, entonces *x* está en B. El hecho $A \subset B$ se puede representar gráficamente a través de los denominados *diagramas de Venn* o de *Venn-Euler* tal como se indica en el diagrama adjunto.

Con esta idea básica –la de subconjunto– son muchas las cuestiones a plantear que ayudan a comprender la misma definición. Por ejemplo, dado un conjunto, cualquiera que sea, ¿posee algún subconjunto? O en otras palabras ¿existen conjuntos que no tengan subconjuntos? ¿Es un conjunto subconjunto de sí mismo? Si dos conjuntos verifican que $M \subset N$ ¿Es cierto que $N \subset M$? ¿Cómo puede plantearse la igualdad de conjuntos en términos de la idea de subconjunto?



$A \subset B$

Las líneas que siguen se orientan a responder estas cuestiones.

Dos conjuntos **son iguales** si cada uno es subconjunto del otro (esto es, si tienen los mismos elementos).

Igualdad de Conjuntos

Definiremos en primer lugar la **igualdad de conjuntos** en términos de la inclusión. Sean A y B conjuntos. ¿Qué relaciones de inclusión deben cumplirse para garantizar que A=B? ¿Es suficiente que $A \subset B$ para que A=B? Si $A \subset B$ entonces todo elemento de A es también elemento de B pero ello no garantiza que A=B.
Por ejemplo:
Si $A = \{x \in Z \mid \ x > 3\}$ y $B = \{x \in Z \mid \ x \geq 0\}$, entonces se verifica que $A \subset B$ pero $B \not\subset A$ (B no está incluido en A) ya que existe al menos un elemento de B que no está en A; por ejemplo $3 \in B$ pero $3 \notin A$.
El ejemplo anterior muestra que $A \subset B$ no es suficiente para que A=B; se requiere además que $B \subset A$. Entonces:
Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$. Esto es

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

¿Es un conjunto subconjunto de sí mismo?

Propiedad.

$A \subset A$ para cualquier conjunto A.

Prueba.
Dado el conjunto A es cierto que

$$\forall x \mid \ x \in A \Rightarrow x \in A$$

y ello implica que $A \subset A$, por definición de *subconjunto*.

Lo anterior ayuda también a responder si dado un conjunto cualquiera ¿posee algún subconjunto? Dado cualquier conjunto existe al menos un subconjunto de éste: el mismo conjunto. Más aún, existe un conjunto que es subconjunto de cualquier otro, tal como lo muestra la propiedad siguiente.

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. En particular, se tiene que $\varnothing \subset \varnothing$ (el conjunto vacío es subconjunto de sí mismo).

Propiedad.

$\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A.

Prueba.
La proposición

$$\forall x \mid \ x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$$

es verdadera, pues el antecedente ($x \in \varnothing$) es falso [$\varnothing$ carece de elementos]. Entonces $\varnothing \subset A$, por la definición de subconjunto.

□ Unicidad del conjunto vacío. Esta propiedad garantiza que existe un único conjunto vacío.

Propiedad.

El conjunto $\varnothing$ es único.

Prueba.
Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe un único conjunto $\varnothing$; esto es, podemos decir que $\varnothing^*$ es otro conjunto vacío que verifica $\varnothing \neq \varnothing^*$. Pero, por la propiedad anterior [$\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A] se tiene en particular que:

$$\varnothing \subset \varnothing^* \ \wedge \ \varnothing^* \subset \varnothing$$

Y de acuerdo con la definición de igualdad de conjuntos [la definición caracterizada en términos de la inclusión], $\varnothing = \varnothing^*$. Lo cual es absurdo, pues habíamos supuesto que $\varnothing \neq \varnothing^*$. El absurdo proviene de suponer que no hay un único conjunto vacío. Entonces existe un único conjunto vacío.

El conjunto de partes de un conjunto A está formado por todos los conjuntos que son subconjuntos de A.

Conjunto de Partes $P(A)$

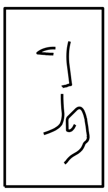
Otro conjunto distinguido, además del vacío, es el denominado *conjunto de partes*, el cual se define como sigue. Dado un conjunto A, el conjunto de partes de A (que denotaremos $P(A)$) está formado por todos aquellos subconjuntos de A. Esto es:

$$P(A) = \{M \mid \ M \subset A\}$$

Sea por ejemplo el conjunto $A=\{(0,0),(1,0)\}$, para saber cuáles son los elementos de $P(A)$ debemos ver cuáles son los subconjuntos de A. Para ver esto debemos definir conjuntos cuyos elementos también sean elementos de A, los cuales se listan de seguidas: $\varnothing$, $\{(0,0)\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(0,0),(1,0)\}$. Comenzamos listando al conjunto vacío pues éste es subconjunto de cualquier conjunto de acuerdo con una propiedad ya probada, luego listamos conjuntos *unitarios* (de un sólo elemento) formados precisamente por elementos de A, y el mismo A (ya que $A\subset A$). Entonces,

$$P(A)=\{\varnothing,\{(0,0)\},\{(1,0)\},A\}$$

Podemos calcular también $P(P(A))$, el conjunto de partes del conjunto de partes de A, tarea que dejamos al lector.



Si $A=\varnothing$, entonces $P(A)=P(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

Observe que (a) $\varnothing\subset P(\varnothing)$ ya que $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto y en particular de $P(\varnothing)$; (b) como $\varnothing$ carece de elementos entonces no existen subconjuntos no vacíos de éste; y (c) el mismo conjunto A ya fue listado. Ahora bien, ¿qué elementos tienen $P(P(\varnothing))$ y $P(P(P(\varnothing)))$? [Antes de continuar la lectura, responda estas cuestiones]:

El conjunto de partes del conjunto vacío tiene como único elemento al conjunto vacío.

Observe que $P(\varnothing)$ tiene como único elemento a $\varnothing$, entonces $P(P(\varnothing))$ tendrá como elementos a $\varnothing$ y al conjunto formado por el único elemento que tiene $P(\varnothing)$, esto es: $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Por otra parte,

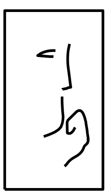
$$P\left(P\left(P(\varnothing)\right)\right)=\left\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},P\left(P(\varnothing)\right)\right\}$$

dejamos al lector la tarea de enunciar los argumentos que garantizan que $P\left(P\left(P(\varnothing)\right)\right)$ está formado justo como se presenta aquí. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\varnothing \quad \to \quad P(\varnothing)=\{\varnothing\}\\
&P(\varnothing) \quad \to \quad P\left(P(\varnothing)\right)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\\
&P\left(P(\varnothing)\right) \quad \to \quad P\left(P\left(P(\varnothing)\right)\right)=\left\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},P\left(P(\varnothing)\right)\right\}
\end{aligned}$$

□ Número de elementos de P(A).

Un problema muy interesante relacionado con el conjunto de partes de un conjunto dado es el que sigue: **Si A es un conjunto con *n* elementos, ¿cuántos elementos tiene $P(A)$?** Sugerimos al lector estudiar este problema para varios valores de *n* (*n=0,1,2,3,...*) y luego comprobar las conjeturas que formule, o bien refutarlas a través de contraejemplos.



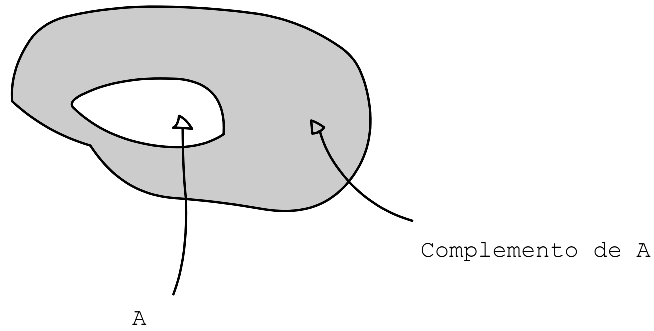
Observación: **U** no denota al "conjunto universal", pues éste no existe en nuestra axiomática. Recuerde las paradojas que discutimos al comienzo de este capítulo.

Complemento de un Conjunto A^c

Otro conjunto distinguido es el complemento de un conjunto dado. Sea A un conjunto cualquiera contenido en un conjunto U, su complemento está formado por todos aquellos elementos de U que no están en A; dicho conjunto se denota por A^c si se sobreentiende al conjunto U, o bien por A_U^c. Aunque también es denotado por $C_U A$. Esto es:

$$A_U^c=\{x \mid \; x\in U \;\wedge\; x\notin A\}$$

Se lee "A complemento", "complemento de A" o "complemento de A en U". Es preciso hacer un comentario: U no denota al *conjunto Universal de Cantor*, pues como se vio en secciones anteriores éste no es un conjunto. Así que al hablar de *A complemento* no



se hace alusión a todos aquellos objetos que no son elementos de A, sino a todos aquellos elementos de U (donde U es un conjunto y $A \subset U$) que no están en A. La representación gráfica (a través de un diagrama de Venn) se presenta adjunto.

La aclaratoria anterior obedece a la confusión común de considerar a A^c formado por elementos de un *conjunto universal*, que a su vez no están en A
pero detrás de esta idea se encuentran las paradojas que encontrarían asidero en dicha suposición, como la de Cantor o la de Russell, ambas comentadas en secciones anteriores.

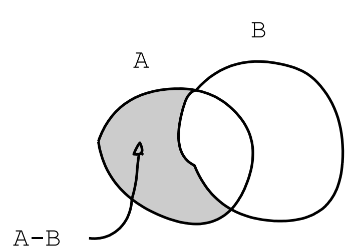
La diferencia de dos conjuntos, A y B, es un nuevo conjunto, formado por los elementos que están en A y no en B.

Diferencia de Conjuntos $A-B$

Dados dos conjuntos A y B, **la *diferencia* $A-B$ [que se lee "A menos B" o "diferencia entre A y B"] se define como el conjunto de todos aquellos elementos de A que no están en B**. En símbolos:

$$A-B=\{x \mid \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\}$$

La propiedad que sigue vincula la diferencia entre A y B con la intersección entre el primero de ellos y el complemento del segundo (con respecto al primero). Ver el gráfico adjunto.



"A menos B" es igual a la intersección de A y B complemento.

Propiedad.

$$A - B = A \cap B^c .$$

Prueba.
Sea $x \in A - B$ entonces por definición de diferencia de conjuntos $x \in A \wedge x \notin B$, en consecuencia, de acuerdo con la definición de complemento, $x \in A \wedge x \in B^c$, por tanto $x \in A \cap B^c$.

Propiedades de la *Inclusión*

□ Reflexividad
□ Antisimetría
□ Transitividad

Si $B \subset A$, entonces A y B están relacionados a través de $\subset$.

Reflexividad, Antisimetría y Transitividad

Si $B \subset A$ se dice que están relacionados a través de la relación de inclusión $\subset$. Ya en la sección anterior se estudiaron algunas de las propiedades que cumple esta relación. En esta sección se presenta la forma cómo se denominan. Las pruebas de las dos primeras propiedades que se listan (*reflexividad* y *antisimetría*) ya fueron expuestas.

Aquí se presenta sólo la prueba de la transitividad de la relación de inclusión entre conjuntos.

Reflexividad. **$A \subset A$ para cualquier conjunto A.**
Antisimetría. **Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces A=B.**
Transitividad. **Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.**

Prueba.
Supongamos que $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces se tiene por la definición de subconjunto de un conjunto que:

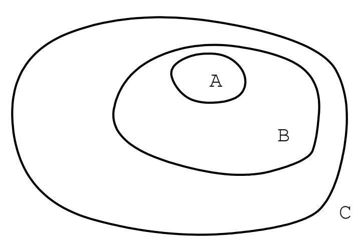
$$\forall x \mid \ x \in A \Rightarrow x \in B \text{ y además } \forall x \mid \ x \in B \Rightarrow x \in C ,$$

entonces se cumple, por silogismo hipotético, que

$$\forall x \mid \ x \in A \Rightarrow x \in C .$$

Diagrama de Venn para la propiedad transitiva de la inclusión ($\subset$).

El *diagrama de Venn* que sigue representa la propiedad transitiva de la relación de inclusión entre conjuntos. Aporte ejemplos de conjuntos que verifiquen esta propiedad. Considere, además, al conjunto $C = \{1, 2\}$. Defina dos conjuntos, A y B, tales que $A \subset B$ y $B \subset C$. Discuta sus ideas con el grupo.



$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Intersección y Unión de Conjuntos

¿Cómo definirías la "intersección de dos conjuntos? ¿Y la "unión de dos conjuntos?
Compare luego, con las definiciones que se dan más adelante.

Dados dos conjuntos A y B, la intersección y la unión de ellos tienen que ver con dos ideas básicas:

(1) Con ver los elementos que son comunes a ambos conjuntos y formar con ellos un nuevo conjunto
(2) Con reunir los elementos de ambos en un solo conjunto. Las líneas que siguen formalizan esto.

La **intersección** de dos conjuntos, A y B, consta de los elementos que están tanto en A como en B.

Intersección.

Sean A y B conjuntos. La intersección de A y B es el conjunto formado por los elementos que están tanto en A como en B, y se representa por $A \cap B$. Esto es:

$$A \cap B = \{x \mid \; x \in A \; \wedge \; x \in B\}$$

La **unión** de los conjuntos A y B consta de los elementos que están en A o en B.

Unión.

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que están en A o en B, y se representa por $A \cup B$. Esto es:

$$A \cup B = \{x \mid \; x \in A \; \vee \; x \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \; n \in Z^{+} \right\}$ y $B = \{-1, 1\}$. ¿Qué elementos tienen $A \cap B$ y $A \cup B$? Debemos en primer lugar "tener una idea" de los elementos que están en A. Como $n \in Z^{+}$, entonces *n* toma los valores $1, 2, 3, 4, \ldots$, por tanto $\frac{1}{n}$ toma respectivamente los valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Observamos que cuando *n* crece, $\dfrac{1}{n}$ decrece, pero es siempre positivo. Por lo tanto hay un único elemento en $A\cap B$, el 1. $A\cap B=\{1\}$.

Con respecto a la unión de A y B:

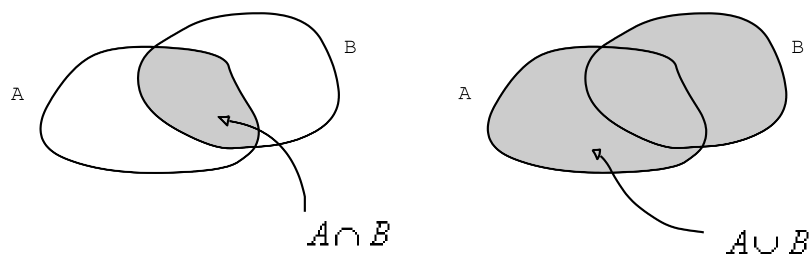
$$A\cup B=\left\{\frac{1}{n}\middle|\ n\in Z^+\right\}\cup\{-1,1\}=\left\{\frac{1}{n}\middle|\ n\in\{-1\}\cup Z^+\right\},$$

Ver los comentarios sobre los abusos de notación al comienzo de este capítulo.

Esto es, en $A\cup B$ están tanto -1 como todos los números de la forma $\dfrac{1}{n}$ con $n\in Z^+$. Algunos preferirán la notación

$$A\cup B=\left\{-1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...\right\}.$$

Los *diagramas de Venn* correspondientes a la intersección y a la unión de dos conjuntos cualquiera son:



Sugerimos al lector, antes de estudiar las pruebas de estos teoremas, definir conjuntos A, B y C, en particular, y chequear que en efecto se verifican cada una de las partes del teorema. También es posible apoyarse en diagramas de Venn para visualizar algunas partes de los teoremas.

Algunas de las propiedades *básicas* de la unión y de la intersección de conjuntos se resumen en los teoremas que siguen. No todos serán probados aquí con la intención de proponerlos al lector como actividad. Estos teoremas tienen que ver con las preguntas: Dados los conjuntos A y B ¿Es la unión de A y B igual a la de B y A?, Si A es parte de B ¿qué pasa con $A\cup B$?, ¿es asociativa la operación “unión de conjuntos”?, ¿a qué es igual A unido con A? y ¿A unido con el vacío? Con respecto a la intersección se pueden hacer preguntas similares.

Teorema.

Sean A, B y C conjuntos, entonces se cumple que:
(i) $A\cup B=B\cup A$
(ii) $A\subset B\ \Rightarrow\ A\cup B=B$
(iii) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

Prueba.
(i) $A\cup B=\{x|\ \ x\in A\ \vee\ x\in B\}=\{x|\ \ x\in B\ \vee\ x\in A\}=B\cup A,$

por definición de *A unido con B*, ley lógica $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ y definición de *B unido con A*, respectivamente [También se puede probar (i) verificando la *doble inclusión*: $A \cup B \subset B \cup A$ y $A \cup B \supset B \cup A$].

(ii) Para probar que $A \cup B = B$, procederemos verificando las inclusiones implicadas. Si $x \in B$ entonces de acuerdo con la ley lógica $p \Rightarrow p \vee q$, $x \in B \vee x \in A$, por tanto $x \in A \vee x \in B$, esto es, $x \in A \cup B$ (por definición de *A unido con B*). Por lo anterior $B \subset A \cup B$. Probemos ahora que $A \cup B \subset B$. Si $x \in A \cup B$ se tiene que $x \in A \vee x \in B$, y como $A \subset B$ (por hipótesis), todo *x* de A está en B, entonces $x \in B \vee x \in B$, con lo cual $x \in B$ (¿qué leyes lógicas garantizan las dos afirmaciones anteriores?). Luego, ambas inclusiones implican, por definición de igualdad de conjuntos, que $A \cup B = B$.

(iii) Para probar esta parte del teorema se puede proceder verificando las dos inclusiones implicadas o bien así:

Escriba en las líneas los argumentos que correspondan para cada caso.

$(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in A \cup B \vee x \in C\}$

$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$ por definición de unión de conjuntos

$= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\}$ por ley lógica: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$= \{x \mid x \in A \vee x \in B \cup C\}$ ¿por qué?

____

____

$= \{x \mid x \in A \cup (B \cup C)\}$ ¿por qué?

____

____

$= A \cup (B \cup C)$. ¿por qué?

____

____

(i) La unión de cualquier conjunto A consigo mismo es igual que A.

(ii) La unión de cualquier conjunto A con el vacío es igual que A.

Teorema.

Para cualquier conjunto A se cumple que:
(i) $A \cup A = A$
(ii) $A \cup \varnothing = A$

Prueba.

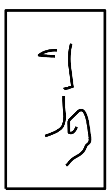
(i) $A \cup A = \{x \mid x \in A \vee x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$, por definición de unión de conjuntos, ley lógica $p \Leftrightarrow p \vee p$, y definición de A.

(ii) Por una propiedad probada se tiene que $\varnothing \subset A$, y por ii del teorema anterior se tiene que $A \cup \varnothing = A$.

Dejamos la prueba de los dos teoremas que siguen al lector. En cierto sentido son similares a las dos anteriores, pero existen otras vías y otros argumentos que el lector puede explorar.
(i) y (iii) del teorema siguiente tienen que ver con las propiedades conmutativa y asociativa de la intersección de conjuntos, y (ii) con la intersección de dos conjuntos cuando uno es parte del otro.
El otro teorema tiene que ver con la intersección de un conjunto con él mismo y de un conjunto cualquiera con el vacío.

Teorema.

Sean A, B y C conjuntos, entonces se cumple que:
(i) $A \cap B = B \cap A$
(ii) $A \subset B \;\Rightarrow\; A \cap B = A$
(iii) $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$



(i) La intersección de cualquier conjunto A con sigo mismo es igual que A.

(ii) La intersección de cualquier conjunto A con el vacío es igual que vacío.

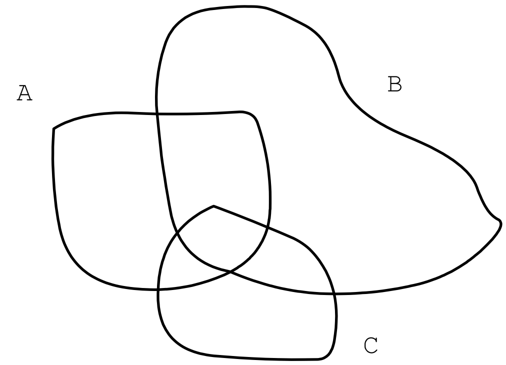
Teorema.

Para cualquier conjunto A se cumple que:
(i) $A \cap A = A$
(ii) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Observe que el gráfico presentado representa "el caso más general" si se consideran los casos de contención entre tres conjuntos cualesquiera.

Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C, al considerar las diferencias

$$(A-B)-C \text{ y } A-(B-C)$$



¿Qué relaciones de inclusión se cumplen entre estos conjuntos?
Presentamos al lector un diagrama en el que debe representar ambos conjuntos y estudiar así la pregunta planteada [para ello "sombree" las regiones que representan a los conjuntos $(A-B)-C$ y $A-(B-C)$ y deduzca la relación de inclusión que se cumple].
Sólo después de esto estudie la propiedad expuesta a continuación.

Propiedad.

$(A-B)-C \subset A-(B-C)$, para cualesquiera conjuntos A, B y C.

Prueba.

Escriba los argumentos que corresponden a cada paso.

$x \in (A-B)-C$

$x \in (A-B) \wedge x \notin C$

$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$

$x \in A \wedge x \notin B$

$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$

$x \in A \wedge x \in (B^c \cup C)$

$x \in A \wedge x \notin (B \cap C^c)$

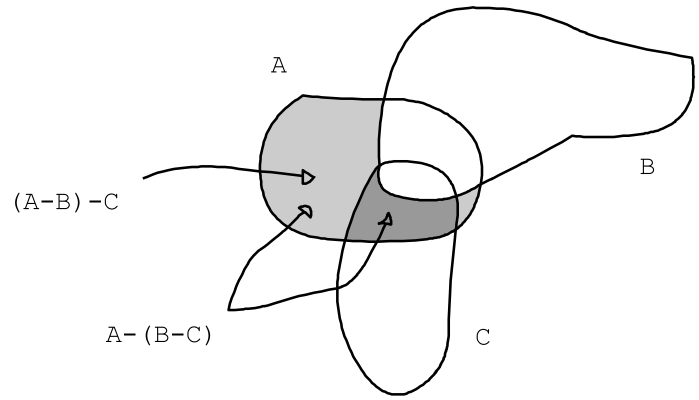
$x \in A \wedge x \notin (B-C)$

$x \in A-(B-C)$. Esto completa la prueba.

En las implicaciones señaladas con el cuadro es precisamente donde se rompe la cadena de equivalencias. La proposición

$$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$$

es falsa cuando p es V, q es F y r es V; es decir, cuando $x \in A,\ x \in B,\ x \in C$. Veamos un ejemplo gráfico:



donde puede observarse que

$$\left(A-B\right)-C \subset A-\left(B-C\right)$$

pero no la otra inclusión descrita párrafos atrás.
Aquí los x tales que $x \in A \cap B \cap C$ están en $A-\left(B-C\right)$ y no en $\left(A-B\right)-C$.
Después de ver las leyes de *De Morgan* se expondrá otra prueba de esta propiedad con base en ellas.

Leyes de *De Morgan*

Las leyes de *De Morgan* tienen que ver con la complementación de la unión o de la intersección de dos conjuntos.

Las leyes que se estudiarán, llamadas leyes de *De Morgan*, tienen que ver con la complementación de la unión o intersección de dos conjuntos. Con la intención de explorar algunas ideas antes de la exposición de las referidas leyes, se proponen algunas actividades al lector.

Sean A y B subconjuntos de un cierto conjunto U. Sabemos que A y B pueden ser disjuntos (no tener elementos en común, esto es, $A \cap B = \varnothing$), de intersección no vacía pero A no es parte de B, ni B parte de A, o bien A puede ser parte de B o viceversa. Considerando estas posibilidades se presentan algunos diagramas; **en cada uno de ellos el lector debe plantear hipótesis de las relaciones de inclusión que se cumplen entre $\left(A \cap B\right)^c$ y los conjuntos $A^c \cap B^c$ ó $A^c \cup B^c$. E igualmente entre $\left(A \cup B\right)^c$ y, $A^c \cap B^c$ ó $A^c \cup B^c$.**

Sombree (en los diagramas adjuntos) la región que corresponde a $\left(A \cap B\right)^c$ y compare con la región que corresponde a $A^c \cap B^c$ (la cual puede sombrear de forma que se diferencie de la región anterior). Luego repita el proceso pero comparando esta vez con la región que corresponde a $A^c \cup B^c$. Haga lo mismo (sobre otros diagramas similares) para estudiar al conjunto $\left(A \cup B\right)^c$.

Algunas preguntas que pueden ayudar en esta tarea son:

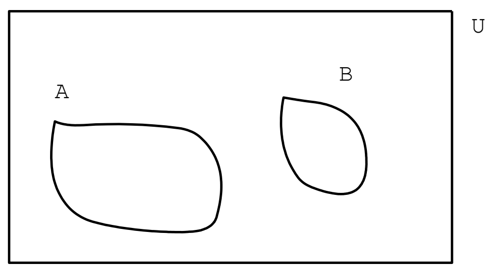
(1) ¿Es $(A \cap B)^c$ parte de $A^c \cap B^c$? ¿y viceversa?

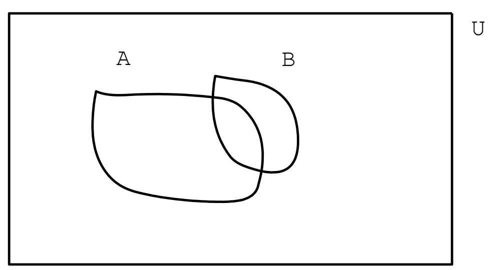
(2) ¿Es $(A \cap B)^c$ parte de $A^c \cup B^c$? ¿y viceversa?

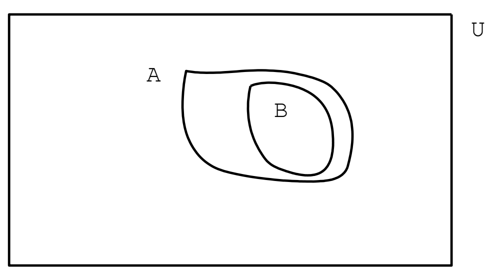
(3) ¿Es $(A \cup B)^c$ parte de $A^c \cap B^c$?

(4) ¿Es $(A \cup B)^c$ parte de $A^c \cup B^c$?

Utilice los gráficos presentados para explorar estas preguntas. Plantee, para cada caso, hipótesis y discútalas con el grupo.







Por otra parte:

(5) ¿Existen relaciones de igualdad entre $(A\cap B)^c$ y alguno de los conjuntos $A^c\cap B^c$ y $A^c\cup B^c$?

(6) ¿Y con respecto a $(A\cup B)^c$?

Ahora sí; exponemos las leyes de *De Morgan*:

□ Leyes de De Morgan.

(i) El complemento de la unión de los conjuntos A y B es igual que la intersección de A complemento y de B complemento.

(ii) El complemento de la intersección de A y B es igual que la unión de A complemento y B complemento.

Teorema.

Para cualesquiera conjuntos A y B se cumple que:
(i) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$
(ii) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

Prueba (de i).
Sea $x\in(A\cup B)^c$, luego $x\notin A\cup B$ por definición de complemento de un conjunto, entonces $x\notin A$ y $x\notin B$ por definición de unión [sería un error afirmar que $x\notin A$ o $x\notin B$: ver el apartado "*Detectando errores*" en esta misma Sección], luego $x\in A^c$ y $x\in B^c$ por definición de complemento. Entonces $x\in A^c\cap B^c$ (definición de intersección). De esto se deduce, por definición de subconjunto, que $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$. **(1)**

Resta probar que $(A\cup B)^c\supset A^c\cap B^c$. [Dejamos los argumentos al lector]. Sea $x\in A^c\cap B^c$, entonces $x\in A^c$ y $x\in B^c$, por lo tanto $x\notin A$ y $x\notin B$, de donde $x\notin A\cup B$. Entonces $x\in(A\cup B)^c$. Luego, $(A\cup B)^c\supset A^c\cap B^c$. **(2)**

De (1) y (2) se deduce que $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.
Dejamos propuesta la prueba de la segunda ley de *De Morgan*.

Otras propiedades

Recordamos en este punto que dejamos pendiente otra prueba de que

$$(A-B)-C \subset A-(B-C)$$

la cual exponemos ahora:

Prueba.

$x \in (A-B)-C$

$x \in (A-B)\cap C^c$

$x \in A\cap B^c \cap C^c$ ya que $M-N=M\cap N^c$

$x \in A\cap B^c$ pues si $x\in M\cap N \Rightarrow x\in M$

$x \in A\cap\left(B^c\cup C\right)$ dado que $x\in M \Rightarrow x\in M\cup N$

$x \in A\cap\left(B\cap C^c\right)^c$ por una de las Leyes de *De Morgan*

$x \in A\cap(B-C)^c$ ya que $M-N=M\cap N^c$

$x \in A-(B-C)$ por lo anterior.

Luego, todo *x* de $(A-B)-C$ también está en $A-(B-C)$ y en consecuencia $(A-B)-C \subset A-(B-C)$.

Una propiedad, también muy importante en cuanto a su uso como argumento en lo que sigue, tiene que ver con la intersección de un conjunto con su complemento.

$A\cap A^c$ debe constar de los elementos que están en A y a la vez que están en su complemento (es decir, que no están en A), naturalmente no existe ningún objeto que cumpla esto.

Propiedad.

$$A\cap A^c=\varnothing.$$

Prueba.

$A\cap A^c=\{x|\ x\in A \wedge x\notin A\}=\varnothing$, por definición de $A\cap A^c$ y definición de $\varnothing$. Recuerde que el conjunto vacío se puede caracterizar por $\{x|\ x\in A \wedge x\notin A\}$, pues ningún objeto *x* verifica la propiedad $x\in A \wedge x\notin A$.

Propiedad.

$$B\subset A \Leftrightarrow (A-B)\cup B=A.$$

Se probará esta propiedad verificando las dos implicaciones: directa y recíproca. Se indicará con ($\Rightarrow$) la prueba de la implicación directa y con ($\Leftarrow$) la recíproca.

Prueba.
($\Rightarrow$)
$x \in (A-B) \cup B \iff x \in A-B \vee x \in B \iff$
$(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \iff$
$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \iff x \in A \wedge x \in U \iff x \in A.$

Se aplicó, respectivamente: la definición de unión de conjuntos, de diferencia, distributividad de la disyunción con respecto a conjunción, hipótesis (el hecho de que B es parte de A) y ley lógica $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \iff p$, y neutro para la intersección de conjuntos.

($\Leftarrow$)
Si $(A-B) \cup B = A \Rightarrow (A-B) \cup B \subset A$.

Consideremos $x \in (A-B) \cup B \Rightarrow x \in (A-B) \vee x \in B$, luego $x \in (A-B) \vee x \in B \Rightarrow x \in A$ por hipótesis; entonces de acuerdo con la ley lógica $(p \vee q) \Rightarrow r \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$, se tiene que:
$[x \in (A-B) \Rightarrow x \in A] \wedge [x \in B \Rightarrow x \in A] \Rightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A) \Rightarrow$
$B \subset A$. Esto completa la prueba.

Sin embargo, a manera de ilustración se presenta otra prueba que se basa en considerar $(A-B) \cup B$ = $(A \cap B^c) \cup B$ = $(A \cup B) \cap (B^c \cup B)$ = $(A \cup B) \cap U$ = $A \cup B$ = A.

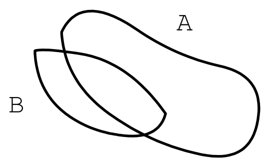
B es subconjunto de A si y sólo si la unión de A y B es igual que A.

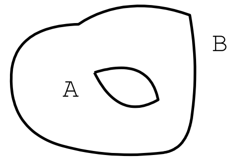
Probaremos ahora que $B \subset A \iff A \cup B = A$.

Otra Prueba.
($\Rightarrow$) $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \iff x \in A$, según la ley lógica $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \iff p$ y la hipótesis.

($\Leftarrow$) Nuestra hipótesis es ahora $A \cup B = A$.
Entonces:
$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$
$(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A$
$(x \in A \Rightarrow x \in A) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$
$x \in B \Rightarrow x \in A$
$B \subset A$.

Se deja al lector la tarea de representar gráficamente un caso en que B no sea subconjunto de A y chequear que no se cumple la propiedad antes probada. Por ejemplo, en los casos que se muestran adjuntos. Para ello debe representar la diferencia entre A y B, y su unión con B. Observará que, en efecto, no resulta el conjunto A.





Veamos ahora el caso en el que un conjunto está incluido en otros dos, ¿qué pasa con respecto a la intersección de esos dos conjuntos?; esto es, ¿está ese conjunto contenido en la intersección del par de conjuntos? La propiedad que sigue tiene que ver con este punto, aunque también se puede probar que ello vale en el caso de la unión del par de conjuntos, tarea que puede emprender el lector.

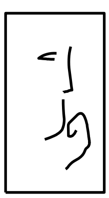
Propiedad.

$$A \subset B \ \wedge \ A \subset C \ \Leftrightarrow \ A \subset (B \cap C).$$

Prueba.

$A \subset (B \cap C) \ \Leftrightarrow \ [x \in A \ \Rightarrow \ x \in (B \cap C)]$ de acuerdo con la definición de subconjunto de un conjunto

$\Leftrightarrow \ [x \in A \Rightarrow (x \in B \ \wedge \ x \in C)]$ ¿por qué?



$\Leftrightarrow \ [(x \in A \ \Rightarrow \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \Rightarrow \ x \in C)]$

¿por qué?

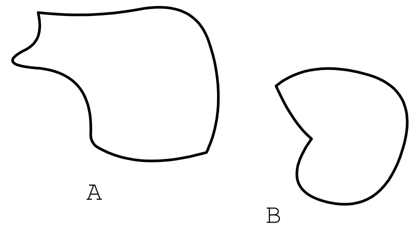
$\Leftrightarrow \ A \subset B \ \wedge \ A \subset C$ ¿por qué?

Ahora, si dos conjuntos –digamos A y B– no tienen elementos en común, y llamamos a su unión C, por ejemplo, entonces ¿cómo expresamos a A en función de B y C?

(1) ¿Es A la intersección de B y C?

(2) ¿Es A igual a $B - C$?

(3) ¿Es igual a $B \cap C^c$?
(4) ¿O es igual a $C - B$?



Si A es intersección de B y C, entonces A y B tendrían puntos en común, lo cual es absurdo pues habíamos supuesto lo contrario. Así que la respuesta a (1) es no. Las preguntas (2) y (4) aportan buenas ideas con respecto a A ya que se basan en la noción de diferencia entre conjuntos. Si unimos B y A y denotamos esto con $C = A \cup B$, entonces al observar las diferencias $B - C$ y $C - B$, podemos responder a la pregunta inicial.

$B - C$ está formado por los elementos de B que no están en C, pero B es parte de C, así que no hay ningún elemento que verifique estas condiciones, por tanto $B - C = \varnothing$.

Por otra parte, $C - B$ está formado por los elementos de C que no están en B, y como $C = A \cup B$, entonces $C - B$ consta precisamente de los elementos de A. Y he aquí la respuesta.

Se deja al lector explorar la pregunta etiquetada con (3): *¿Es igual a $B \cap C^c$?*

La propiedad que procedemos a probar tiene que ver con las ideas anteriores.

Propiedad.

$$A \cap B = \varnothing \;\wedge\; C = A \cup B \;\Rightarrow\; A = C - B.$$

En realidad existen varias vías para probar esta propiedad, tal como se ha ilustrado con otras propiedades. Mostramos aquí sólo una de ellas.

(*) Probaremos antes que $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$. Propiedad que nos servirá de argumento más adelante.

($\Rightarrow$)

Si $A \cap B = \varnothing$, entonces

$A-B=\{x|\ \ x\in A\ \wedge\ x\notin B\}=\{x|\ \ x\in A\}=A$.

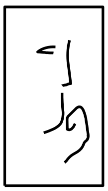
($\Leftarrow$)

Si $A=A-B\ \Rightarrow\ A\cap B=(A-B)\cap B=A\cap B^c\cap B=\varnothing$.

Se usó, respectivamente, hipótesis, el hecho de que $M-N=M\cap N^c$, propiedad asociativa de la intersección de conjuntos y la propiedad $\varnothing=M\cap M^c$.

($\Rightarrow$) y ($\Leftarrow$) garantizan la verdad de $A\cap B=\varnothing\ \Leftrightarrow\ A-B=A$.

Dejamos al lector la tarea de encontrar otras formas de probar que $A\cap B=\varnothing\ \Leftrightarrow\ A-B=A$:



Prueba.

[de que $A\cap B=\varnothing\ \wedge\ C=A\cup B\ \Rightarrow\ A=C-B$]

$C-B=(A\cup B)-B$ ya que por hipótesis se tiene que $C=A\cup B$

$=(A\cup B)\cap B^c$ ¿por qué?

$=(A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$ ¿por qué?

$=A\cap B^c$ ¿por qué?

$=A-B$ ¿qué garantiza esto?

$=A$ de acuerdo con la propiedad antes probada $A\cap B=\varnothing\ \Leftrightarrow\ A-B=A$
(por hipótesis también se tiene que $A\cap B=\varnothing$).

Detectando errores

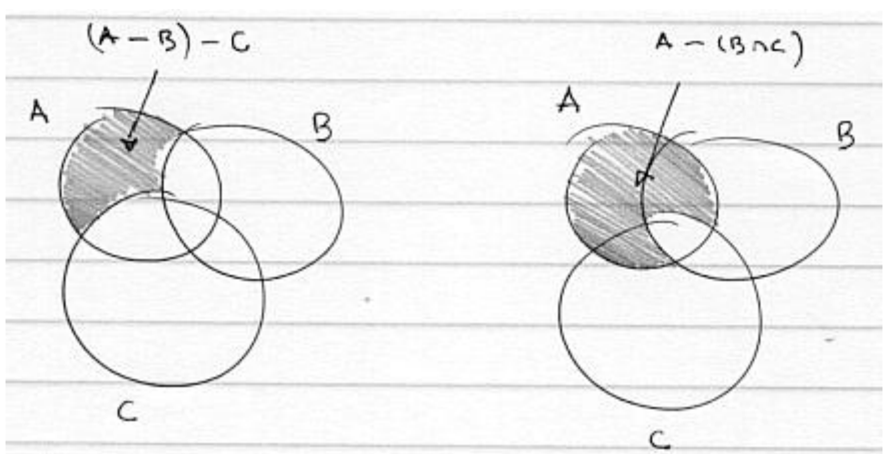
De seguidas se presenta una serie de proposiciones que fueron entendidas como equivalentes. Se propone al lector estudiar éstas y detectar errores, así como argumentar cada paso.

La intención de este tipo de actividad es presentar espacios no sólo orientadas a probar ciertas propiedades o teoremas sino para observar errores en las deducciones que se hacen.

$$
\begin{aligned}
x \in (A-B)-C &\Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A-(B \cap C)
\end{aligned}
$$

Si observamos un gráfico que corresponda a los conjuntos $(A-B)-C$ y $A-(B\cap C)$ se ve que no corresponden a los mismos conjuntos; esto es, no son iguales [ver gráfico siguiente].

Los *diagramas de Venn-Euler* son de mucha ayuda para estudiar la validez de propiedades sobre conjuntos, y especialmente en problemas como el indicado antes.



En el gráfico de la izquierda se puede observar que $(A-B)-C$ corresponde a $A-(B\cup C)$. La prueba de esta propiedad se deja como ejercicio.

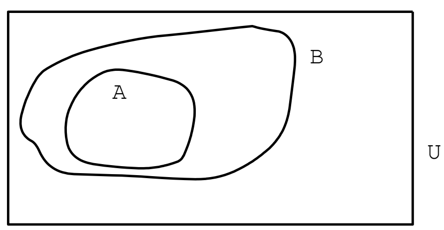
Examine también las igualdades que se presentan a continuación y argumente si existen o no errores en ellas (indique las propiedades que se utilizaron o los errores cometidos, según sea el caso).

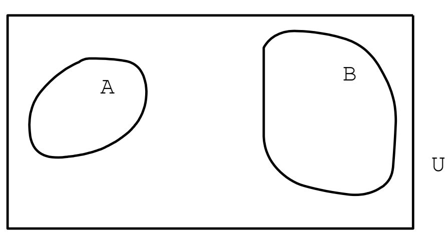
$$
\begin{aligned}
A-(A-B) &= \\
&= A\cap\left(A\cap B^c\right) \\
&= (A\cap A)\cap B^c \\
&= A\cap B^c \\
&= A-B
\end{aligned}
$$

Escriba los argumentos a la derecha de cada "paso" o señale los errores que se han cometido y explique.

Dados dos conjuntos, digamos A y B, ambos contenidos en un tercero, digamos U (recordamos que este U no simboliza al conjunto Universal de Cantor, pues este conjunto no existe en nuestra axiomática), podemos estudiar la contención entre A, B, A^c y B^c. Por ejemplo si (1) $A\subset B$, ¿es cierto que $A^c\subset B^c$ o que $A^c\supset B^c$?, etcétera. Y si (2) $B\subset A^c$, ¿Es $A^c\subset B$?, etcétera.

En los gráficos adjuntos se presentan las posibilidades etiquetadas con (1) y (2), **estudie a través de ellos estas preguntas**.





En estas ideas es que se fundamenta la propiedad que procedemos a probar (aunque una de sus partes se dejará como actividad al grupo).

(i) A es subconjunto de B si y sólo si el complemento de B es subconjunto del complemento de A.
(ii) B es subconjunto del complemento de A si y sólo si A es subconjunto del complemento de B.

Propiedad.

(i) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$
(ii) $B \subset A^c \Leftrightarrow A \subset B^c$, $\forall A, B$

Prueba [de (i)]
($\Rightarrow$)
Como, por hipótesis, $A \subset B$, se tiene que $x \in A \Rightarrow x \in B$ (definición de subconjunto). Sabemos además que el contrarrecíproco de esta proposición es verdadero, esto es, $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, entonces también es cierto que $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$. Por tanto $B^c \subset A^c$ (definición de subconjunto).
La prueba de (ii) se deja al lector.

Dejamos también al lector la prueba de ($\Leftarrow$).

Actividades y Algunos Proyectos

A1: *Sobre la complementación*

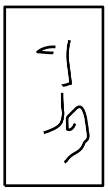
El complemento de un conjunto A en un determinado conjunto U se definió así $A_U^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$. Aunque como se puede observar, también es posible definirlo de la forma $A_U^c = U - A$. Ya comentamos que en caso que U se sobreentienda o no haya lugar a confusiones, se puede omitir el subíndice U en el símbolo A_U^c y usar simplemente A^c. Teniendo esto presente responda las siguientes preguntas:

(1) ¿Cuál es el complemento del conjunto $\{0\}$ en *N*? Esto es, $\{0\}_N^c = ?$

¿Cuál es el complemento del conjunto $\{0\}$ en el conjunto $\{0\}$?

(2) $\{0\}^{c}_{\{0\}} = ?$

(3) Sea $A^{c}_{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, ¿qué elementos están en A?

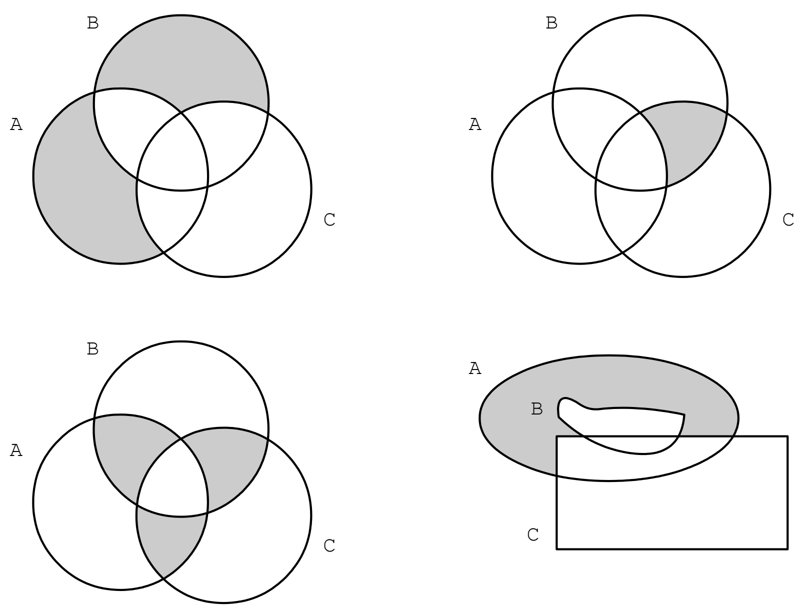


(4) Sea $B^{c}_{R} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \ b \neq 0 \ \ y \ \ a, b \notin Z \right\}$, ¿quién es B?, ¿qué elementos posee?

A2: ***Sobre diagramas***

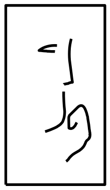
Hasta ahora siempre hemos representado en diagramas de Venn ciertos conjuntos ya definidos, pero no lo contrario; esto es, dado un diagrama de Venn expresar qué conjunto representa la región sombreada en él. Éste es precisamente el objetivo de esta actividad.

Exprese en términos de conjuntos y sus operaciones las regiones que están sombreadas.



A3: ***Propiedades de la complementación***

Pruebe, en caso que sean ciertas, las propiedades que se presentan; en caso contrario exponga un contraejemplo.
Considere a A un subconjunto de U.



(1) A unido con el complemento de A en *U* es igual que *U*.
(2) A interceptado con el complemento de A en *U* es igual que vacío.

Determine cuáles de las proposiciones (3), (4), (5) y (6) son verdaderas y cuáles falsas.

(1) $A \cup A_U^c = U$

(2) $A \cap A_U^c = \varnothing$

(3) $\left(A_U^c\right)_U^c = A$

(4) $\left(A_U^c\right)_U^c = \varnothing$

(5) $U_U^c = \varnothing$

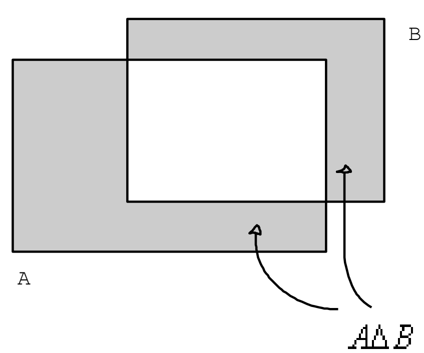
(6) $\varnothing_U^c = U$

A4: *Diferencia Simétrica* $A\Delta B$

□ Diferencia simétrica.

Observe que en $A\Delta B$ están los elementos que pertenecen a A o a B exceptuando los que pertenecen a la intersección de A y B.

Dados dos conjuntos A y B, se denomina **diferencia simétrica de A y B** al conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$ y se denota por $A\Delta B$. Es decir, los elementos de $A\Delta B$ están en la unión de A y B pero no en la intersección de A y B. [Ver gráfico].



(1) Sean $J = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ y $K = \{2, 4, 6, 8\}$, determine $J\Delta K$. ¿Es igual $J\Delta K$ a $K\Delta J$? ¿Por qué?

(2) Si $M \Delta N = \{1\}$, aporte ejemplos de M y N que verifiquen esto.

(3) Pruebe que:

$A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ y además

$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

(4) ¿Se cumplirá la asociatividad para la *diferencia simétrica*?

(5) Considere un conjunto cualquiera A y al conjunto vacío $\varnothing$. ¿A qué es igual $A \Delta \varnothing$? ¿Y $A \Delta A$?

El padre de **Georg Boole**, de profesión zapatero, era aficionado a las matemáticas. Se cree tuvo mucha influencia en la formación de su hijo. Boole (inglés, 1815-1864), daba clases particulares de matemática desde los 16 años. Escribió, entre otras obras: El análisis matemático de la lógica (1847) e Investigación sobre las leyes del pensamiento (1854). En la primera de las citadas se funda la lógica como un álgebra, conocida como el ***Álgebra de Boole*** o ***Álgebra Booleana***.

Los símbolos $\wedge$ y $\vee$, así como los utilizados para representar a las identidades (1 y 0) son etiquetas. Bien pueden emplearse otros símbolos.

B1: *Álgebra de Boole*

Un conjunto no vacío B se dice que posee la estructura de Álgebra de Boole, si están definidas en B dos operaciones binarias e internas [esto es: cada operación asocia a dos elementos de B con un elemento también de B], las cuales denotaremos por $\vee$ y $\wedge$, que verifican todas las propiedades siguientes.

(a) Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son **conmutativas**.

$$a \wedge b = b \wedge a$$
$$a \vee b = b \vee a$$

$\forall\ a, b \in B$.

(b) Se cumplen las **leyes distributivas** de $\wedge$ con respecto a $\vee$, y viceversa.

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$\forall\ a, b, c \in B$. La primera ley es la distributiva de $\wedge$ con respecto a $\vee$; la segunda, la distributiva de $\vee$ con respecto a $\wedge$.

(c) En B hay dos elementos en particular, que aquí denotamos por **0** y **1**, que verifican:

$$a \wedge 1 = a$$
$$a \vee 0 = a$$

$\forall\ a \in B$.
A los elementos 1 y 0 se les llama **identidad** para las operaciones $\wedge$ y $\vee$, respectivamente.

(d) Dado $b \in B$, $\exists\ b' \in B$ tal que:

$$a \wedge a' = 0$$
$$a \vee a' = 1$$

Observaciones:
La notación que se utilizó para las operaciones definidas en B, esto es, $\wedge$ y $\vee$, no hace alusión a alguna idea en particular [como por ejemplo a las operaciones entre proposiciones], son en realidad etiquetas. **Bien pueden sustituirse por otros símbolos**. La misma observación se aplica para las identidades con respecto a $\wedge$ y a $\vee$; pueden escogerse otros símbolos distintos a **1** y a **0**.

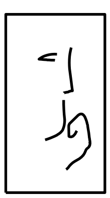
Un ejemplo de Álgebra de Boole: el de las partes de un conjunto

Consideremos a X un conjunto cualquiera y a $B = P(X)$, el conjunto de las partes de X. Aquí las operaciones $\wedge$ y $\vee$, son respectivamente la intersección ($\cap$) y la unión de conjuntos ($\cup$).

(1) ¿Qué elementos de B representan las identidades a las que se refiere la condición (c) en la definición de Álgebra de Boole?, en otras palabras, ¿cuál es el 1 y el 0 en B?

(2) Luego de responder la pregunta anterior, puede abordar ésta: ¿qué representa a' en B?, ¿qué representa $a \wedge a' = 0$? De forma similar: ¿qué representa $a \vee a' = 1$?

(3) ¿Es $B = P(X)$ un Álgebra de Boole?



El Álgebra de Boole de las Proposiciones

El conjunto de las proposiciones también posee la estructura de Álgebra de Boole. Dejamos al lector la interpretación de las condiciones (a), (b), (c) y (d) en términos de proposiciones y sus valores de verdad, y de las operaciones entre ellas.

Construya, además, una tabla comparativa:

CONDICIONES	*Álgebra de Boole de las Proposiciones*	Álgebra de Boole de las Partes de un Conjunto
$B \neq \varnothing$		
$\vee$ $\wedge$	$\vee$ $\wedge$	$\cup$ $\cap$
$a \wedge b = b \wedge a$ $a \vee b = b \vee a$		
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$		
0 1		$\varnothing$ A
$a \wedge 1 = a$ $a \vee 0 = a$		
a'		A^c
$a \wedge a' = 0$ $a \vee a' = 1$		

Algunas lecturas recomendadas

Babini, J. (1980). *Historia de las ideas modernas en matemática* (3ª ed.). [1ª ed. de 1967]. Washington, D.C.: Secretaría General de la Organización de los estados Americanos.

Bourbaki, N. (1968). *Elements of mathematics. Theory of sets*. [Traducción del original publicado en francés *Éléments de Mathématique, théorie des esembles*, por Hermann]. Paris: Hermann, publishers in arts and science; Addison-Wesley publishing company.

Kostrikin, A. (1983). *Introducción al álgebra* (2ª ed.). [1ª ed. de 1978]. Moscú: Mir.

Montoso, A. (Coord. Ed.) (1973). *La nueva matemática*. Navarra, España: Salvat Editores.

Rojo, A. (1972). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Russell, B. (1903). *The principles of mathematics*. Cambridge: The University Press.

ÍNDICE ANALÍTICO Y DE NOMBRES

El Autor

WLADIMIR SERRANO GÓMEZ es *Profesor de Matemáticas* de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Miranda (IPM) (1998, *Magna Cum Laude*) y *Magíster en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática* (2004). Actualmente cursa el *Doctorado en Educación* de la Universidad Central de Venezuela en el marco del Proyecto Alma Mater impulsado por el ejecutivo nacional, la OPSU-CNU y la Universidad. Laboró desde 1998 hasta 2000 como profesor contratado adscrito a los departamentos de Práctica Profesional y, Ciencias Naturales y Matemática del IPM. Entre 2000 y 2002 formó parte del *Programa de formación de docentes generación de relevo* de este mismo instituto. Y a partir de 2002 es profesor ordinario a tiempo completo en el IPM, adscrito al Departamento de Ciencias Naturales y Matemática desempeñándose en los cursos de álgebra y estadística. Ha laborado también en la III etapa de la Educación Básica y en la Educación Media, Diversificada y Profesional.
Es miembro desde 2002 del *Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática* (GIDEM) y actualmente es presidente de la Asociación Venezolana de Educación Matemática en la Región Capital (ASOVEMAT-Región Capital).