5

Quinto año

Matemática

Educación Media

La Matemática y el vivir bien

Matemática
Quinto año

Nivel de Educación Media del Subsistema de Educación Básica

Hugo Rafael Chávez Frías
Presidente de la República Bolivariana de Venezuela

Maryann del Carmen Hanson Flores
Ministra del Poder Popular para la Educación

Maigualida Pinto Iriarte
Viceministra de Programas de Desarrollo Académico

Trina Aracelis Manrique
Viceministra de Participación y Apoyo Académico

Conrado Jesús Rovero Mora
Viceministro para la Articulación de la Educación Bolivariana
Viceministro de Desarrollo para la Integración de la Educación Bolivariana

Maigualida Pinto Iriarte
Directora General de Currículo

Neysa Irama Navarro
Directora General de Educación Media

Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012
Primera edición: Febrero 2012
Tiraje: 400.000 ejemplares
Depósito Legal: lf51620123702602
ISBN: 978-980-218-344-9
República Bolivariana de Venezuela

DISTRIBUCIÓN GRATUITA

Coordinación General de la Colección Bicentenario
Maryann del Carmen Hanson Flores

Coordinación Pedagógica Editorial de la Colección Bicentenario
Maigualida Pinto Iriarte

Coordinación General Logística y de Producción de la Colección Bicentenario
Franklin Alfredo Albarrán Sánchez

Coordinación Logística
Hildred Tovar Juárez
Jairo Jesús Bello Irazabal
Jan Thomas Mora Rujano

Revisión Editorial de la Colección Bicentenario
Norelkis Arroyo Pérez

Asesoría General Serie Matemática
Rosa Becerra Hernández
Castor David Mora

Coordinación Editorial Serie Matemática
Wladimir Serrano Gómez

Autoras y Autores
Ana Duarte Castillo
Andrés Moya Romero
Ángel Míguez Álvarez
Darwin Silva Alayón
Hernán Paredes Ávila
Jorge Luis Blanco
José Gascón Márquez
Keelin Bustamante Paricaguan
Mariagabriela Gracia Alzuarde
Norberto Reaño Ondarroa
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez
Zuly Millán Boadas

Revisión de Contenido
Andrés Moya Romero
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez

Biografías
Walter Beyer

Corrección de Textos
Doris Janette Peña Molero
Marytere de Jesús Buitrago Bermúdez

Coordinación de Arte
Himmaru Ledezma Lucena

Diseño Gráfico
Morely Rivas Fonseca

Ilustraciones
Himmaru Ledezma Lucena
Morely Rivas Fonseca
Rafael Pacheco Rangel

Diagramación
Manuel Arguinzones Morales
Mariana Lugo Díaz

Estudiantes de la Patria Grande

Una simple mirada a nuestro entorno nos revela un sinnúmero de relaciones matemáticas. Bien sea al leer la prensa, al disfrutar de una obra teatral, de danza o musical, al jugar ajedrez, al chequear la factura de electricidad, e incluso, al ver televisión. Las lecciones de este libro nos pueden llevar a conocer a profundidad algunos de los lados matemáticos de tales situaciones y, al mismo tiempo, adentrarnos en la Matemática en sí misma. Aunque, como hemos visto en los libros de la Colección Bicentenario, este "recorrido" también se puede dar en sentido contrario, es decir, un concepto matemático puede llevarnos a encontrar sus aplicaciones en el contexto, en la realidad y en otras disciplinas.

Una mirada matemática del mundo resulta necesaria e indispensable para desenvolvernos en él. Este libro se acerca, con cada una de sus lecciones, a tal propósito.

La reflexión y la crítica son parte esencial de la formación integral de todas y todos; y la Educación Matemática tiene mucho que ver con estos aspectos.

En este libro abordamos una minúscula parte de situaciones *matematizables*. Así, temas como el uso del Internet por parte de las y los jóvenes, la incorporación plena de Venezuela al **MERCOSUR**, las soluciones de ciertas ecuaciones en las tablillas (o tabletas) babilónicas, la idea de cifrar mensajes, problemas cotidianos vinculados con la producción de fertilizantes, e incluso, de pan, los sesgos o rotaciones que hacemo a las fotografías o cualquier otra superficie plana, la presencia de los poliedros en áreas como el arte y la filosofía a lo largo de la historia, el radio de alcance de una emisora comunitaria, la naturaleza de la trayectoria de ciertos cuerpos celestes, el diseño computacional de viviendas o complejos habitacionales, y la acción de rotar o girar cuerpos con respecto a algún eje, nos llevan de inmediato a conceptos estadísticos, probabilísticos, geométricos y algebraicos, tal como verán a lo largo de estas páginas.

Este libro es ya de ustedes. ¡Hagan suyas sus ideas en el marco de un trabajo colectivo y transiten otros horizontes más allá de los que aquí se delinean!

Además, este libro se dedica a todas y todos quienes día a día se forman para contribuir con sus estudios, sus metas, ideas, trabajo y amor, la patria grande que soñó **Simón Bolívar**. Se dedica también a nuestras y nuestros atletas, en especial las y los paralímpicos, de alta competencia o no, con medallas o no, quienes representan un inmejorable ejemplo de dedicación y esfuerzo individual y colectivo, intelectual y físico, moral y ético; un impulso para el vivir bien de nuestras niñas, niños, jóvenes, adultos y adultos mayores.

Docentes, madres, padres y representantes de la Patria Grande

Las y los profesores de la *Educación Media*, así como de la *Educación Inicial* y *Primaria* y de los demás niveles y modalidades del Sistema Educativo venezolano, somos corresponsables, junto con los familiares, la comunidad y otros actores sociales, de la educación de las y los jóvenes. Esta digna labor, la educación, ha convocado a quienes ven en la formación, investigación, reflexión, acción y crítica, elementos indispensables de la cotidianidad, no solo del contexto más cercano al aula de clases, sino en el que abarca a la sociedad toda. Tan alta tarea tiene un reconocimiento infinito. Nunca olvidamos a nuestras profesoras y profesores; ellas y ellos, incluso, orientan el desempeño presente y futuro de nuestra juventud en el camino de construcción de la patria; he allí, por ejemplo, al maestro Simón Rodríguez y su histórico legado.

Este libro de Matemática de la *Colección Bicentenario* representa un aporte medular para la concreción práctica de estos fines.

Estamos seguras y seguros que este libro, ya en sus manos, se convertirá en una herramienta para hacer de la investigación algo natural a sus cursos, en especial sobre temas que son importantes para la comunidad, la región, el país y el mundo, en los que se comprendan sus vínculos con los conceptos matemáticos, se profundice en su estudio, donde se discutan y analicen las ideas y propuestas de solución de los problemas que se presenten y de cómo plantearlos, donde se construyan o analicen modelos matemáticos que describen ciertos fenómenos de la naturaleza o la sociedad, se emprendan actividades, proyectos individuales y colectivos y se fortalezca la ética social, precisamente algunas de las características destacadas de cada uno de los libros de esta colección.

Ciertos medios de comunicación, en los tiempos modernos, han priorizado lo banal, el sinsentido, la moda, en la opinión sin argumentos, es decir, buscan un alejamiento de la realidad. La Educación Matemática que mostramos en las páginas de este libro se contrapone a esa situación y provee a nuestros jovenes de la reflexión necesaria para la construcción de la ciudadanía, la patria, la independencia y la ética social.

El conocimiento de la Matemática y del lado matemático de las diversas situaciones y problemas resulta indispensable para esa construcción.

Entonces, sigan a profundidad, cada una de las lecciones que comprende el libro. Disfrútenlas junto a sus estudiantes, hijas, hijos y representados, pues ellas y ellos serán el punto de partida para los cambios y transformaciones tangibles e intangibles que requiere nuestra sociedad para hacer de ésta la patria que todos soñamos.

Índice

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Jesús S. González (1930-2008)

Nace Jesús en la isla de Margarita (Estado Nueva Esparta), específicamente en la población de Juan Griego, el 3 de junio de 1930, siendo sus padres Aurora González Granado y Aquiles Leandro Moreno.

A los 7 años viene a vivir a Caracas y a los 8 fue atropellado por un vehículo, produciéndole una grave lesión en su pierna derecha, hecho que cambia radicalmente su vida ya que esto devino en osteomelitis, lesión que por varios años le impidió caminar, lo cual pudo volver a hacer a partir de los 18 años, y además le ameritó unas 14 operaciones de las aproximadamente 30 a las que se sometió a lo largo de su existencia.

Estudió la primaria en las escuelas República del Perú y República de Bolivia y la secundaria en los liceos Fermín Toro y Juan Vicente González, graduándose de bachiller en Ciencias Físicas y Matemáticas, el 6-10-1950.

Sus deseos de superación lo llevaron a iniciar estudios superiores en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), obteniendo en 1955 el título de Profesor de Educación Secundaria y Normal en Matemáticas y Física. Ingresa posteriormente a la naciente Facultad de Ciencias de la UCV, en la licenciatura de matemáticas, obteniendo en 1962 el título de Licenciado en Matemáticas, siendo parte de la primera promoción.

Viajó a Brasil para realizar cursos de profundización en matemáticas. Luego, viajó a Francia y en 1968/69 trabaja con el profesor André Revuz en temas de Didáctica de la Matemática. En 1969-1970 cursa estudios matemáticos en Lille (Francia) y obtiene en 1971 el Diplôme d'Études Approfondies (D. E. A) en Matemáticas Puras con calificación "Sobresaliente". En 1973-1974, retornó a Francia y comenzó sus estudios doctorales en la Universidad de París, los cuales por problemas personales tuvo que abandonar temporalmente, retornando a Venezuela. Aquí los continúa, culminando exitosamente, hasta obtener el título de Doctor en Ciencias (Matemáticas) en la UCV, en 1975, siendo el primero a quien se le otorga este diploma en esta casa de estudios.

Es profesor en diversas instituciones de educación primaria, media y universitaria. Cabe destacar su labor en el Instituto Pedagógico y en la Universidad Central de Venezuela (Facultades de Ingeniería y de Ciencias). Posteriormente, funda en la recién creada Universidad Nacional Abierta los estudios de Matemáticas y de Educación Matemática. Desarrolla allí un ambicioso programa de elaboración de textos.

Participa en los años 60 y 70 en varias de las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM). La cuarta se desarrolló en Caracas en 1975 y el profesor González tuvo allí una destacada actuación. Asiste, en 1976, al III Congreso Internacional de Educación Matemática, en la ciudad de Karlsruhe (Alemania).

A raíz de la reforma educativa iniciada en 1969, se dedica a elaborar materiales y a dictar cursillos difundiendo las nuevas ideas. Ya antes había colaborado con el Ministerio de Educación revisando algunos programas de estudio, lo cual también hizo posteriormente.

Fue activista del Partido Comunista de Venezuela, en la época del pérezjimenismo, y a la vez estudiante y docente de aula en diversas instituciones. Asimismo, tuvo una destacada actuación dentro del gremialismo universitario. Mantuvo en alto, hasta el final de sus días, sus ideales, los cuales fueron también su guía para la acción.

Recibió la Orden 27 de junio y la Orden José María Vargas, fue padrino de las promociones de profesores de matemáticas del IPC de los años 1964 y 1967.

El 6 de febrero de 2008 falleció Jesús S. González, en la ciudad de Caracas, dejando un legado imperecedero para las futuras generaciones.

¡Internet para tod@s!

Indagando acerca del uso de Internet por las y los adolescentes

En el año 2006, en nuestro país se realizó un trabajo de investigación sobre las ventajas y riegos del uso de Internet desde la opinión de las niñas, los niños y adolescentes, y desde la perspectiva de sus derechos y desarrollo integral. Este trabajo se hizo a solicitud del Centro Comunitario de Aprendizajes (CECODAP), organización social venezolana que trabaja en la promoción y la defensa de los derechos de niños, niñas y adolescentes, y con la cooperación del Fondo Internacional de Ayuda a la Infancia de las Naciones Unidas en Venezuela[1] (UNICEF, por sus siglas en inglés).

1: Disponible en http://www.unicef.org/venezuela/spanish/index.html y http://www.unicef.org/venezuela/spanish/Internet_ventajas_y_riesgos.pdf

En este informe aparecen muchos datos estadísticos que nos gustaría que ustedes revisen y discutan tanto en sus clases de Matemática como en las de otras asignaturas, dado que es un tema de interés y de mucha actualidad.

Por ejemplo, para el cierre del primer semestre del año 2012, la *Comisión Nacional de Telecomunicaciones* de la República Bolivariana de Venezuela (CONATEL) anunció en su portal que "*el número de suscriptores de Internet en el país registró un incremento de 12,3% (...) La estimación del número de usuarios ascendió a 12,1 millones, lo que evidencia una variación positiva de 5,8%. Con esta cifra se estima que 41 de cada 100 habitantes utilizan el servicio de Internet*"[2] . Esto no solo contribuye al logro de unas de las **Metas del Milenio**, planteadas en el marco del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD); de hecho, en su meta 8.b. establece que ésta debe darse "en cooperación con el sector privado, dar acceso a los beneficios de las nuevas tecnologías, especialmente las de la información y las comunicaciones"[3] ; sino que también abre las puertas a la indagación acerca de qué uso se le está dando a Internet y tomar las decisiones que sean necesarias para su optimización.

Si de acuerdo con lo dicho, nos interesara observar **cuál es el comportamiento del número de horas que dedican diariamente las y los adolescentes al uso de Internet por género**, pudiésemos analizar las medidas de tendencia central y medidas de dispersión de la variable número de horas y comparamos qué ocurrió entre las adolescentes y los adolescentes. En este caso, el estudio que se realiza es un análisis **univariante**, debido a que solo se está considerando una variable para el cálculo de las medidas, aunque después se haga un análisis comparativo por género.

También nos puede interesar conocer **cuál es la relación que existe entre el número de horas dedicadas diariamente por las y los adolescentes al uso de Internet y su edad en años cumplidos**. Esto nos permitiría ver si a medida que las muchachas y los muchachos tienen más edad les dedican más o menos tiempo al uso de Internet. En este caso, estaremos analizando de manera simultánea dos variables y además de lo que se han aprendido en años anteriores podemos añadir dos tipos de análisis que pasaremos a explicar a continuación.

El tratamiento estadístico que han realizado, hasta ahora, en sus estudios de *Educación Media* se asocia a una variable por vez, es decir, se ha utilizado un **análisis descriptivo univariante**. En este año vamos a introducir algunos conocimientos del análisis estadístico descriptivo considerando dos variables de manera simultánea.

2: Disponible en http://www.conatel.gob.ve/#http://www.conatel.gob.ve/index.php/principal/noticiacompleta?id_noticia=3151

3: Disponible en http://www.pnud.org.ve/content/view/176/169

Si se toma una muestra de once estudiantes del liceo donde ustedes estudian, se les pregunta su edad y cuántas horas promedio se conectan a Internet, podríamos obtener datos como los plasmados en la *tabla* 1:

Tabla 1. Datos recolectados de las variables: *Edad del estudiante* y *Horas promedio diarias de conexión a Internet*.

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Edad	15	14	17	16	15	16	15	13	17	16	16
Horas	2	0	3	4	3	4	3	1	4	3	5

Calculamos entonces las medidas estadísticas para cada variable, como mostramos en la *tabla* 2.

Tabla 2. Medidas estadísticas por variable.

Medida	Edad	Horas
Modo	16	3
Mediana	16	3
Media	15,45	2,91
Desviación estándar (S)	1,157	1,379

Se puede hacer un análisis descriptivo de cada variable, recordando que el *Modo* indica el valor más observado, en la muestra de estudiantes la edad modal es 16 años y el número más frecuente de horas de conexión es 3.

La *Mediana*, que muestra el valor que divide en dos mitades al grupo encuestado, indica que la mitad de los estudiantes tienen 16 años de edad o menos y la otra mitad tiene 16 años o más. En el caso de las horas de conexión, la mitad de los estudiantes se conecta en promedio 3 horas o menos diarias y la otra mitad, 3 horas diarias promedio o más.

La *Media aritmética* y la *Desviación estándar* (*S*), que por lo general se analizan juntas, muestran que estos estudiantes varían alrededor de su media en un poco más de un año de edad y el número de horas varía en una hora y unos minutos más, por lo que puede decirse que con relación a la edad y las horas diarias promedio de conexión, son bastante parecidos entre sí.

Como en la realidad los fenómenos y las cosas no ocurren de manera aislada, es muy factible que se quiera analizar la relación que pueda existir entre estas dos variables.

Comenzando un Análisis Bivariante

Observemos de nuevo los datos presentados en la *tabla* 1. Se trata de ver si los estudiantes de menor edad están acompañados de valores númericos altos, bajos o medios en la variable horas de conexión a Internet. En este caso las edades menores (13 y 14 años) están acompañadas de los valores más bajos de las horas, por su parte la mayor cantidad promedio de horas de conexión se asocian a las mayores edades, aunque no siempre es así. Y algunos valores medios de una de las variables se relacionan con los valores medios de la otra variable.

Lo que se acaba de analizar en estos datos puede ser visualizado de mejor manera, si se recurre a la vía gráfica en la que cada par ordenado se representa en un plano cartesiano como un punto. Esta gráfica puede ser construida manualmente, preferiblemente en papel milimetrado o con el uso de una herramienta computarizada, como una hoja de cálculo. A continuación, en el *gráfico* 1, exponemos una manera de presentar los mismos datos.

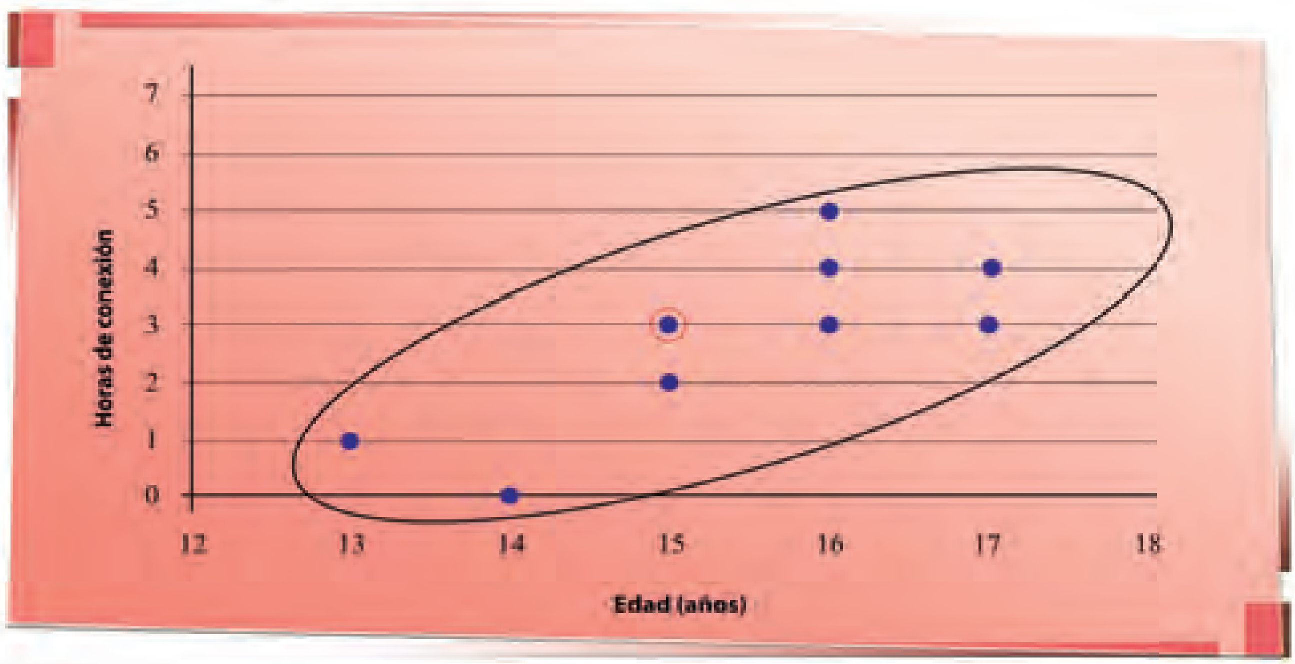


Gráfico 1. Relación entre la edad de adolescentes y las horas promedio diarias de conexión a Internet

En esta gráfica, conocida como *diagrama de dispersión* o *dispersigrama*, en el *eje* de las abscisas (o *eje* X), se colocan en forma ordenada los datos de la variable edad, para abreviar y para que los puntos en el plano estén mejor presentados no se comienzan los datos en el origen cero sino que se comienza en un valor lo más cercano posible al valor mínimo observado de la variable (13) y que lo incluya, por eso en este caso se empieza en 12 años de edad, aunque se podía haber empezado en 10 años. En el *eje* de la ordenada (*eje* Y) se colocan los valores escalados de la variable "horas de conexión".

Cada punto en el espacio corresponde a un par ordenado de valores, de manera que el primer punto que se observa (de izquierda a derecha), pertenece al estudiante 8 de la tabla que posee el par $(13{,}1)$, y se lee "un estudiante de 13 años se conecta en promedio 1 hora diaria a Internet". También puede observarse que como el par $(15{,}3)$ se repite dos veces, al punto en el espacio se le dibuja un círculo concéntrico a su alrededor tantas veces se repita –en este caso una vez.

Otro elemento que se utiliza para facilitar el análisis del **gráfico de dispersión** es la llamada **nube de puntos**, óvalo que se utiliza para evidenciar que los puntos en el espacio pueden tener una tendencia lineal (hacia la línea recta) y el sentido de su tendencia (directa o inversa).

En la medida que el óvalo sea más concentrado, más se parecerá a una línea recta, en caso contrario, mientras la nube sea más dispersa, la relación lineal entre las variables es menor. Si la nube de puntos tiene forma circular, el análisis apropiado es que "no existe relación lineal entre las variables o ésta es nula"; pero en ningún momento se dice que no hay relación. En algunos casos, la relación lineal se debilita porque la nube define más una relación curvilínea, en cuyo caso, la relación lineal no es la más adecuada para describir los datos.

Analizar el sentido de la nube de puntos implica que si el óvalo o nube de puntos va en ascenso, se dice que la relación es **directa** entre las variables o positiva, y si la nube de puntos va en descenso, la relación se dirá que tiene un sentido **inverso** o negativo.

Cuando estamos en presencia de una condición como la mencionada, en la que valores bajos de una variable se emparentan con valores bajos de la otra variable, y valores medios con valores medios y valores altos de una variable con valores altos de la otra variable, se dice que se está analizando una relación directa entre estas dos variables, aún cuando desde el punto de vista estadístico, la variabilidad propia de las características que se miden en la realidad, no nos permita establecer siempre que la relación es perfecta o idéntica a alguna función matemática.

Queda por medir el grado en que se relacionan estas dos variables, lo que quiere decir que no basta con analizar la dispersión de la nube de puntos para concluir el análisis descriptivo, sino que importa mucho conocer qué tan relacionadas están las variables, para lo cual se recurre al uso de fórmulas estadísticas que nos permitan minimizar las desviaciones entre los puntos en el espacio (valores reales) y los puntos de una recta hipotética (valores del modelo) que resumen el comportamiento bivariado de los datos.

En estadística:

Cuando realizamos un análisis en el que participan dos variables de manera simultánea lo llamamos análisis bivariante. Entre los análisis bivariantes se tiene el **análisis de correlación lineal simple (ACL)** y el **análisis de regresión lineal simple (ARL)**.

El calificativo de "simple" no se refiere a la simplicidad del método, sino a que solo participan dos variables en el análisis. En los casos en los que participen simultáneamente más de dos variables, el análisis de correlación puede ser **parcial** o **múltiple** y en el caso de regresión lineal se dice que es **múltiple**.

Para examinar la fuerza o grado con el que se relacionan dos variables (X y Y), se recurre a comparar en un cociente la variación conjunta de las dos variables con el producto de las desviaciones por separado de cada variable. En la medida que la covariación o variación conjunta es más pequeña que el producto de sus variaciones individuales, la fuerza de la relación es menor. Si por el contrario el producto de las variaciones de cada variable es menor que la variación conjunta, el grado de la relación entre X y Y será mucho mayor, pareciéndose su comportamiento cada vez más a una línea recta.

El coeficiente que mide la correlación lineal simple entre variables se conoce como el **Coeficiente de correlación r_{XY} de Pearson**, en honor al matemático que lo desarrolló. Su fórmula puede expresarse de diversas maneras, una de ellas es:

$$r_{XY} = \frac{\text{Covarianza } XY}{S_X \cdot S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{S_X \cdot S_Y}$$

También existe una fórmula que aunque parezca más difícil por lo extensa, resulta ser mucho más cómoda en cuanto a cálculos, porque requiere muy pocos, ésta es conocida como la **fórmula para datos brutos o sin procesar:**

$$r_{XY} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}}$$

Para aplicar esta última fórmula solo se requiere hacer los cálculos mostrados en la *tabla* 3.

Tabla 3. Columnas necesarias para calcular el Coeficiente de correlación r_{XY} de Pearson.

Estudiante	Edad X	Horas Y	X_iY_i	$(X_i)^2$	$(Y_i)^2$
1	15	2	30	225	4
2	14	0	0	196	0
3	17	3	51	289	9
4	16	4	64	256	16
5	15	3	45	225	9
6	16	4	64	256	16
7	15	3	45	225	9
8	13	1	13	169	1
9	17	4	68	289	16
10	16	3	48	256	9
11	16	5	80	256	25
Suma	170	32	508	2.642	114

Que al sustituir en la fórmula, quedaría:

$$r_{XY} = \frac{11 \cdot 508 - 170 \cdot 32}{\sqrt{11 \cdot 2.642 - 170^2} \cdot \sqrt{11 \cdot 114 - 32^2}} \approx 0,77$$

El coeficiente de correlación es un **valor** decimal con un rango entre cero y uno, $0 \leq r_{XY} \leq 1$, **que expresa el grado o fuerza de la relación lineal entre las variables X y Y.**

El signo, + ó –, que éste posea, **expresará el sentido de la relación lineal**, si es que existe, el cual puede ser directo cuando el signo sea positivo, o inverso cuando el signo sea negativo.

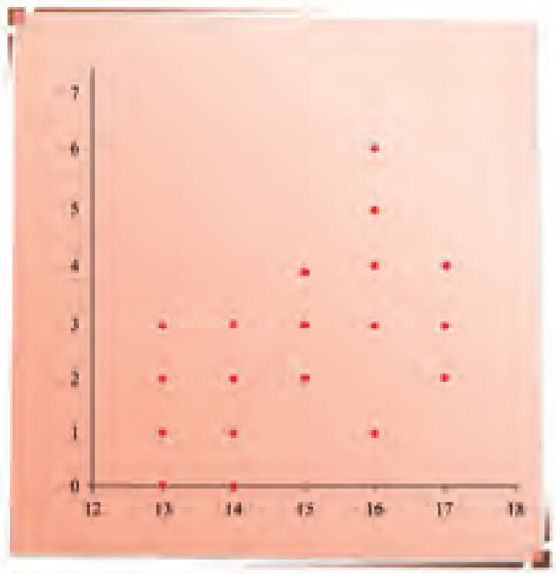
De manera que si el resultado es cero, se dirá que la relación lineal es nula o inexistente entre esas dos variables; en la medida que el valor del coeficiente r_{XY} sea mayor, mayor será el grado de asociación entre las variables, y si el coeficiente de correlación es igual a uno, la correlación entre las variables ha de ser perfecta y gráficamente debe representarse en una perfecta línea recta, por lo que las variables dadas se relacionan a través de una función lineal. Como el numerador de esta fórmula (variación conjunta) no puede ser mayor que el producto de las dispersiones individuales de cada variable, nunca el coeficiente de correlación ha de ser mayor al valor 1,00.

En el caso que se está analizando, el resultado (0,77) expresa la existencia de una fuerte relación lineal y directa entre la edad de las y los adolescentes de la muestra y el número de horas promedio diaria de conexión a Internet. Esto se traduciría en que muchas veces el mayor número de horas de conexión a Internet está asociado a adolescentes de mayor edad en ese grupo o también, que a menor edad se espera que muchos de estos adolescentes tengan menor tiempo de conexión diaria a Internet. Fíjense que no se dice "siempre" ocurrirá sino "muchas veces", por cuanto la relación lineal no es perfecta ($r_{xy} = 1$) y como es directa (o positiva) los valores bajos de una variable se emparentan con valores bajos de la otra variable y valores altos de X con valores altos de Y.

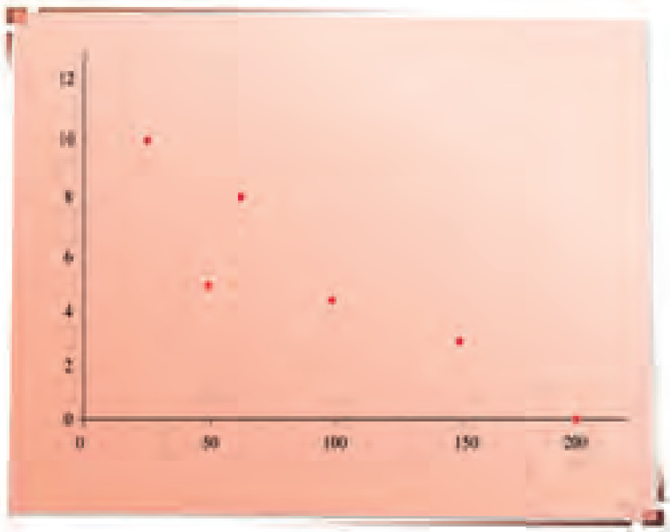
En el ACL se requerirá seleccionar dos variables que puedan tener alguna relación lógica o teórica y que sea de interés para ustedes verificar su asociación estadística, se pueden apoyar en la construcción y análisis del diagrama de dispersión y en la aplicación y análisis de un coeficiente de correlación.

Actividad

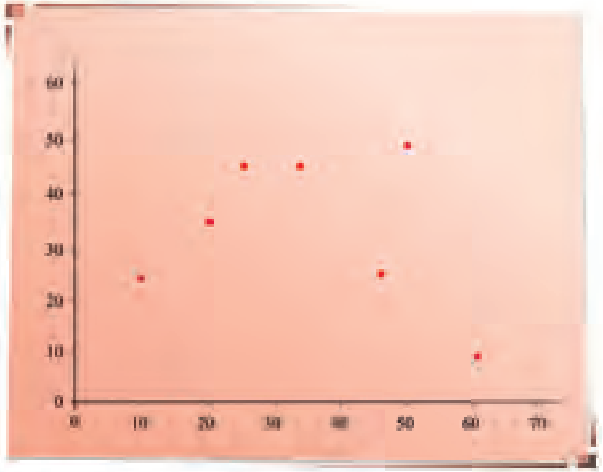
Para cada uno de los diagramas de dispersión que se presentan a continuación, analicen su comportamiento bivariante, planteen dos variables que puedan tener esa tendencia. Recuerden considerar el sentido y la dispersión de la nube de puntos.



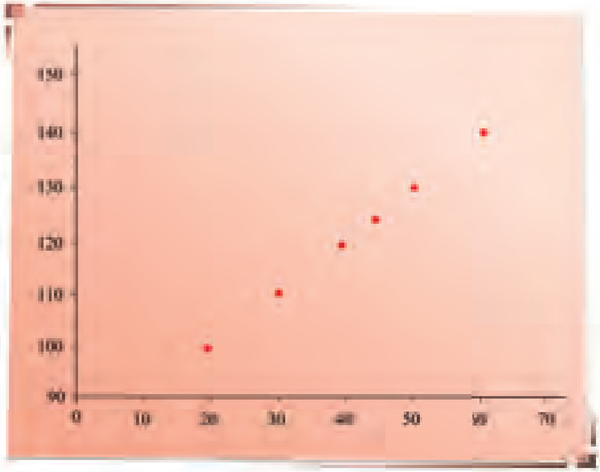
(a)



(b)



(c)



(d)

Investigación

Si les entusiasma la idea, éste pudiera ser el inicio de un problema para su proyecto de investigación en 5º año:

Recolecten en su liceo datos sobre las dos variables que hemos estudiado: *Edad del estudiante* y *Horas promedio diarias de conexión a Internet*.

- Apunten para cada estudiante el par de respuestas dadas. Pueden organizar una tabla de recolección como la que se presentó.

Apliquen el ACL, a ver si se encuentra el mismo grado y sentido de asociación, cuiden que no sean estudiantes de la misma edad por cuanto no tendríamos una variable y porque en la medida que una característica varía muy poco, el coeficiente de correlación disminuye su valor. Para ello deberán:

- Construir un diagrama de dispersión y analizar su comportamiento.
- Calcular e interpretar el resultado del coeficiente de correlación r_{XY} de Pearson.

Revisen el informe que se reseñó al inicio de esta lección que trata sobre datos de adolescentes venezolanos de la ciudad capital. Allí encontrarán datos de referencia y algunas otras informaciones de interés ¿Qué cambios han ocurrido en el comportamiento reseñado en ese informe en su liceo?

De la misma manera, recolecten datos en su comunidad y comparen en cuál de los dos grupos el grado de la relación es más intensa y si se mantiene que los grupos tengan el mismo sentido de la relación que el que estudiamos en esta lección.

Apoyen su análisis indicando los recursos tecnológicos con los que cuenta el liceo o su comunidad, tales como aulas de informática, Infocentros, CBit, ciber, conexiones privadas o equipos móviles.

Indaguen en Internet qué otros trabajos se han realizado al respecto, esto se ha hecho en otros países también, pueden orientar su búsqueda indicando como palabras claves "adolescencia e Internet" o "uso de Internet y adolescentes" y visitando direcciones electrónicas como:

www.slideshare.net/manarea/adolescentes-e-Internet;
www.ciamariaz.com/milo/eso07/1sesión 16-10-07.

Como parte de la historia de la Matemática, es importante buscar y leer acerca de los aportes del científico matemático británico **Karl Pearson** (1857-1936), precursor de la estadística matemática y fundador de la bioestadística, tanto para el análisis de correlación lineal como de otros conceptos estadísticos.


Karl Pearson

Socialización de resultados:

Presenten en clases los resultados obtenidos y conversen sobre las implicaciones que estos podrían tener en el rendimiento escolar, en el caso de las y los liceístas y en el trabajo comunal para con las vecinas y los vecinos.

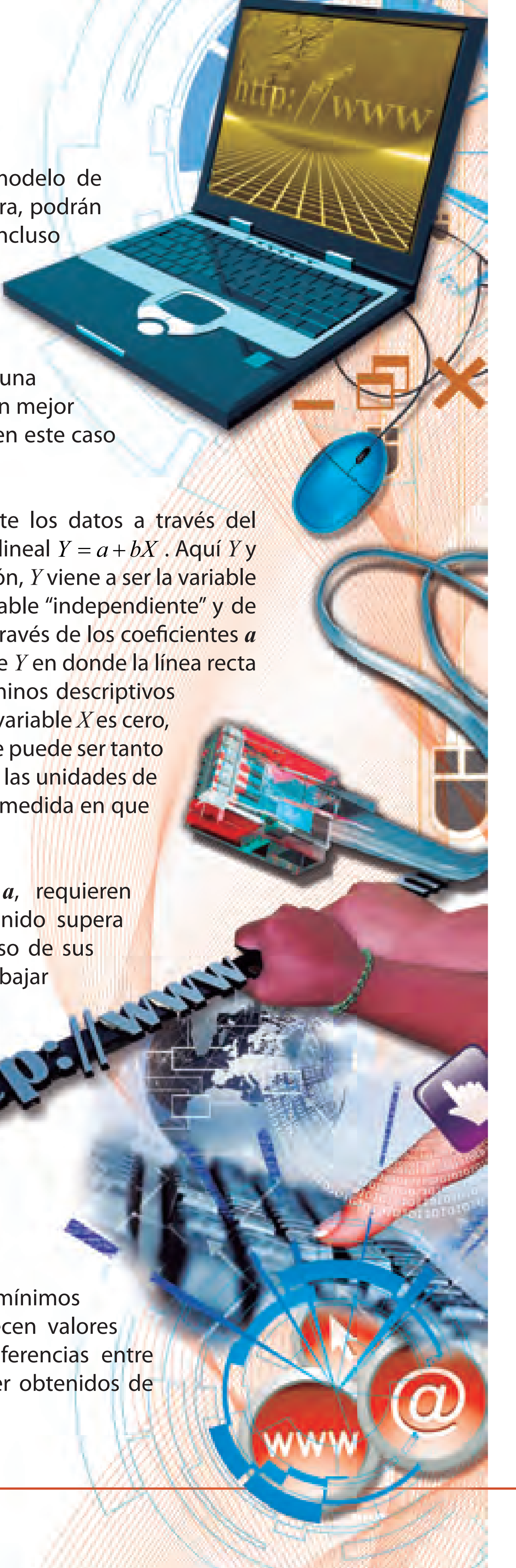
Comuniquen estos resultados por cualquiera de estos medios: cartelera, periódico mural, díptico, tríptico o emisora comunitaria al resto de sus compañeras y compañeros y generen alguna actividad de intercambio, reflexión y discusión entre la comunidad escolar o vecinal.

Las conclusiones a las que se llegue al describir con un **análisis de correlación lineal**, solo son referidas al grupo de datos que se está analizando y no pueden ser generalizadas a otros grupos.

Continuando el Análisis Bivariante

Otra manera de analizar estadísticamente de forma conjunta dos variables se hace al describir por medio de una ecuación o de una representación gráfica, el comportamiento de los datos.

En la realidad, los datos pueden comportarse de múltiples maneras, en el ejemplo que se ha expuesto sobre la relación entre horas de conexión a Internet y edad, la nube de puntos parecía ajustarse más a una línea recta. No obstante, hay variables que pueden comportarse como modelos curvilíneos (parábolas, exponenciales, sinusoidales, entre otros), pero también pueden presentar incorrelaciones, es decir, ningún tipo de relación modelable.



En esta lección trabajaremos exclusivamente con el modelo de la línea recta. En cursos universitarios, dependiendo de la carrera, podrán conocer el tratamiento estadístico para modelos curvilíneos e incluso el modelo lineal con mayor profundidad.

Aún cuando este análisis puede realizarse en forma independiente del Análisis de Correlación Lineal, se recomienda verificar primero si ambas variables son cuantitativas y si existe una fuerte relación lineal entre las variables, para así poder realizar un mejor ajuste al modelo que servirá de descriptor de la relación y que en este caso será el de la línea recta.

Lo primero que se hace para describir estadísticamente los datos a través del modelo de la línea recta es recordar la ecuación de una función lineal $Y = a + bX$. Aquí Y y X representan las variables en estudio. De acuerdo con la ecuación, Y viene a ser la variable "dependiente" de los cambios ocurridos en la variable X o variable "independiente" y de los cambios conjuntos entre X y Y, los cuales son expresados a través de los coeficientes ***a*** y ***b***. El coeficiente ***a*** representa el valor de la variable dependiente Y en donde la línea recta que representa a los datos hace intersección, pero que en términos descriptivos puede leerse como el valor de la variable Y cuando el valor de la variable X es cero, y ***b*** viene a ser la pendiente o grado de inclinación de la recta, que puede ser tanto positiva como negativa. En términos descriptivos, ***b*** representa a las unidades de incremento o decrecimiento de la variable dependiente Y en la medida en que la variable independiente X crece en una unidad de su medida.

Las fórmulas para obtener estos coeficientes ***b*** y ***a***, requieren para su desarrollo del uso del cálculo diferencial, este contenido supera las expectativas de este texto, sin embargo se puede hacer uso de sus expresiones matemáticas y en cursos más avanzados podrán trabajar y demostrar su desarrollo matemático.

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

Y,

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

Estas fórmulas surgen de la aplicación del método de mínimos cuadrados que se utiliza para el ajuste de curvas y nos ofrecen valores de ***a*** y ***b*** que minimizan las sumas de cuadrados de las diferencias entre los valores realmente observados Y_i y los valores que van a ser obtenidos de la aplicación de la ecuación de la recta Yc.

Considerando los cálculos realizados previamente para obtener el coeficiente de correlación r_{XY} de Pearson, entre las variables Edad y Horas promedios de conexión diaria a Internet por parte de estos estudiantes adolescentes, se pueden sustituir los valores requeridos por la fórmula del coeficiente b.

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}=\frac{11\cdot 508-170\cdot 32}{11\cdot 2.642-170^2}=0{,}9136\approx 0{,}91$$

El valor de a puede ser calculado al sustituir en su fórmula el recién calculado valor de b y los valores de las medias aritméticas que se habían suministrado en la *tabla* 2 de esta lección, solo que identificaremos a la *Edad* como la variable X y a las *Horas* como la variable Y. Por lo tanto,

$$a=\overline{Y}-b\overline{X}=2{,}91-\left(0{,}91\cdot 15{,}45\right)\approx -11{,}21$$

De donde,

$$Yc=-11{,}21+0{,}91X$$

Esta ecuación viene a describir el comportamiento de los datos de los once estudiantes muestreados en sus dos variables y permite el trazado de la recta que pasará por todos los valores promedios de Y para cada pareja de X, y que por mínimos cuadrados minimizará el margen de error que se puede cometer, bien sea por exceso o por defecto al calcular los valores estimados de Y.

De esta manera, para trazar la recta consideramos dos valores cualesquiera de la variable independiente X, por ejemplo 13 y 17 años de edad; al sustituirlos en la ecuación se obtendrán dos valores de Y (variable dependiente), uno para cada valor de X.

X (años)	Sustitución en ecuación	Yc (horas)
13	**$Yc = -11{,}21 + 0{,}91\ (13)$**	0,62
17	**$Yc = -11{,}21 + 0{,}91\ (17)$**	4,26

Es muy importante que respeten el orden de prioridad de las operaciones en la ecuación para que los resultados sean los apropiados, es decir, en la ecuación primero se multiplica la pendiente por el valor arbitrario de la variable X y luego se procede a la suma algebraica de este resultado con el valor de a.

Al graficar tanto los datos originales de X y de Y, así como la recta obtenida a través de los coeficientes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, se encontrará la recta que mejor se ajusta a estos datos, ya que al comparar cada valor con el de la recta estimada siempre será menor que si se compara con el valor de cualquier otra recta trazada en en ese plano (ver *gráfico* 2).

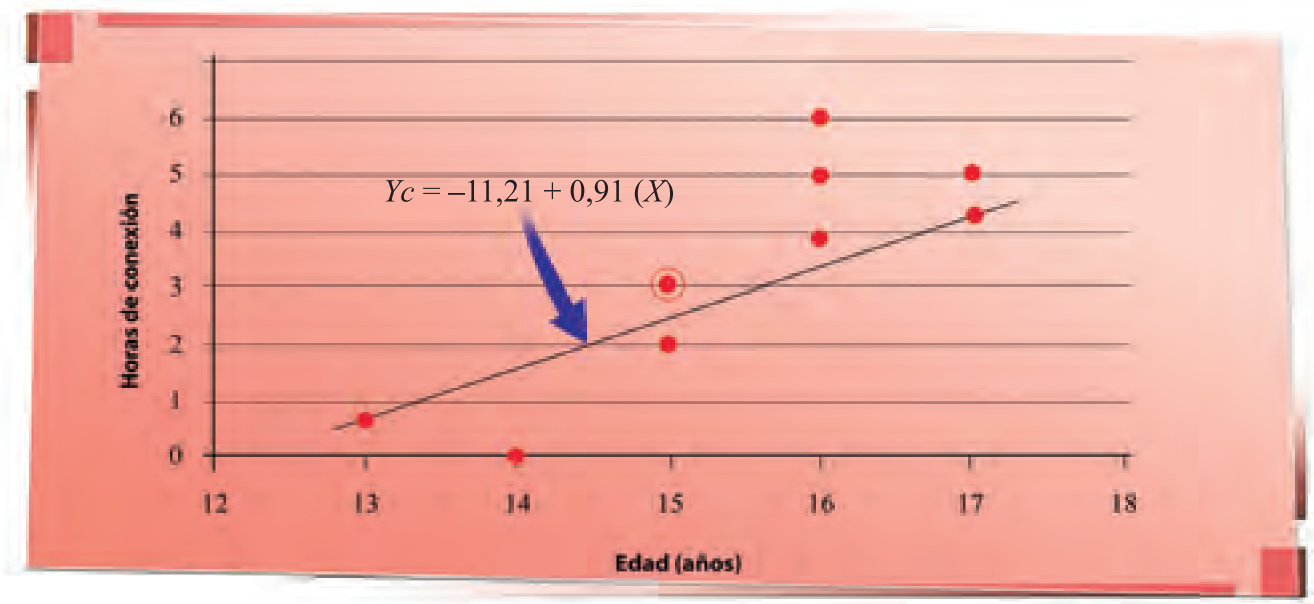
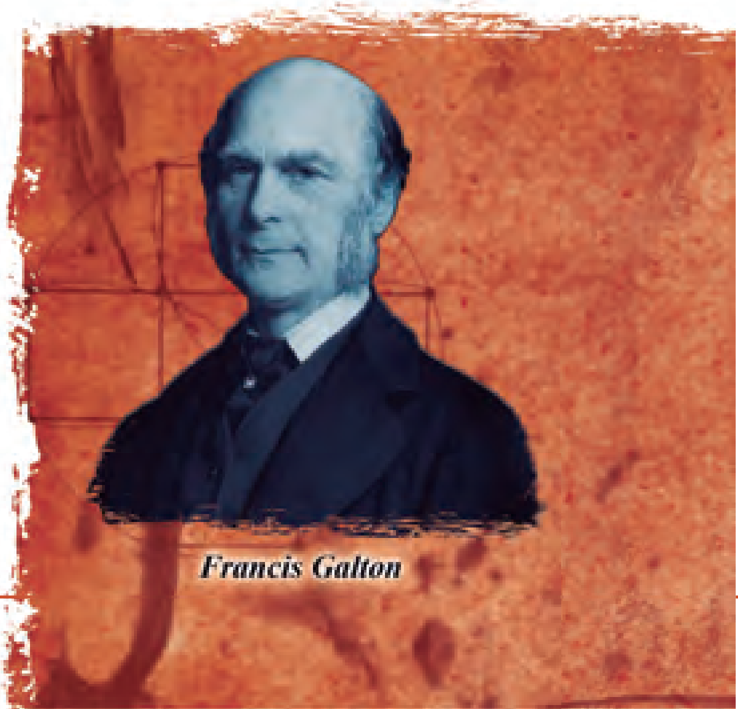


Gráfico 2. Relación entre la edad de adolescentes y horas promedio diarias de conexión a Internet

Uno de los objetivos de obtener esta ecuación consiste en hallar los valores de una variable partiendo de los valores de otra, permitiendo además de la descripción exhaustiva del comportamiento conjunto de las variables, el dar elementos para la toma de decisión. En este caso, en el que analizamos dos variables con una dispersión pequeña, tal vez no veamos la utilidad, pero buena parte de los avances de las ciencias de la naturaleza se han basado en el poder predictivo de este tipo de análisis.

El origen de este análisis matemático-estadístico se remonta a estudios realizados por primera vez en 1877, cuando **Francis Galton** (1822 – 1911) mostró que la altura de los niños nacidos de padres altos tenderá a retroceder o “regresar” hacia la estatura promedio de la población. El término **regresión** fue designado al proceso general de predecir una variable, en ese caso la altura de las niñas y los niños, de otra como la altura de sus padres. En tal sentido, el análisis que acabamos de trabajar se denomina **análisis de regresión lineal simple** (ARL).



El **análisis de regresión lineal simple (ARL)**, se encarga de describir a través de una ecuación de la línea recta el comportamiento de un par de variables asociadas. Esta ecuación está compuesta por dos coeficientes de regresión (a y b) y dos variables, una independiente o explicativa y una variable dependiente o explicada. La recta que produce esta ecuación se conoce como **recta de regresión**.

Uno de los mayores usos que tiene el ARL es el poder predictivo de una variable en función del valor de la otra variable relacionada y que cumple el papel de variable explicativa. Como parte del comportamiento de datos de dos variables reales, es muy probable que no se comporte perfectamente como una línea recta. Esto permite introducir el concepto de error cuadrático de ajuste o error de estimación de Y en función de X.

Observen en el *gráfico* 3 algunas diferencias entre los valores reales Y_i y los valores estimados Yc que conforman la recta de regresión. Cada una de estas diferencias viene a constituirse en un **error de ajuste** (e), debido a que ese punto real está alejado del valor que lo representa en el modelo de la línea recta.

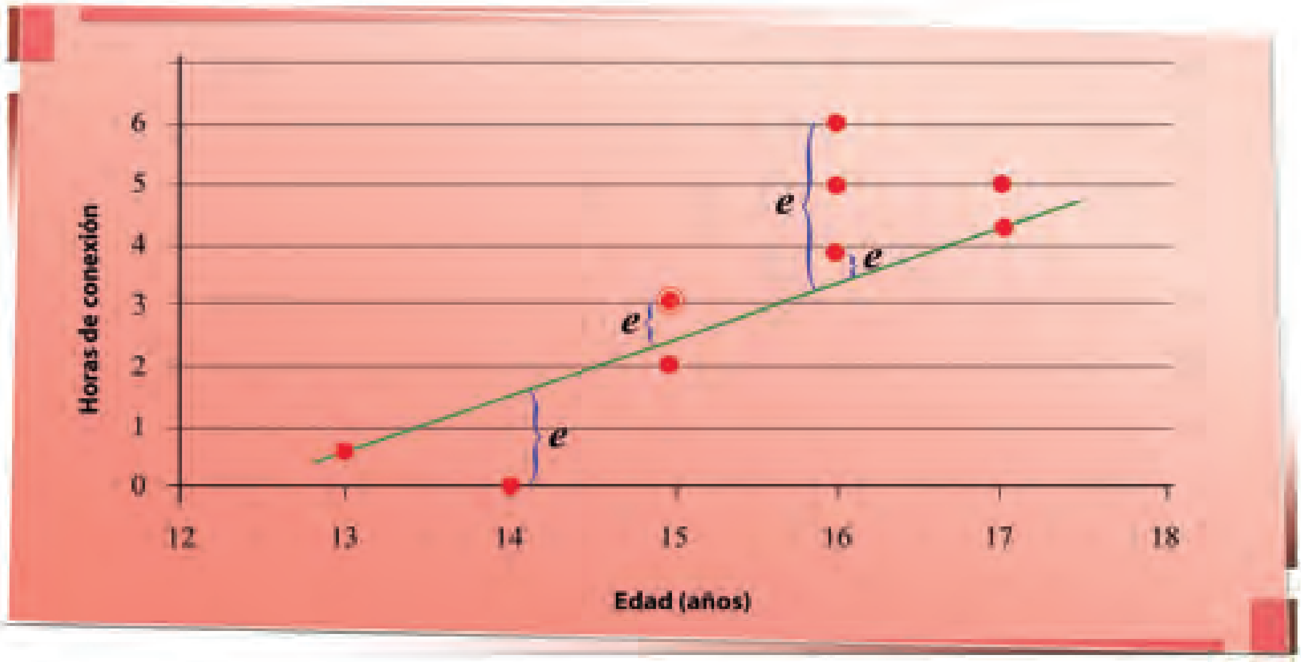


Gráfico 3. Relación entre la edad de adolescentes y horas promedio diarias de conexión a Internet

Como verán, algunas diferencias están ubicadas por encima de la recta y otras por debajo de la recta de regresión. En la estimación, las primeras se consideran errores por exceso y las segundas errores por defecto.

Dado que la recta pasa por los valores promedios de cada una de las estimaciones de Y para los valores de X, se cumple con una de las propiedades de la *media aritmética* que indica que la suma de todas las diferencias (+ y -) con respecto al valor promedio, es igual a cero. Porque las diferencias se equilibran, se recurre aritméticamente a elevar al cuadrado estas diferencias para convertir todos los valores a signos positivos y así calcular un promedio de estas desviaciones cuadráticas. El resultado de toda esta operación se resume en la siguiente fórmula conocida como el **error cuadrático de ajuste** o **error de estimación** en la regresión.

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - Yc\right)^2}{n}}$$

Para resolver esta fórmula debemos calcular para cada valor de X_i real, su valor estimado de Y (Yc) y completar una *tabla* como la número 4.

Tabla 4. Valores necesarios para calcular el error cuadrático de ajuste.

Estudiante	Edad (X)	Horas (Y)	Yc	$Y_i - Yc$	$(Y_i - Yc)^2$
1	15	2	2,44	-0,44	0,1936
2	14	0	1,53	-1,53	
3	17	3	4,26	-1,26	1,5876
4	16	4	3,35	0,65	0,4225
5	15	3		0,56	0,3136
6	16	4	3,35	0,65	0,4225
7	15	3	2,44	0,56	0,3136
8	13	1	0,62	0,38	
9	17	4	4,26		0,0676
10	16	3	3,35	-0,35	0,1225
11	16	5	3,35	1,65	2,7225
Suma	170	32			8,6513

Actividad

Examinando la *tabla* 4 que se presenta verifiquen el procedimiento de cálculo para las tres últimas columnas y completen los datos faltantes. Esto les permitirá entender qué fue lo que se realizó en cada una de esas tres columnas y aplicar en un futuro el procedimiento apropiado.

De esta *tabla* 4, interesará el resultado de la última columna, debido a que corresponde a la sumatoria de los desvíos al cuadrado de Y_i con respecto a Yc y nos permitirá sustituir en la fórmula del error cuadrático de ajuste

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - Yc\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{8,6513}{11}} = \sqrt{0,7865} \approx 0,89$$

Por lo que cada vez que se hace una estimación del número de horas promedio de conexión a Internet a partir de la edad del adolescente, se está cometiendo un error de estimación por exceso o por defecto de $0,89$ horas, es decir en menos de una hora.

Investigación

Continuando con la indagación que se inició durante la explicación del Análisis de Correlación Lineal en esta lección, se recomienda que:

- Calculen los coeficientes de regresión lineal para sus datos.
- Establezcan la ecuación de regresión.
- Calculen el error cuadrático de ajuste de este modelo de regresión.

Analicen los resultados obtenidos y plantéense algunos valores de X a los cuales les gustaría saber cuál sería su respectiva estimación de Yc. A estas estimaciones sumen y réstenle el respectivo error cuadrático de ajuste para así encontrar los posibles límites inferior y superior de cada proyección.

Completen, en sus cuadernos, la siguiente tabla a partir de los resultados obtenidos de su ARL.

X (años)	Sustitución en ecuación $Yc = a + b\,(X)$	Yc (horas)	Límite inferior $Yc - Sy/x$	Límite superior $Yc + Sy/x$

Conversen y reflexionen en sus clases y con sus familiares si en su comunidad se ve expresado el logro de la 8^{va} meta, letra b de las metas u objetivos del milenio para Venezuela.

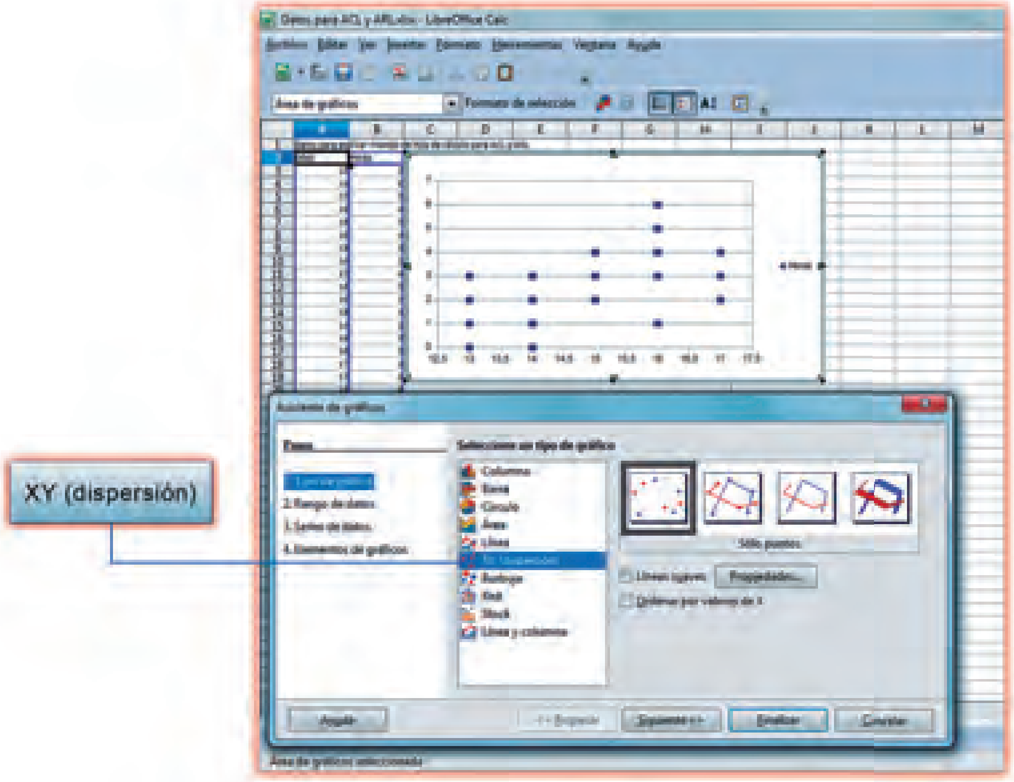
Compartan las respuestas a esta interrogante ¿Qué reflexiones generan en ustedes los resultados del número de horas de conexión a Internet y las repercusiones que pudiesen tener en su desarrollo como ciudadanos para este siglo? Piensen y socialicen qué recomendaciones darían y qué acciones pondrían en marcha para mejorar los resultados que se encontraron en la investigación.

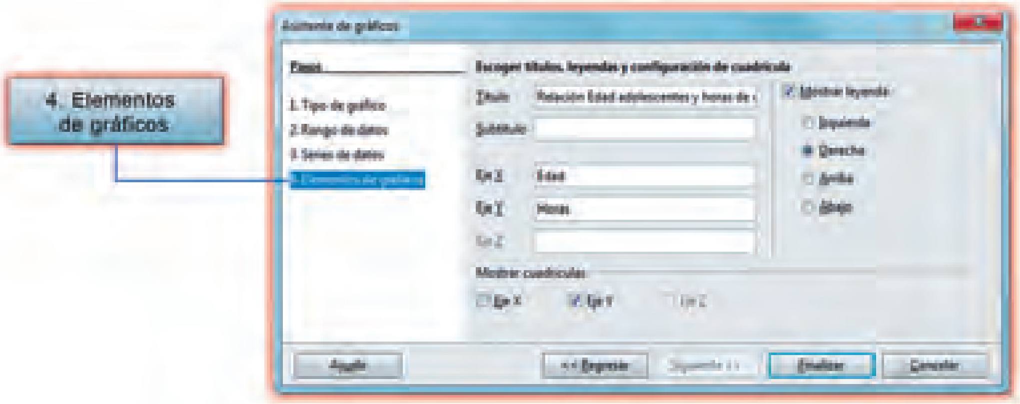
La aplicación del ACL y del ARL puede realizarse en grupos mucho más numerosos que los que aquí se han utilizado para explicarlos, en esos casos recurrimos a herramientas tecnológicas como una hoja de cálculo, en el caso de construir el diagrama de dispersión y calcular el r_{XY}, o una calculadora científica sencilla, para la obtención del r_{XY}.

Observen las instrucciones:

Se sombrean los datos de las dos variables y se marca en el menú **Insertar** / **gráfico** / **XY(Dispersión)** y seleccionar el Paso 4 (lado izquierdo de la ventana) **Elementos de gráficos**, para colocar así el título del gráfico y la identificación de ejes. Tal como se muestra a continuación:

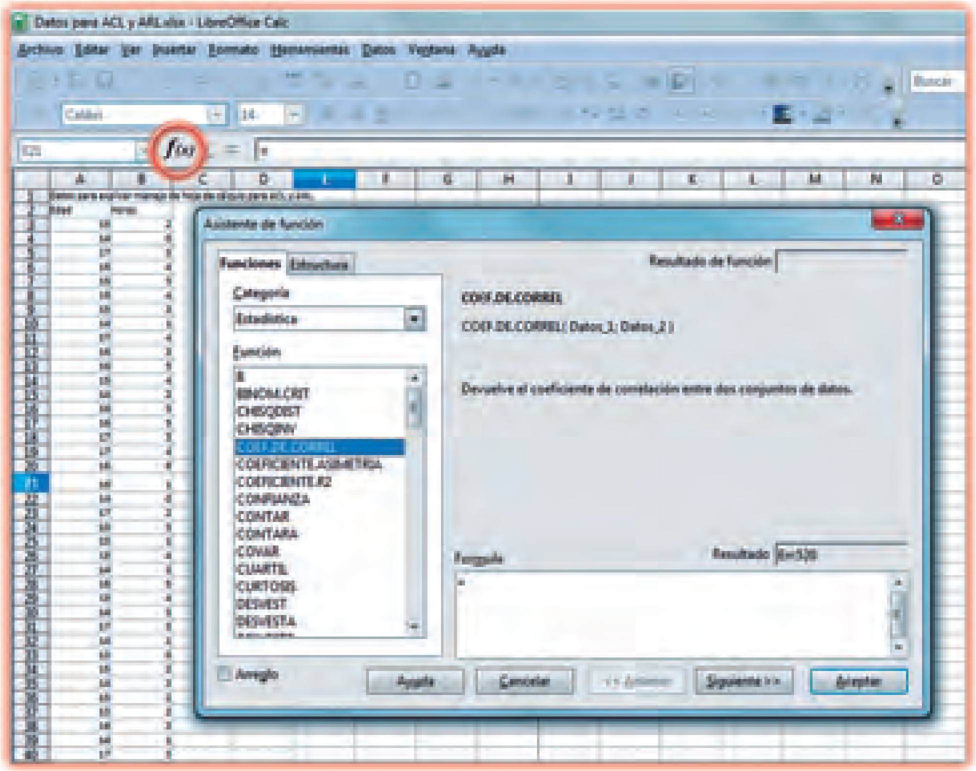
Está listo el gráfico al marcar **Finalizar**.

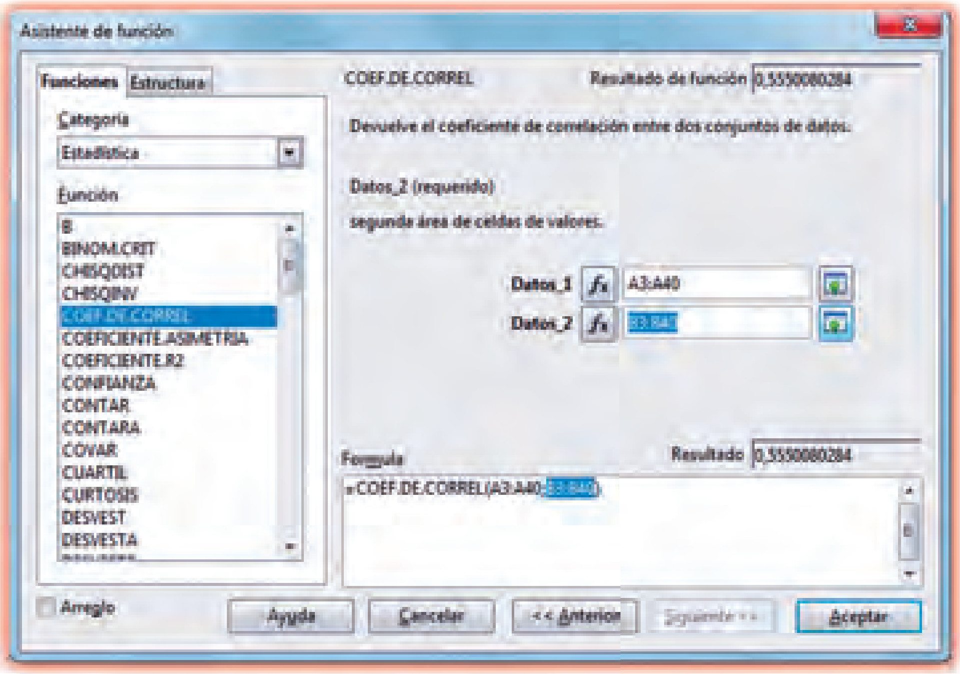




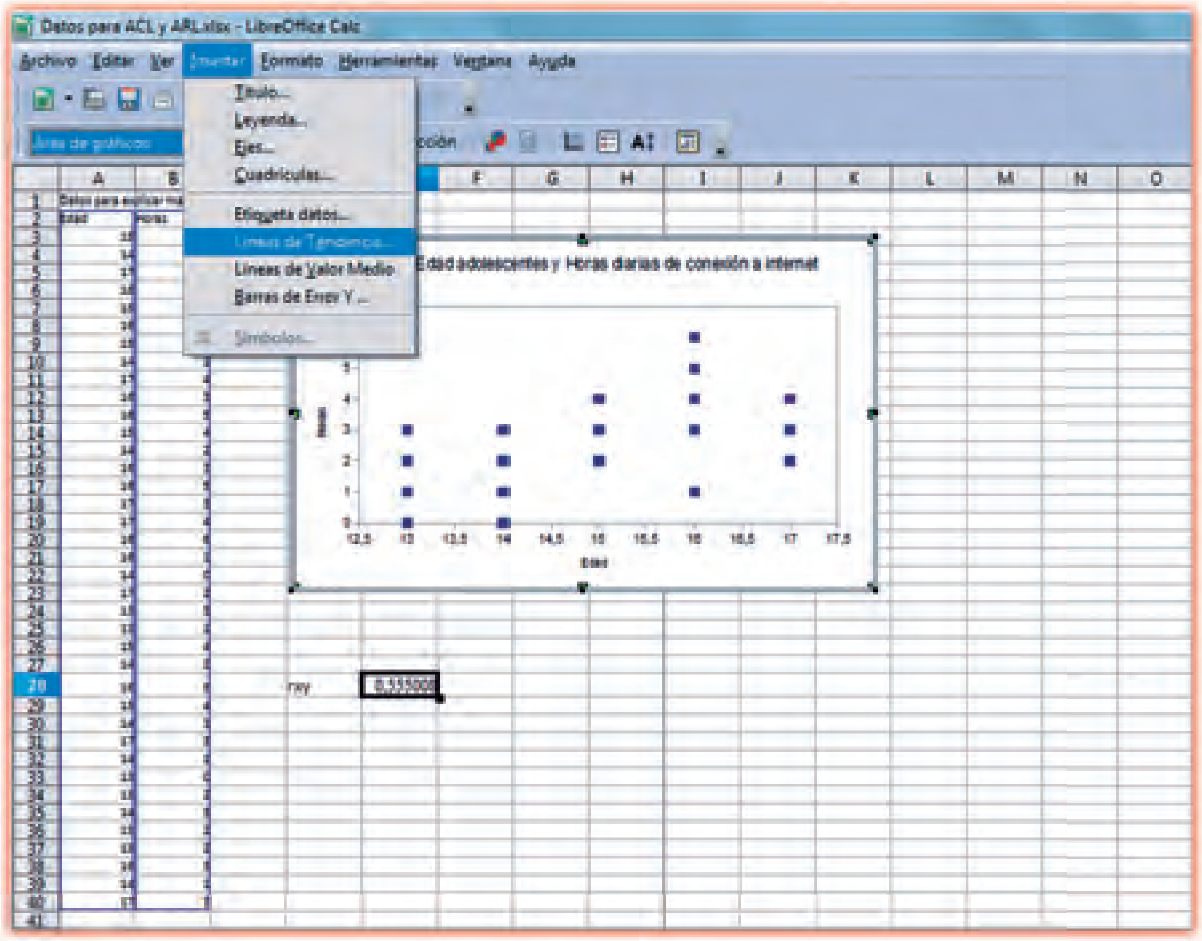
Para obtener el valor del coeficiente de correlación r_{XY} de Pearson, se escribe en alguna casilla de interés el coeficiente y posicionen el cursor en la celda de al lado.

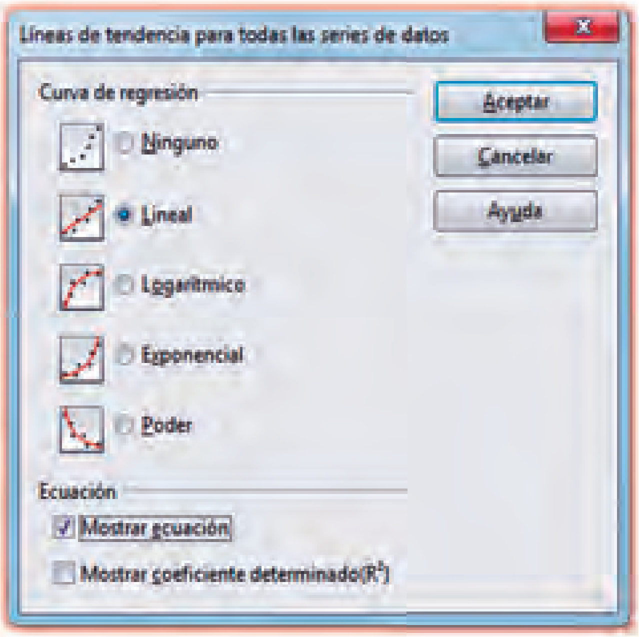
En el submenú, marcar el símbolo fx para que se despliegue el asistente de función. Escoger en las funciones Estadísticas: **COEF.DE.CORREL** y en la ventana de datos escribir las celdas de interés. Al marcar **Aceptar** quedará registrado el resultado del coeficiente para su respectivo análisis. En este caso $0{,}55$.





Para hallar la línea de regresión, basta con resaltar el gráfico (doble clic con el ratón) y en menú **Insertar**, marcar **Líneas de Tendencia** / **Lineal** / **Mostrar ecuación** / **Aceptar**. Tal y como se aprecia en estas figuras.





Todo esto permite en poco tiempo obtener los *coeficientes de correlación* y *de regresión* para así dedicarse a continuar el análisis e interpretación de los resultados. En el caso de las calculadoras científicas, conviene revisar el manual de uso, en el que aparecen las instrucciones para el cálculo de las medidas estadísticas tanto en forma univariante como bivariante (si es el caso de su calculadora).

De todos modos es muy importante familiarizarse con estos instrumentos diseñados para ser cada vez más eficientes en la obtención de resultados y posterior análisis matemático y estadístico y así fortalecer el logro de la meta acerca del acceso y disfrute de los beneficios de las nuevas tecnologías y en especial las de la información y comunicación.

Para concluir, los conocimientos estadísticos son de suma utilidad en la comprensión de nuestras realidades concretas. Su análisis puede ser de manera univariante o como se trabajó en esta lección, considerando simultáneamente el comportamiento de dos variables, a sabiendas que la vida real es tan compleja que incluso considerar un análisis bivariante es insuficiente.

La invitación es a revisar todos los elementos de esta lección y con la ayuda de su profesora o profesor y de textos, aclarar y profundizar en este tema, de forma tal que su visión del mundo y alcance de datos mejore y les permita, de ser necesario, una óptima toma de decisiones.

Una manera rápida de saber si la calculadora que está al alcance de ustedes tiene funciones estadísticas que permitan la aplicación del análisis de regresión lineal y en consecuencia del análisis de correlación lineal explicados en esta lección, es presionar la tecla **mode** y verificar si en pantalla aparece la función "*REG*" o "*STAT*" y para cada caso respectivamente la función "*Lin*" o "*A+B X*". Sin embargo, es de sumo provecho que ubiquen, en el manual de uso, las instrucciones precisas para su operación.

Adhesión de Venezuela al Mercado Común del Sur (MERCOSUR)

El 31 de julio de 2012, luego de varias conversaciones y diversas solicitudes de incorporación realizadas desde hace seis años por parte de nuestro país a este organismo regional de América del Sur, se logró firmar el acuerdo de adhesión plena al **MERCOSUR**, lo que le permite participar con voz y voto en las decisiones de este ente de integración regional.

Nota: en la imagen superior el ✶ representa el Territorio Esequibo (zona en reclamación) sujeto al acuerdo de Ginebra del 17 de Febrero de 1966.

Este trascendental paso abre las puertas a un conjunto de ventajas en las relaciones comerciales, culturales, laborales, educativas y turísticas entre los países que lo conforman en la actualidad, tal es el caso de Brasil, Argentina, Uruguay, Venezuela y Paraguay, este último se encuentra suspendido temporalmente por violentar el *Tratado Ushuaia*, o tratado de democracia firmado por los paraguayos, al destituir a su presidente electo Fernando Lugo[1]. También exige de parte de las venezolanas y los venezolanos una mejora de nuestro trabajo y nuestros productos y el conocimiento de las normas y estándares de relación que permitan la complementariedad entre los países aliados y el sur de nuestra América, así como conformar un bloque competitivo en el ámbito mundial.

Como parte del acuerdo, Venezuela tendrá un plazo de hasta cuatro años para adaptarse a toda la normativa comercial del MERCOSUR, es decir, hasta el 31 de julio de 2016. Esto va a requerir nuevas formas de organización y muy probablemente del apoyo de conocimientos matemáticos para poder dar respuestas a las inquietudes que surjan. Veamos algunos casos.

En la firma de un acuerdo bilateral entre Brasil y Venezuela, se requieren conformar comités de trabajadores de 7 personas. Por ejemplo, si hay 10 trabajadores o trabajadoras de Venezuela y 8 de Brasil. Cuántos comités diferentes de 7 personas pueden formarse de tal manera que el comité contenga las siguientes personas:

- Exactamente 4 de Venezuela.
- Por lo menos 4 de Venezuela.
- A lo sumo 4 de Venezuela.

En esta situación no afecta el orden en el que sean seleccionadas las personas que van a conformar el comité. Es decir, da igual que el primer trabajador sea un brasilero o una venezolana, siempre y cuando se cumpla con las condiciones que nos están pidiendo. Por lo tanto, estudiaremos la **Teoría Combinatoria**, en especial un tema que ya abordamos en años anteriores, las **Combinaciones**.

Combinaciones

Veamos una definicón formal de este concepto:

El número de conjuntos diferentes con r elementos cada uno, que pueden formarse de un conjunto de n elementos ($n \geq r$), se llama **combinaciones** de n elementos tomando r a la vez.

1: Según versión de la secretaria ejecutiva de la Comisión Presidencial para la Adhesión de Venezuela al Mercado Común del Sur (MERCOSUR), Isabel Delgado, el 3 de agosto de 2012. Disponible en http://www.avn.info.ve/node/125692

La notación:

$$C(n,r) \text{ o } nCr$$

expresa el número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez, donde cada combinación de r elementos puede ser utilizada para formar $r!$ permutaciones. Su fórmula general viene a ser:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Donde $C(n,0) = C(n,n) = 1$, porque solo existe una manera de escoger a ningún elemento de un conjunto dado, y solo una también de escoger a todos los elementos.

Aplicando la fórmula y algunos axiomas de **teoría combinatoria** en la resolución de los problemas que se le plantearon se tendrá que:

- $\binom{10}{4} \cdot \binom{8}{3} = 11.760$ comités.

  En este caso debe cumplirse que de los 7 miembros, 4 de los 10 sean exactamente venezolanos y para completar el comité, 3 de los 8 sean brasileros, formarán parte del mismo.

- Se planteó que por lo menos 4 sean venezolanos, esto quiere decir que ese es el número mínimo de venezolanas y venezolanos en el comité, sin embargo, eso no excluye que también puedan estar, 5, 6 ó 7 venezolanas y venezolanos en el comité. Por tanto, cada posible combinación ha de agregarse (sumarse) a las otras combinaciones posibles. De esta manera quedaría la solución de este problema de la siguiente forma:

$$\binom{10}{4}\binom{8}{3} + \binom{10}{5}\binom{8}{2} + \binom{10}{6}\binom{8}{1} + \binom{10}{7}\binom{8}{0} = 20.616 \text{ comités}$$

- Cuando se plantea *a lo sumo*, es lo mismo que decir *como máximo*. De tal manera que decir a lo sumo 4, se está queriendo decir que el máximo valor ha de ser 4, por lo que los valores a considerar serían $0, 1, 2, 3, 4$ y como en el caso anterior, a cada posible producto de combinaciones se le sumará la siguiente hasta llegar el valor máximo, tal como se expresa a continuación:

$$\binom{10}{0}\binom{8}{7} + \binom{10}{1}\binom{8}{6} + \binom{10}{2}\binom{8}{5} + \binom{10}{3}\binom{8}{4} + \binom{10}{4}\binom{8}{3} = 22.968 \text{ comités}$$

Como habrán podido observar, de no aplicarse las herramientas fundamentales de conteo, muy posiblemente se tendría una perspectiva distinta de solución a estas interrogantes y en consecuencia la solución sería totalmente distinta a la presentada.

- De plantearse la situación en Venezuela, en la que un grupo de 8 trabajadoras y trabajadores decide mandar una comisión de contraloría social para hablar con los miembros del Consejo Comunal donde está funcionando la empresa en la que laboran, si la comisión se compone de dos o más trabajadoras y trabajadores, ¿cuántas comisiones de contraloría pueden conformarse? Expresen sus resultados en términos de combinaciones y chequeen que la respuesta sea 247 comisiones.
- Otro caso que se podría plantear sería: si uno de los países miembros tiene 9 productos para intercambiar en el MERCOSUR y otro tiene 6 productos, ¿de cuántas maneras se pueden intercambiar 3 de esos productos? (La respuesta es 1.680).

Observen que pueden suscitarse muchas situaciones en las que se tenga que prever todas las posibles respuestas que involucren el conteo, por ejemplo, puertos de los que puedan salir barcos a transportar los productos; entradas fronterizas que van a ser utilizadas o no para este tipo de comercio o de tránsito de personas en calidad de estudiantes, trabajadores, cultores, turistas, entre otros.

Si hacen uso de una calculadora científica, pueden utilizar la tecla $\boxed{nCr}$ para obtener los resultados de las combinaciones. En muchos modelos de calculadora basta con colocar en el orden siguiente los datos: n $\boxed{nCr}$ r (o x según sea el caso) $\boxed{=}$.

Actividad

Calculen las siguientes combinaciones y examinen sus resultados:

- $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$
- $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$
- $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

- ¿Qué regularidad encuentran en la secuencia de los resultados?

- ¿Qué valor debería obtenerse si se hace la sustitución para $n = 6$, desde $r = 0$ hasta 6?

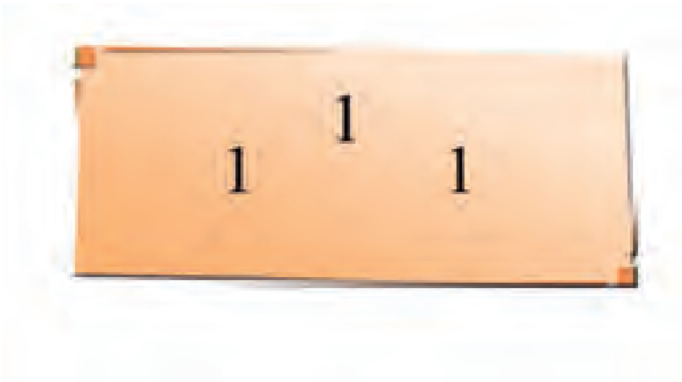
El Triángulo Aritmético

Utilicemos otro recurso matemático para encontrar valores de combinaciones como la secuencia antes analizada.

Supongamos que para un cierto valor de n se conocen los valores de todos los números combinatorios de la forma $\binom{n}{r}$, $0 \le r \le n+1$, y se utiliza la relación:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}, \quad 0 \le r \le n+1$$

De manera recursiva se pueden obtener todos los números combinatorios. Si por ejemplo comenzamos con $\binom{0}{0} = 1$, este valor lo colocamos en el centro de la página, luego calculamos los siguientes dos números combinatorios $\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{1}{1} = 1$ y los colocamos debajo del primer 1, justo a ambos lados, de manera que queden así:



Los siguientes números combinatorios corresponden a $n = 2$, de manera que primero calculamos los dos números extremos que vendrían a ser $\binom{2}{0} = 1$ y $\binom{2}{2} = 1$, que colocaremos debajo y al lado de los anteriores como se presenta a continuación:

Aquí aunque sea fácil obtener el combinatorio $\binom{2}{1}$ se utiliza la relación antes mencionada y $\binom{2}{1}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2$, que es el número indicado con flechas en la imagen anterior. Para construir la fila que corresponde a $n = 3$, los extremos van a valer 1, dado que $\binom{3}{0}=1$ y $\binom{3}{3}=1$, los demás valores se obtienen sumando los dos valores que se encuentren encima del espacio a rellenar, de igual forma procederíamos cuando $n = 4$.

Si se continúa este proceso se obtendrá un arreglo de números con propiedades interesantes y útiles que se conoce como el **Triángulo** de **Tartaglia** o de **Pascal**, en honor a **Nicola Tartaglia** (1499-1557, matemático Italiano) y a **Blaise Pascal** (1623-1662, matemático, físico y filósofo francés). El primero de ellos lo creó y el segundo lo popularizó a mediados del siglo XVII.

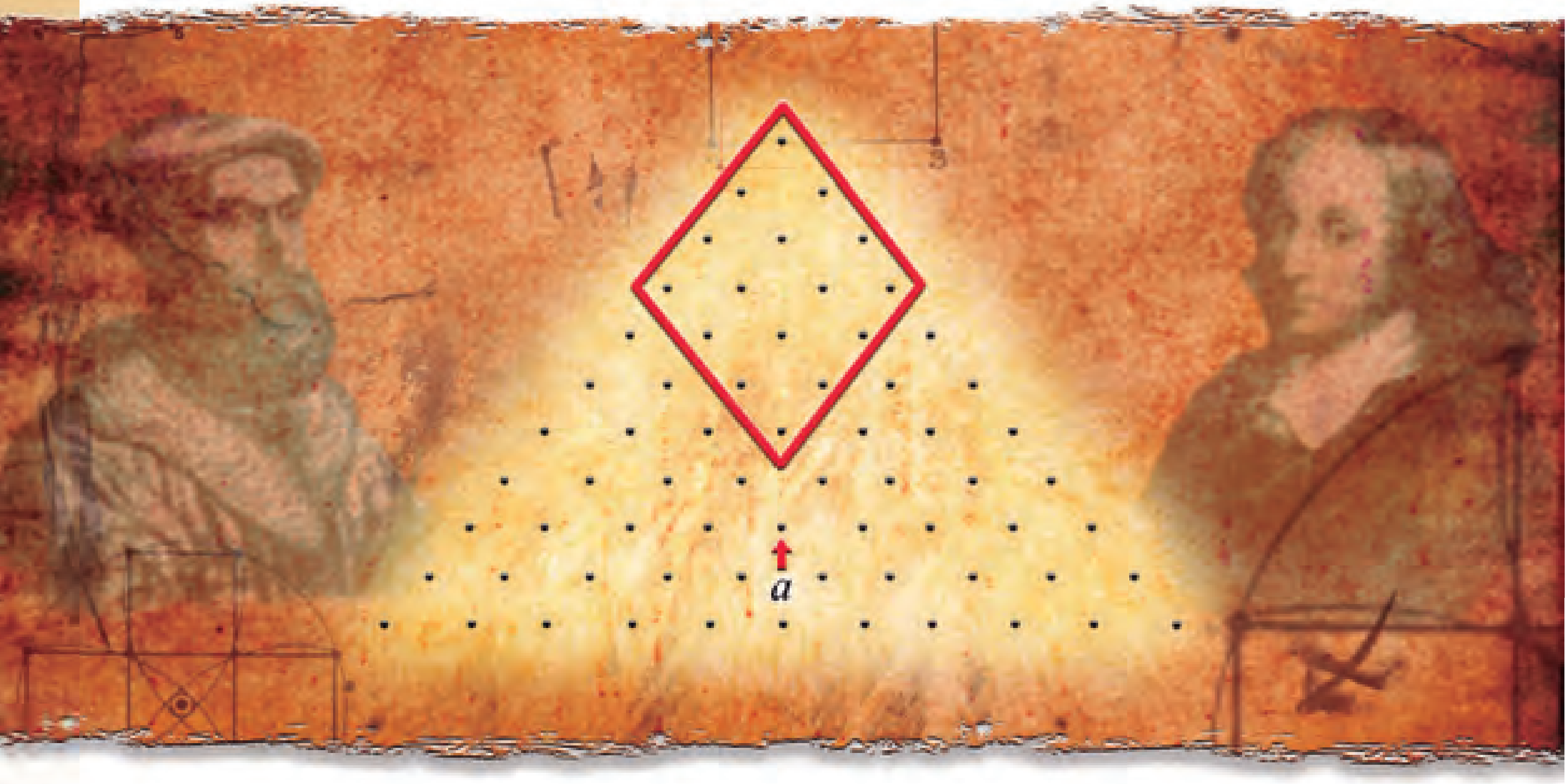
Cada fila j tiene $j + 1$ números que corresponden a los números combinatorios $\binom{j}{i}$ para $0 \le i \le j$, de manera que cada fila comienza por el número combinatorio $\binom{j}{0}$, el número que esté en el lugar $i + 1$ de la fila j será el número combinatorio $\binom{j}{i}$. Para hallar el $\binom{6}{3}$ se busca el lugar 4 de la fila 6 con lo que se obtiene $\binom{6}{3}=20$.

Actividades

1 Hallar los números combinatorios $\binom{8}{3}$, $\binom{9}{7}$ y $\binom{11}{5}$ por la fórmula y por el Triángulo de Tartaglia o de Pascal. ¿Los resultados son los mismos?

2 Si para el MERCOSUR los países que lo integran cuentan con 14 puertos marítimos de los cuales 4 están en Venezuela, ¿cuántas combinaciones posibles podrán establecerse entre los distintos puertos de países adheridos a ese mercado y Venezuela?

3 En la siguiente imagen del triángulo de Tartaglia o de Pascal, sustituyan los puntos por los valores correspondientes. Sumen los valores contenidos en el paralelogramo o rombo resaltado y observen que esta sumatoria es igual al valor de a - 1. Fíjense que el valor a es el resultado de la combinación $\binom{8}{4}$ dado que se encuentra en la fila 8 y ocupa el puesto $r + 1$, es decir en el puesto 5 de esa fila y por la relación que establecen es la suma de las combinaciones $\binom{8}{4} = \binom{7}{3} + \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 35 + 20 + 10 + 4 + 1$.



4 ¿Qué otras relaciones como la anterior pueden encontrar y demostrar en el Triángulo de Pascal o de Tartaglia? Plantéenla en sus clases de Matemática. Investiguen sobre estas propiedades y publiquen sus hallazgos en la cartelera.

Investigación

Indaguen en internet, en los portales oficiales del *Ministerio del Poder Popular para las Relaciones Exteriores*, *Ministerio del Poder Popular para Industrias y Comercios*, de la *Presidencia de la República Bolivariana de Venezuela* y de la *Agencia de Noticias de Venezuela*, la secuencia de acciones llevadas a cabo para la firma del tratado de adhesión al **Mercado Común del Sur** (MERCOSUR) así como las normas de incorporación que exijan pensar en posibles combinaciones de acciones y permitan la aplicación de los conceptos matemáticos vistos hasta este momento.

Reflexionen en el caso de las relaciones comerciales que se mantendrán con el resto de países de América del Sur que no están en este mercado común, situaciones que ameriten la aplicación de la teoría combinatoria para la determinación del número de posibles resultados como los planteados en esta lección, e incluso otros que surjan de la reflexión o búsqueda de datos al respecto.

Además del *Tratado del Triángulo Aritmético*, Blaise Pascal publicó a sus 17 años el escrito *Ensayo sobre las Cónicas*. Fíjense a la edad en que comenzó a publicar hallazgos matemáticos. Investigar acerca de su vida y las áreas de estudio que fueron de su interés, puede ser un estímulo a la búsqueda que ustedes también pueden iniciar, sin olvidar que toda indagación requiere verificar qué se ha escrito, descubierto, demostrado y rechazado con anterioridad. La invitación es a la búsqueda de elementos que para su momento, llamaron la atención de estos personajes que luego el tiempo les dio el papel de matemáticos en la historia.

Introduciendo el Teorema del Binomio

Cuando se examina la conformación del Triángulo de Tartaglia o de Pascal, se puede observar que en este arreglo cada número en cada una de las columnas sucesivas, a excepción de la primera y la última, que siempre son 1, es la suma de los dos números consecutivos del renglón anterior. Matemáticamente esta acción puede ser desarrollada a través del patrón que sigue este conjunto de expresiones:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observen que se encuentra como rasgo común $(a+b)^n$ para cualquier valor entero de n, pero sin necesidad de una multiplicación repetitiva. También se tiene que:

- El primer término del desarrollo es a^n y el último b^n.
- Hay $n+1$ términos en cada desarrollo.
- Los coeficientes de términos equidistantes de los extremos del desarrollo son iguales.
- En cada término sucesivo después del primero, los exponentes de a decrecen en 1 y los de b aumentan en 1, tal que la suma de los exponentes en cada término es n.

Por lo tanto, si uno observa el Triángulo y se acoge a las expresiones anteriores, es de esperarse que los términos del desarrollo de $(a+b)^5$ tengan los coeficientes 1, 5, 10, 10, 5, 1, es decir:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

y el patrón continúa.

Aunque esta técnica para encontrar los coeficientes siempre da resultado, posee una desventaja. Para desarrollar $(a+b)^{10}$ con ayuda de este patrón sería necesario escribir hasta el décimo renglón del Triángulo para encontrar los coeficientes apropiados. Sin embargo, aún persistiría la necesidad de utilizar un método conciso para expresar los coeficientes.

Consideren de nuevo: $(a+b)^5$. Este símbolo es una abreviatura de:

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Al multiplicar los primeros cinco factores se multiplica $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$; esto es, se escoge la a de cada factor (es decir que no se escoge la b). Entonces, ante la pregunta, ¿cuál es el coeficiente del primer término?, puede interpretarse como ¿de cuántas maneras puede no escogerse la "b"? La respuesta es $\binom{5}{0} = 1$.

31 de Julio de 2012, ingreso de Venezuela como miembro pleno al Mercado Común del Sur (MERCOSUR)

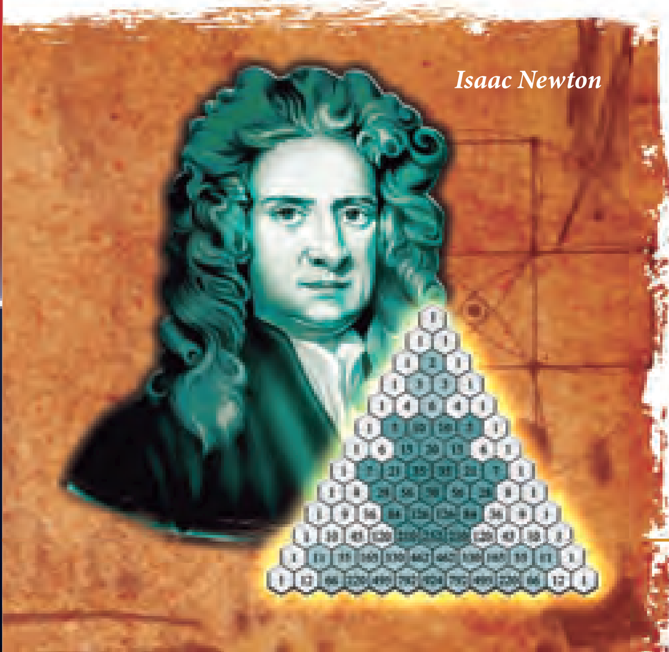
El segundo término del desarrollo es de la forma a^4b. En este caso la a se escoge de 4 de los factores, y la b de 1. Por tanto, se puede escoger una b de un conjunto de cinco "b", o sea de $\binom{5}{1} = 5$ formas. Al decidir de qué factor se selecciona b, se elige a del resto de los factores.

Continuando con el proceso se ve que el siguiente término es de la forma a^3b^2. En este caso se pueden escoger dos "b" de un conjunto de cinco, es decir $\binom{5}{2} = 10$ formas. Por lo tanto, hay 10 términos de la forma a^3b^2 y el coeficiente también sería 10, ya que $\binom{5}{3} = 10$. De forma similar, se puede encontrar el coeficiente del término ab^4 y b^5. En definitiva, los números de la forma $\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$ son exactamente los coeficientes de los términos de $(a+b)^5$.

De igual forma se podría proceder para encontrar los coeficientes de los términos de $(a+b)^n$ para cualquier valor entero positivo de n.

Recuerden que $(a+b)^n$ significa que $(a+b)$ se coloca como factor n veces y se procede a multiplicar esos factores. Cada término es el resultado de la suma de términos que son un producto de una letra en cada uno de los $a + b$ factores. Cada término contiene b^r (lo que significa que b se escogió r veces de n), y también a^{n-r} (ya que cada vez que se escoge a b se debe elegir a a), y la suma de los dos exponentes de cada término debe ser n.

Existen tantos términos de la forma $a^{n-r}b^r$ para un valor dado de r como maneras de escoger r "b". Por lo tanto, hay $C(n,r)$ de tales términos, y el coeficiente de $a^{n-r}b^r$ será $C(n,r)$ o $\binom{n}{r}$.



Isaac Newton

En el año de 1665, **Isaac Newton** presentó la fórmula para el desarrollo binomial con cualquier potencia n que ahora se ha presentado, esto mereció que se le adjudicara a este desarrollo matemático el nombre del **Binomio de Newton**, con varias aplicaciones matemáticas y en particular en los aspectos de Probabilidad. Otro de los aportes de Newton se dio en la física clásica con la presentación de la *Ley de la Gravitación Universal* y las bases de la *Mecánica Clásica*, que sentaron los principios de la física durante los siglos XVIII y XIX.

La Distribución Binomial y el cálculo de Probabilidades

La adhesión de la República Bolivariana de Venezuela como miembro pleno del *Mercado Común del Sur* (MERCOSUR), el 31 de julio de 2012 ha traído opiniones favorables, pero también adversas a esta incorporación, muchas veces por desinformación o información sesgada transmitida a la población.

En la primera parte de esta lección se les solicitaba la indagación, revisión y reflexión acerca de las normas, convenios y posibles acuerdos permitidos entre las naciones miembros de este organismo regional.

Si bien es cierto, que la razón fundamental de esta unión de naciones es fortalecer el mercado como grupo, para así incorporarse a competir en mejores condiciones con otros mercados mundiales, también es cierto que desde el modelo y la visión actual de nuestro país, se busca la complementariedad de fortalezas de cada nación y no la visión competitiva desde adentro de la unión.

La puesta en marcha exitosa y sin contratiempos de lo que este compromiso exige para nuestra nación pasa por conocer las posibles opiniones a favor o en contra de esta incorporación, como política exterior. En tal sentido, a partir de este planteamiento se buscarán las herramientas matemáticas que permitan darle respuesta precisa y eficiente.

Si se afirma que el 85% de la población venezolana está a favor de la adhesión del país al MERCOSUR y un 15% está en contra de esta incorporación y en la comunidad en la que ustedes viven se toma una muestra al azar de 10 personas, a las que se les solicitará su opinión a favor o en contra de esta incorporación se puede calcular, haciendo uso de los conocimientos adquiridos en esta lección, las probabilidades de ocurrencia de un cierto suceso o evento aleatorio.

Examinando este planteamiento se encontrará que:

- Se está en presencia de una experiencia que no ha ocurrido (puede estar por ocurrir).
- Esta experiencia no tiene un único resultado posible, sino dos, como son estar a favor o estar en contra de la incorporación de Venezuela al MERCOSUR. Esto hace que podamos tener *una probabilidad de lo deseado o buscado* ($\boldsymbol{p}$) y *una probabilidad de lo no deseado o no buscado* ($\boldsymbol{q}$).
- Cada persona tiene la misma probabilidad de ser seleccionado para dar su opinión y que en cada selección se mantiene como criterio de probabilidad de ocurrencia, la proporcionalidad planteada en el enunciado de la situación (85% a favor, 15% en contra), estas dos circunstancias son mutuamente excluyentes e independientes entre sí, ya que, si estás a favor no puedes estar en contra a la vez y la probabilidad de que estés en contra no afecta a la probabilidad de que estés a favor, respectivamente.
- La acción de seleccionar al azar a las personas se repite más de una vez ($n = 10$), lo cual permite el uso de las combinaciones para dar respuestas a las posibles interrogantes.
- Los posibles resultados de la variable aleatoria serían valores discretos que irán desde el 0 hasta el 10. Es decir, un número finito de valores posibles entre dos cualesquiera.

Haciendo uso del desarrollo del *Binomio de Newton* se genera la fórmula de probabilidades para experimentos como el descrito:

$$P(x)=\binom{n}{x}(p)^{x}(q)^{n-x}$$

y se podrían obtener las probabilidades de ocurrencia de cada valor de la variable X, en este caso, como es de interés la variable aleatoria "número de personas que estén de acuerdo o a favor con la adhesión", se tendrán aquellos valores de X como sigue:

x	Se lee
0	Ninguna persona de la muestra está a favor del ingreso al MERCOSUR
1	Sólo una persona de los 10 de la muestra está a favor del ingreso al MERCOSUR
2	Sólo dos personas de los 10 de la muestra están a favor del ingreso al MERCOSUR
3	Sólo tres personas de los 10 de la muestra están a favor del ingreso al MERCOSUR
4	Sólo cuatro personas de la muestra están a favor del ingreso al MERCOSUR
5	Sólo cinco personas de la muestra están a favor del ingreso al MERCOSUR
6	Sólo seis personas de la muestra están a favor del ingreso del país al MERCOSUR
7	Sólo siete personas de la muestra están a favor del ingreso del país al MERCOSUR
8	Sólo ocho personas de la muestra están a favor del ingreso del país al MERCOSUR
9	Sólo nueve personas de la muestra de 10 están a favor del ingreso al MERCOSUR
10	Todos los sujetos de la muestra están a favor del ingreso del país al MERCOSUR

Cuando se plantea el hecho de solo una, dos u otro valor se debe entender como exactamente uno, dos o el otro valor considerado.

En consecuencia, si se sustituyen los siguientes valores en la fórmula, se pueden obtener las probabilidades de ocurrencia de cada valor de la variable aleatoria.

$$n = 10;\ p = 0{,}85;\ q = 0{,}15$$

(los valores de p y q surgen de transformar los porcentajes dados en el enunciado, de personas a favor y en contra de la adhesión de Venezuela al MERCOSUR, a valores decimales que son las unidades en las que se expresan las proporciones).

Por ejemplo, para el valor $x = 0$ (ninguna persona de la muestra está a favor del ingreso del país al MERCOSUR), sustituyendo valores en la fórmula que mostramos antes tenemos que:

$$P(x=0)=\binom{10}{0}(0{,}85)^{0}(0{,}15)^{10-0}=1\cdot 1\cdot 0{,}577\cdot 10^{-8}\approx 0$$

Y para $x = 5$ (Sólo cinco personas de la muestra de 10 están a favor del ingreso del país al MERCOSUR), la sustitución y resolución sería:

$$P(x=5)=\binom{10}{5}(0,85)^5(0,15)^{10-5}=252\cdot 0,4437\cdot 0,7594\cdot 10^{-4}=0,0085$$

Y para $x = 10$ (todos los sujetos de la muestra están a favor del ingreso del país al MERCOSUR), sería:

$$P(x=10)=\binom{10}{10}(0,85)^{10}(0,15)^{10-10}=1\cdot 0,1969\cdot 1=0,1969$$

Todos estos resultados se concentran en una sola tabla conocida como **distribución de probabilidad para la variable aleatoria** x y en la que aparecerán para cada valor de la variable, su probabilidad de ocurrencia.

Completen en sus cuadernos la siguiente distribución de probabilidades para la variable *número de personas que están a favor de la adhesión de Venezuela al MERCOSUR*.

Distribución de probabilidad del número de personas a favor de ingreso de Venezuela al MERCOSUR ($n = 10$; $p = 0,85$).

x	$P(x)$
0	0,0000
1	
2	
3	
4	
5	0,0085
6	
7	
8	
9	
10	0,1969
Suma	

Efecto Bernoulli

Cuanto más rápido fluye un fluido menos presión ejerce. A consecuencia de esto, la presión relativa en la superficie plana es superior a aquélla en la superficie cóncava, así el cuerpo experimenta una fuerza neta en dirección de la concavidad del cuerpo. Este efecto se asocia con la distribución binomial.

De ahora en adelante, a este tipo de distribución obtenida según la fórmula antes presentada la denominaremos **Distribución Binomial**.

La **distribución binomial** permite el cálculo de probabilidades para cada valor de variables aleatorias discretas que satisfagan las condiciones de:

- Repetir n veces un experimento aleatorio en igualdad de condiciones.
- Que el experimento solo ofrezca dos posibles resultados con probabilidades que se mantengan constantes, independientes y complementarias en cada ensayo.

El uso de este modelo matemático abrevia la obtención de probabilidades, ya que permite el uso de tablas de distribución de probabilidad en la que aparecen una gama considerable de resultados para n y p distintos, facilitando así la obtención de probabilidades.

Otros aspectos que deben ser cuidados en una distribución binomial tienen que ver con el cumplimiento de los *Axiomas Básicos de la Probabilidad*, es decir, que:

- Para toda x, $0 \leq P(x) \leq 1$.
- $\sum_{i=1}^{n} P(x) = 1$.
- Si A y B son sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Al igual que las distribuciones de frecuencias, las distribuciones de probabilidad también pueden ser resumidas y descritas a partir de dos medidas fundamentales en las probabilidades, la **Esperanza Matemática** y la **Desviación Estándar**.

En una distribución binomial la **Esperanza Matemática** representa el valor esperado de la variable aleatoria de interés, aquél de todos los que componen a la variable aleatoria discreta que es más probable que ocurra, aunque por la forma en que se distribuya la variable no siempre coincide con el que posee mayor probabilidad. La esperanza matemática se simboliza $E(x)$ y se calcula para una distribución binomial así $E(x) = n \cdot p$.

La **desviación estándar** por su parte, mide el grado de dispersión de los valores de la variable según su probabilidad de ocurrencia. Se calcula para una distribución binomial así $S_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, y su valor permite obtener el margen de incertidumbre de los valores que pueden ocurrir alrededor de su valor esperado.

El **margen de incertidumbre** es $E(x) \pm S_x$.

Una ventaja de modelar las probabilidades por la distribución binomial es que permite el cálculo de estas dos medidas sin necesidad de hacer la distribución binomial completa. De hecho, sin haber concluido la distribución porque es tarea de ustedes, se puede obtener el margen de incertidumbre en la situación que nos ocupa:

$$E(x) = 10 \cdot 0,85 = 8,5 \text{ personas a favor}$$
$$S_x = \sqrt{10 \cdot 0,85 \cdot 0,15} \approx 1,275 \approx 1,3 \text{ persona}$$

Entonces el margen será de:

$$8,5 \pm 1,3$$

Es decir,

$$7,2 \leq x \leq 9,8$$

Lo que quiere decir es que si se toma una muestra al azar de 10 personas de esa comunidad, se esperará que 9 de ellas estén a favor del ingreso de Venezuela al MERCOSUR, con un margen de incertidumbre de aproximadamente de 7 a 10 personas que estén a favor de ese ingreso.

Como ven, el cálculo de estas medidas requiere del conocimiento de dos valores fundamentales de la distribución binomial, n y p.

Recuerden que los valores de probabilidad miden la posibilidad de ocurrencia de un evento, de manera que si su resultado es igual a cero el evento es imposible que ocurra, en la medida que su valor se separa de cero aumenta la probabilidad, aunque no es una regla estricta, puede decirse que si la probabilidad es cercana a 0,20 se dice que el evento es poco probable, si está cerca de 0,50 medianamente probable; de 0,70 altamente probable; cerca de 0,95 casi seguro y si el valor de la probabilidad es 1 se dirá que el evento es totalmente probable o seguro de que ocurra. Nunca una probabilidad será mayor que 1 ni tendrá un valor negativo, recuerden que éste es uno de los axiomas básicos de la probabilidad.

Actividades

1 Con los cálculos obtenidos para completar la distribución de probabilidad para el número de personas a favor del ingreso de Venezuela al Mercado Común del Sur:

- Interpreten la probabilidad de que en la muestra seleccionada haya 7 personas a favor del ingreso de Venezuela al MERCOSUR.
- Interpreten la probabilidad de que al menos seis personas de la muestra estén a favor de este ingreso.
- Interpreten la probabilidad de que dos personas o menos estén a favor del ingreso a MERCOSUR.
- Analicen hacia qué valores de la variable aleatoria se encuentran las mayores probabilidades de ocurrencia. ¿A qué creen que se deba esto?
- A partir del análisis que hicieron antes, chequeen si el valor esperado de la variable y el margen de incertidumbre previamente calculado están localizados por esos valores de la variable aleatoria.

2 Construyan la distribución de probabilidad para la variable aleatoria "*número de personas en contra de la adhesión de Venezuela al MERCOSUR*". Cuiden trabajar con $n = 10$ y $p = 0{,}15$, dado que cambió la variable aleatoria deseada.

- Comparen los valores obtenidos para esta variable con los trabajados en esta lección y que completaron en su cuaderno. ¿Qué observan en las probabilidades? ¿Acaso las distribuciones se comportan en forma inversa o similar? ¿A qué creen que se deba este comportamiento?
- Calculen la esperanza matemática y la desviación estándar para esta nueva variable aleatoria.
- ¿Cómo interpretan su margen de incertidumbre? ¿Qué relación encuentran con el margen de incertidumbre calculado en esta lección?
- Interpreten la probabilidad de que $x = 3$, $x \leq 6$, $x \leq 8$ y $4 < x \leq 7$.

3 Construyan la distribución binomial de probabilidad para una muestra de 7 personas y la variable aleatoria número de personas a favor del ingreso. Comparen resultados de las probabilidades y de $E(x)$.

4 Construyan para la variable aleatoria "número de personas en contra del ingreso de Venezuela al MERCOSUR" la distribución de probabilidad si la muestra es de 20 personas. Observen los resultados de las probabilidades. ¿Aumentará la probabilidad de los valores mayores de la variable? ¿Por qué?

5 Si se plantea que hubo un error en los porcentajes de la población a favor y en contra del ingreso al Mercosur y se plantea que un 75% de la población está a favor y el resto está en contra.

- ¿Modificarán estos valores las distribuciones de probabilidad construidas?
- Comparen la distribución de probabilidad para la variable aleatoria *Número de personas a favor del ingreso de nuestro país al Mercado Común del Sur*, con $n = 10$.
- Comparen los valores de la Esperanza matemática, la desviación estándar y los márgenes de incertidumbre para esta variable y tamaño de muestra. ¿Pueden llegar a alguna conclusión al respecto?
- ¿Qué se debería mejorar en términos comunicacionales, de producción y de beneficios sociales para que el porcentaje de venezolanas y venezolanos en contra de pertenecer al MERCOSUR disminuya?

6 Si ahora la situación establece que 9 de cada 10 productos que se comercializarán en el Mercosur, tendrán salida y venta exitosa, en el marco de la complementariedad de mercados, y les piden que con una muestra de 15 artículos a comercializar construyan la distribución de probabilidad:

- ¿Qué probabilidad habrá de que solo 10 artículos tengan salida y venta exitosa?
- Interpreten la probabilidad de que 8 a 12 artículos tengan salida y venta exitosa en el MERCOSUR.
- Interpreten la probabilidad de que 3 a 7 artículos **no** tengan salida y venta exitosa en ese mercado. ¿Hay alguna complementariedad entre estas últimas probabilidades calculadas?
- Obtengan e interpreten el margen de incertidumbre para esta variable. Reflexionen qué medidas se deberían adoptar para optimizar la situación de salida y venta exitosa de estos productos o cualquier otro, por parte de nuestro país.

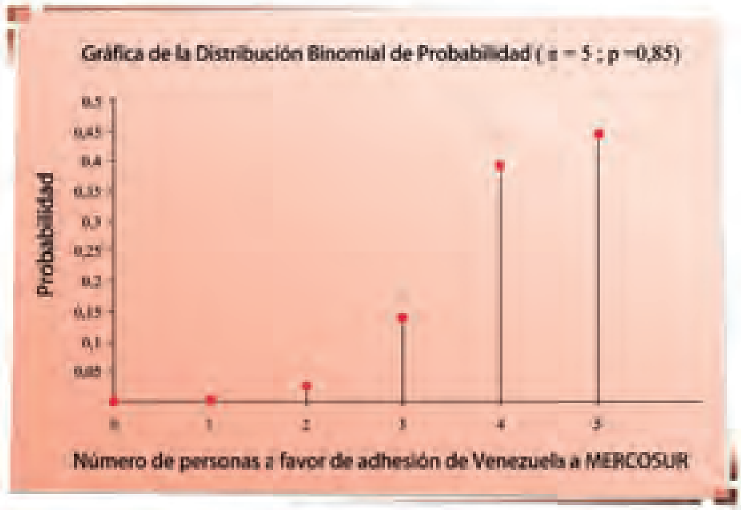
7 Redacten un ensayo en el que se reflejen tanto las ganancias de aprender el contenido matemático desarrollado en esta lección y cómo puede contribuir a dar respuestas a interrogantes sobre eventos por ocurrir, así como el apoyo que puede brindar estas herramientas matemáticas en la toma de decisión. Preséntenlo a su clase y discutan los diversos puntos de vista que muy probablemente surgirán de estas creaciones.

Graficando la Distribución Binomial

Esta distribución de probabilidad al igual que las distribuciones de frecuencias puede ser presentada de manera gráfica. Como la variable aleatoria es cuantitativa, se utilizará un plano cartesiano. En el eje de las abscisas o eje X se colocará de manera escalada la variable aleatoria, por ejemplo, *Número de personas a favor de la adhesión de Venezuela al MERCOSUR* o número de artículos con salida y venta exitosa; en el eje de las ordenadas o eje Y se coloca de manera escalada la *Probabilidad*. Para cada eje se deben considerar los valores máximos y mínimos en cada caso.

En esta lección, a ustedes les corresponde culminar la tabla para una muestra de 10 personas, en este caso se explicará como presentar gráficamente una distribución para la variable aleatoria x = número de personas a favor de la adhesión de Venezuela a Mercosur, una muestra de $n = 5$ personas y $p = 0{,}85$.

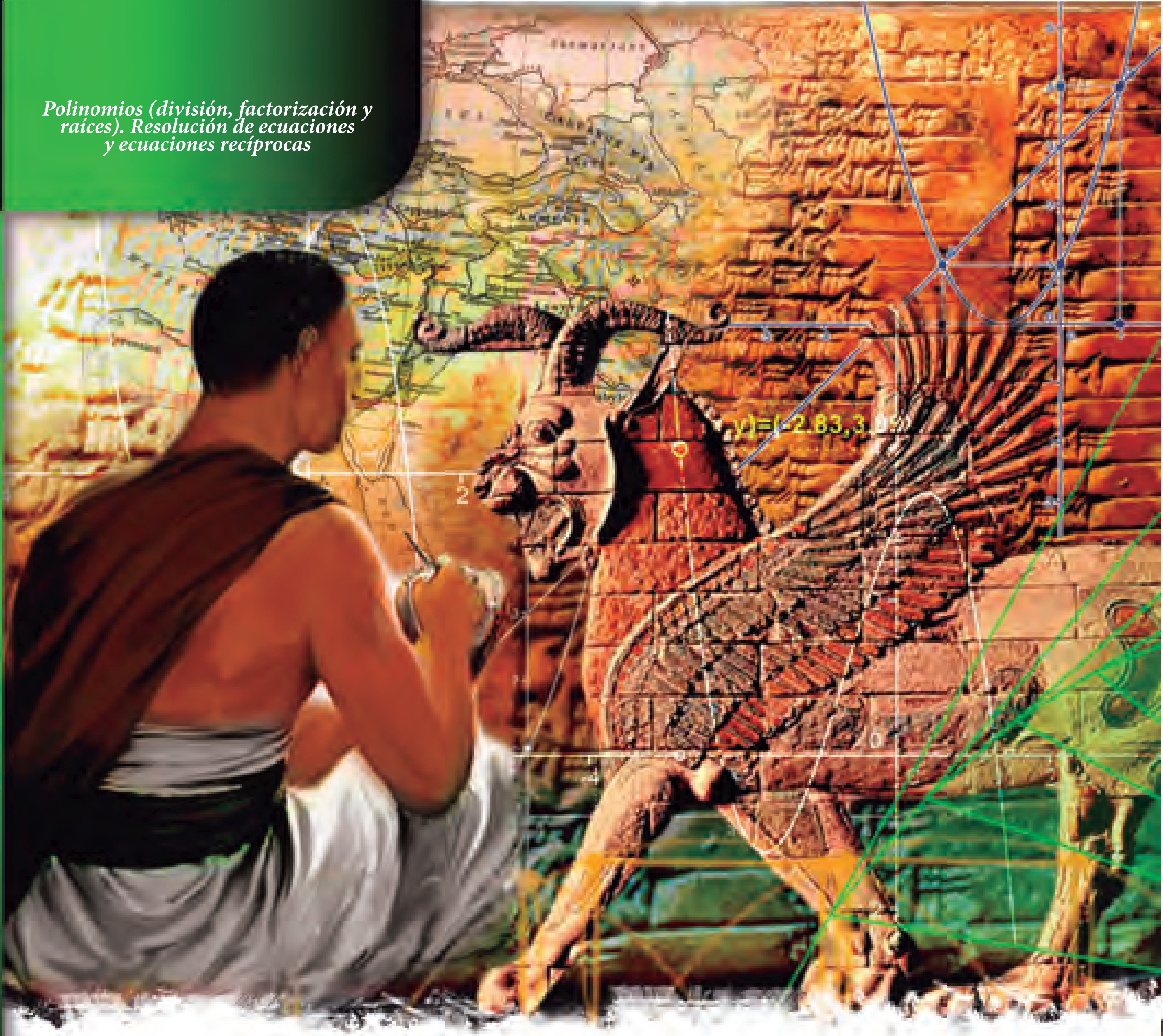
La distribución de probabilidad se construiría tal y como se ha explicado hasta ahora, aplicando la fórmula para obtener la probabilidad de la distribución binomial a cada valor de la variable aleatoria x, los resultados serían los de la tabla adjunta. Observen la siguiente presentación de la distribución de probabilidad construida. La mayor probabilidad alcanzada fue $0{,}4437$ lo que quiere decir que al graficar, el valor máximo del eje Y (la probabilidad) ha de ser $0{,}5$ y el mínimo es cero, por lo que al escalar ese eje se considerarán estos dos datos. Para cada valor de x se trazará una recta perpendicular a su eje Y que alcance el valor de probabilidad correspondiente según la tabla. Su presentación definitiva es la que mostramos:



x	$P(x)$
0	0,0000
1	0,0022
2	0,0244
3	0,1382
4	0,3915
5	0,4437
Suma	1,0000

Luego que construyan las diversas distribuciones binomiales de probabilidad solicitadas en esta lección, preséntenlas en sus correspondientes gráficas y hagan análisis comparativos de los comportamientos presentados.

Desde una anciana tableta



Las ecuaciones polinómicas y sus soluciones

Una anciana tableta perteneciente a la cultura mesopotámica planteaba el problema de resolver la **ecuación**:

$$x^2 - x = 870$$

Por supuesto, los **antiguos babilonios** no usaban nuestra simbología y forma compacta de escritura matemática, pero para simplificar la historia escribiremos la ecuación que querían resolver de manera moderna. Lo más interesante es la forma completamente actual en la que resolvían el problema, idea que seguiremos aquí. En primer lugar completemos el cuadrado:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Luego:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=870$$

Así,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=870+\frac{1}{4}$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$x-\frac{1}{2}=\sqrt{870+\frac{1}{4}}$$

Luego, $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3.481}}{2}=30$. El estudiante puede verificar que la solución es correcta, en efecto: $30^2-30=870$. Ustedes pueden preguntarse: ¿sabían los babilonios sacar raíces cuadradas? Debemos contestar eso y muchas cosas más.

Los antiguos babilonios y su Matemática

Esta civilización conocida también como Mesopotamia (que significa entre ríos) se ubicó entre los ríos Tigris y Éufrates, aproximadamente en el territorio que ocupa actualmente Irak. Desarrollaron su civilización que incluía importantes relaciones económicas con otros imperios, el desarrollo de la arquitectura (jardines colgantes de Babilonia) y la agricultura. Gracias al hecho que usaron tabletas de arcilla, parte de su importante cultura ha llegado a nosotros. Avances importantes en el desarrollo de la escritura (cuneiforme), la astronomía, la matemática y el derecho (código de Hamurabi) provienen de los babilonios. Sin temor a equivocarnos mucho de lo que la humanidad posteriormente iba a perfeccionar nació en Mesopotamia. En matemática crearon:

Un sistema de numeración en base a 60, el cual todavía empleamos ya que lo usamos para medir el tiempo (1 minuto = 60 segundos, 1 hora= 60 minutos) y en la medición de los ángulos (una vuelta completa = 360º).

- ***Conocían sin duda el teorema de Pitágoras miles de años antes que el sabio griego Pitágoras naciera.***
- ***Métodos de solución de ecuaciones de primero, segundo y tercer grado (algunos casos particulares) y sistemas de ecuaciones.***
- ***Una trigonometría rudimentaria pero útil para sus cálculos arquitectónicos***
- ***Podían predecir eclipses.***

Todo esto demuestra los grandes conocimientos de los antiguos babilonios y el respeto que nos inspira esa civilización.

Los babilonios descartaban la raíz negativa de la ecuación y debemos decirle al estudiante que los números negativos tardarían miles de años en hacer su aparición en la matemática.

El procedimiento que explicamos en el ejemplo anterior se puede aplicar a cualquier ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, llevando a la conocida fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Pero, ¿qué ocurre con la ecuación de grado tres $ax^3+bx^2+cx+d=0$? El estudiante que ha leído atentamente nuestra exposición ya sabe que los babilonios resolvieron algunas ecuaciones de tercer grado. Eran casos particulares que resolvían de manera artificiosa. Sin duda esto es un logro extraordinario. Pero la matemática es sistemática y avanza extendiendo y generalizando los resultados conocidos. Luego el problema es *dada la ecuación:*

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

encontrar una fórmula en función de los coeficientes a, b, c y d que nos dé las soluciones de la ecuación. Sorprendentemente pasaron tres mil años para ver un avance en la solución de este problema.

Resolvamos la siguiente ecuación $x^2+4x=15$, tal como lo hacían los babilonios (completando cuadrados).

Cardano y su fórmula

¿Su fórmula? Esto es una historia que involucra a los matemáticos italianos del siglo XVI, más bien a dos de ellos, **Cardano** y **Tartaglia**. Es una historia de juramentos, peleas y descubrimientos apasionante. Pero veamos primero la idea detrás del descubrimiento de **Tartaglia**. La idea en cuestión es sencilla y probablemente el estudiante la conoce: algunas ecuaciones se pueden reducir de grado mediante una sustitución de variables inteligente. Por ejemplo, consideremos la ecuación:

$$x^4-6x^2+5=0$$

Es una ecuación de cuarto grado para la cual no hemos estudiado ninguna fórmula que le dé las soluciones. Pero notarán que la sustitución $x^2=y$ cambia la ecuación a:

$$y^2-6y+5=0$$

Pero ¡esto es una ecuación de segundo grado! que sí podemos resolver. De hecho sus soluciones son $y=1, y=5$. Luego las soluciones son $x=\pm 1$ y $x=\pm\sqrt{5}$. Volvamos a nuestra historia principal, ¿cómo resolver mediante una fórmula la ecuación de tercer grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$?

El matemático italiano **Tartaglia** tenía un problema para hablar, de hecho "**Tartaglia**" significa "tartamudo" en italiano. Sin embargo, tenía una mente brillante, su tartamudez era debida a heridas ocasionadas en las guerras donde participó como soldado. Lo que vamos a exponer tuvo que esperar miles de años para ser descubierto.

Tomemos la ecuación $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a=1$. Esto se logra dividiendo todo por a ya que a no puede ser nulo, de lo contrario tendríamos una ecuación de segundo grado. Así la ecuación inicial es:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

Tartaglia observó que era más sencillo resolver las ecuaciones que no tienen término cuadrático. Este término se puede eliminar mediante la substitución $x=x_1-\dfrac{a}{3}$ ya que:

$$\left(x_1-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(x_1-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(x_1-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

Realizando los cálculos vemos que al elevar la parte correspondiente al cubo obtenemos el término $-ax_1^{\,2}$, y al desarrollar el cuadrado aparece $ax_1^{\,2}$, luego los términos se cancelan y podemos suponer que de entrada tenemos la ecuación:

$$x^3+px+q=0$$

Ahora **Tartaglia** llama $x=u-v$ y sustituye esto en la ecuación:

$$(u-v)^3+p(u-v)+q=0$$

Luego,

$$u^3-v^3-3u^2v+3uv^2+p(u-v)+q=0$$

La idea de **Tartaglia** de introducir las variables u y v es poder disponer la ecuación como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sigamos con el álgebra como lo hizo **Tartaglia**.

$$u^3-v^3-3u^2v+3uv^2+p(u-v)+q=u^3-v^3-3uv(u-v)+3+p(u-v)+q=0$$

Factorizando u-v obtenemos:

$$u^3 - v^3 - (u - v)(-3uv + p) + q = 0$$

Podemos suponer que $u - v$ no es cero y dividir la ecuación anterior en el sistema:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + q = 0 \\ 3uv - p = 0 \end{cases}$$

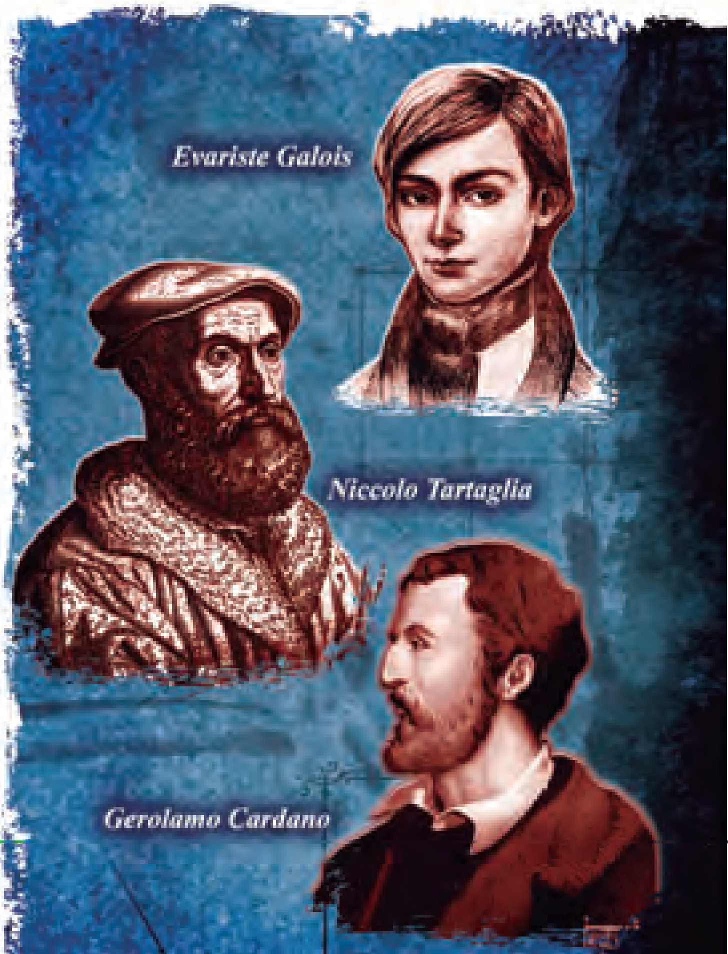
Despejamos v de la segunda ecuación para obtener $v = \dfrac{3p}{u}$ y sustituimos esto en la primera ecuación. Obtenemos $u^3 - \left(\dfrac{3p}{u}\right)^3 + q = 0$. Luego, sumando las fracciones tenemos que $\dfrac{u^6 - 27p^3 + qu^3}{u^3} = 0$ y esto implica que:

$$u^6 - 27p^3 + qu^3 = 0$$

Les pedimos a las y los estudiantes que vean esta ecuación por unos minutos, ¿pueden resolverla? Si han seguido con cuidado estas ideas seguro tendrán la respuesta: ¡hacemos la sustitución $u^3 = y$! Esto reduce la ecuación a una ecuación de segundo grado que podemos resolver, de hecho obtenemos la ecuación:

$$y^2 + qy - 27p^3 = 0$$

Y ahora es cuestión de encontrar los valores de y mediante la fórmula babilónica. Luego hallamos u ya que $u = \sqrt[3]{y}$, pero esto permite hallar v ya que $v = \dfrac{3p}{u}$. Por último hallamos x, ya que sabemos $x = u - v$. Esto permite hallar las soluciones de la ecuación de tercer grado mediante las fórmulas de **Cardano**. Un momento, ¿no era **Tartaglia** quién descubrió la fórmula? Sí, eso es cierto, fue **Tartaglia**. Pero en aquella época los matemáticos no revelaban sus descubrimientos con facilidad. De hecho, se realizaban torneos que consistían en resolver ecuaciones de tercer grado y **Tartaglia** los ganaba todos porqué tenía la fórmula secreta. Un buen día **Cardano** se le acercó y le suplicó que le mostrase su maravillosa arma oculta. Le juró a **Tartaglia** que no revelaría su secreto. **Tartaglia** de manera ingenua le reveló su fórmula, al poco tiempo **Cardano** publicó su tratado de álgebra *Ars Magna* donde incluía la fórmula de **Tartaglia** como si fuese un descubrimiento suyo.



Desde ese día, la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado se llama fórmula de **Cardano**; aunque ya Ud. sabe cuál es su historia. No se sienta mal por **Tartaglia**, de hecho este personaje publicó algún trabajo de Arquímedes como si fuera propio.

Por último, las y los estudiantes deben pensar que todas esas sustituciones hechas por **Tartaglia** parecen imposibles de hallar y que son obra de una inspiración extraordinaria. Lo que nunca sabremos son cuántos caminos erróneos siguió **Tartaglia** antes de encontrar las ideas correctas. Estamos seguro que fue un largo y doloroso proceso de ensayo y error. Como decía nuestro gran Simón Rodríguez "o inventamos o erramos" y en el ensayo erróneo aprendemos a superar los escollos que conducen al camino correcto.

Ecuaciones de grado cuatro y superiores

La historia no termina aquí, pronto el matemático italiano **Ferrari** encontró la fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado. Por supuesto que los matemáticos se sentían entusiasmados. Habían logrado en pocos años lo que los matemáticos del pasado no habían logrado en miles de años. Además las fórmulas de **Cardano** y **Ferrari** implicaban la necesidad de trabajar (aunque de manera artificiosa) con números complejos. Parecía que todo estaba servido para el siguiente gran avance: la ecuación de quinto grado. Aquí aparece otro italiano, **Ruffini**, médico y matemático, quien demuestra que la ecuación de quinto grado no se puede resolver por medio de una fórmula.

Vamos a entender esto. Se trata de que no podemos encontrar una fórmula que involucre a los coeficientes del polinomio, extracción de raíces y que nos de las raíces del polinomio. Por supuesto que existen ecuaciones de quinto grado que se pueden resolver pero se trata de resolver la ecuación general de quinto grado:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

a la manera de los babilonios o de **Tartaglia**. Se trataba de encontrar una fórmula que en un número finito de pasos llevase a las raíces de la ecuación. Los matemáticos descubrían que no era posible hacerlo todo y que su ciencia tenía limitaciones. Poco tiempo después de **Ruffini**, un joven genio apareció y completó de manera magistral las ideas pioneras de **Ruffini**. Su trabajo llevó a demostrar otras imposibilidades como cuadrar el círculo o duplicar el cubo pero eso es tema para otra lección. El joven murió a los 20 años estableciendo el comienzo del álgebra abstracta, su nombre era **Evariste Galois**.

Los polinomios, su factorización y las ecuaciones polinómicas

El **Teorema Fundamental de la Aritmética** afirma que cualquier número natural se puede descomponer como producto de números primos. Esto permite considerar los números primos como los bloques, o ladrillos, que sirven para construir al resto de los enteros. Por ejemplo, $26 = 2 \cdot 13$ donde 2 y 13 son números primos, y en general cualquier natural n se escribe como:

$$n = (p_1)^{r_1} (p_2)^{r_2} \cdots (p_k)^{r_k}$$

donde los $p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ son números primos. Esta escritura es única, salvo que se cambie el orden de los factores. De esta manera podemos calcular fácilmente todos los divisores de n y estudiar sus más importantes propiedades. Para los polinomios reales ocurre una descomposición similar, en la que los polinomios $(x-a)$ y los polinomios de segundo grado sin raíces reales juegan el mismo papel de los números primos. De hecho, como veremos más adelante, cualquier polinomio $p(x)$ se escribe como:

$$p(x) = (x-a_1)^{r_1} (x-a_2)^{r_2} \cdots (x-a_k)^{r_k}\, q_1^{\,j_1}(x) q_2^{\,j_2}(x) \cdots q_m^{\,jm}(x) \qquad (A)$$

Los polinomios q_i son polinomios cuadráticos sin raíces reales, es decir, irreducibles, en el sentido de que no los podemos escribir como un producto de polinomios con coeficientes reales de primer grado. Estos y los polinomios del tipo $(x-a)$ son los análogos a los números primos. La descomposición expresada en la fórmula (A) es muy importante ya que permite:

- Conocer los ceros o raíces del polinomio a simple vista.
- Permite graficar el polinomio con facilidad.
- Podemos conocer todos los divisores del polinomio.
- Tiene gran importancia teórica en el estudio de los polinomios.

Así que uno de los objetivos que nos proponemos aquí es descomponer, en el marco de los conocimientos asociados al nivel de *Educación Media*, un polinomio en la forma descrita. Para ello investigaremos cómo encontrar las raíces de un polinomio y estudiaremos métodos como el de **Ruffini**, con la intención de calcular, rápidamente, el cociente y el resto de una división.

Encontrar una raíz equivale a resolver una ecuación polinómica. Discriminaremos si las raíces de cierto polinomio son enteras, racionales, irracionales o complejas; y, además, estudiaremos cierto tipo de ecuaciones llamadas recíprocas.

También trataremos la solución de ecuaciones trascendentes, que, mediante una sustitución adecuada, se reducen a ecuaciones polinómicas.

En suma, las ecuaciones polinómicas ofrecen a las y los estudiantes un mundo de diversas e importantes aplicaciones de la Matemática en ciertos problemas y fenómenos del contexto, de la naturaleza y de otras disciplinas. La tecnología representará un apoyo medular en esta tarea. De seguidas mostramos una brevísima lista de las herramientas que nos brinda Internet para el estudio de los polinomios.

Recursos en la web

- En youtube encontrarán muchos videos sobre el método de Ruffini, factorización de polinomios, búsqueda de raíces, etc.
- La página **http://www.wolframalpha.com/** es excelente. En ella pueden escribir un comando, por ejemplo, *factor* (x^2-1) y les devolverá la factorización $(x-1)(x+1)$. Otro comando útil es *solve* ( ) –deben colocar la ecuación a resolver dentro de los paréntesis. Por ejemplo, al tipear *solve* $(x^2-1=0)$ se tendrán las soluciones $x=1,-1$.

  En esta página hay muchas otras herramientas, tal es el caso de graficar una función o acceder a datos históricos sobre las matemáticas.
- Piensen en crear un grupo con sus compañeros de clase y crear una página en Internet junto con su profesora o profesor.
- Descarguen el software **Geogebra**, o algún otro paquete libre, e instálenlo en el Laboratorio de su Liceo y en sus computadores personales. Geogebra, por ejemplo, permite graficar funciones, resolver ecuaciones, encontrar la intercepción entre curvas y otras cosas.

¿Qué son los polinomios?

Un polinomio $p(x)$ en una indeterminada x con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

donde cada a_j, $j=1,2,\dots,n$, es un número real denominado el **coeficiente del término** x^j. La mayor potencia de x que aparezca en el polinomio se denomina el **grado** del polinomio. Los exponentes de x deben ser números naturales.

Para que dos polinomios se consideren idénticos deben tener el mismo grado y todos sus coeficientes iguales. Los polinomios pueden ser definidos con coeficientes en distintos sistemas numéricos. Podemos hablar de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, y en este caso el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros es denotado por $\mathbb{Z}[x]$. También se consideran los polinomios con coeficientes en los racionales $\mathbb{Q}$, obteniendo el conjunto $\mathbb{Q}[x]$.

En nuestro caso, por la utilidad en distintas aplicaciones y en vista a la preparación necesaria de ustedes, consideraremos polinomios cuyos coeficientes están en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$; y el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales lo denotaremos por $\mathbb{R}[x]$.

Algunos ejemplos de polinomios son:

- El polinomio $p(x)=1-\sqrt{2}x$ es un polinomio con coeficientes reales de primer grado, es decir, $p(x)\in\mathbb{R}[x]$, sin embargo, como recordarán, $\sqrt{2}$ no es un número racional, luego $p(x)=1-\sqrt{2}x$ no está en $\mathbb{Q}[x]$.
- El polinomio $q(x)=1-x^3+2x$ está en $\mathbb{Z}[x]$ y por consiguiente también está en $\mathbb{Q}[x]$. ¿Está $q(x)=1-x^3+2x$ en $\mathbb{R}[x]$?
- Las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes reales: $p(x)=1+x+x^3$ y $q(x)=x^4+3x-\sqrt{2}$. El polinomio $p(x)$ tiene grado 3 y el polinomio $q(x)$ tiene grado 4.
- La expresión $r(x)=1-x^{\sqrt{3}}$ no es un polinomio ya que x aparece con una potencia real pero no natural.
- Los polinomios de la forma $p(x)=1$ y $q(x)=7$, entre otros, son llamados polinomios constantes. Su grado se define como 0.

El **coeficiente principal** de un polinomio es el coeficiente de la mayor potencia de x del polinomio. El término del polinomio que no contiene x se denomina **término independiente**. Los polinomios se denominan *mónicos* si su coeficiente principal es 1. Así, $p(x)=3+5x^3+x^4+\sqrt[3]{2}x^2$ es un polinomio mónico.

Ustedes deben distinguir entre un **polinomio** y la **función polinómica** asociada a él. Cualquier función está representada por un conjunto de partida (su dominio) y una regla de correspondencia. Así que cuando tomamos un polinomio no podemos hablar de función ya que no hemos tocado en absoluto la idea del dominio. Posteriormente, cuando hablemos de las raíces nos interesará sobremanera precisar la naturaleza de la función polinómica.

Actividades

1 Identifiquen cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. En caso que lo sean, indiquen su grado.

- $p(x)=1+2x^3$
- $q(x)=3x^{-1}$
- $m(x)=3x-5x^5+x^3+\dfrac{3}{4}$
- $r(x)=\sqrt[3]{3}$
- $w(x)=2+x^2$
- $n(x)=7$

2 El polinomio $p(x) = x^3 - 2ax + 7$ es igual al polinomio $q(x) = x^3 + bx^2 + x + 3c$. ¿Cuánto valen a, b y c?

3 ¿Es $q(x) = \sqrt[3]{x^6} - x + \sqrt{3}$ un polinomio? En caso afirmativo, ¿cuál es su grado?

Operaciones con polinomios

Ustedes recordarán de sus estudios de segundo año, que si tenemos dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, ellos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

Operaciones como la adición, multiplicación y división de polinomios se estudiaron en segundo año del nivel de *Educación Media*, así como sus propiedades. En lo que sigue nos concentraremos en la división de polinomios y algunos resultados que ya estamos en condiciones de comprender.

División de polinomios

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que el grado de $p(x)$ es mayor igual al grado de $q(x)$, esta condición es importante si queremos dividir el polinomio $p(x)$ por el polinomio $q(x)$. El método que ya mostramos en segundo año de *Educación Media* se conoce como *división larga*, similar a lo que hacemos cuando dividimos dos números naturales. Al dividir $p(x)$ y $q(x)$ queremos encontrar dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$, denominados cociente y resto de la división respectivamente, tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

donde el grado de $r(x)$ *debe ser menor* que el grado de $q(x)$. También tenemos que el grado de $c(x)$ debe ser el grado de $p(x)$ menos el grado de $q(x)$. Por ejemplo, al dividir $p(x) = 2x^4 - x^2 + 5x^3 + 7$ por $q(x) = x^2 - x + 3$, obtenemos que:

$$2x^4 - x^2 + 5x^3 + 7 = \left(x^2 - x + 3\right)\left(2x^2 + 7x\right) + \left(-21x + 7\right)$$

Verifiquen esto por cálculo directo.

Tal procedimiento para dividir polinomios es conocido como **algoritmo de Euclides**. Como ya sabemos, *un algoritmo es un procedimiento secuencial para lograr un objetivo o resolver un problema*. Una observación importante es que los polinomios $c(x)$ y $r(x)$, tales que $p(x)=q(x)c(x)+r(x)$ con el grado de $r(x)$ menor que el de $q(x)$, son únicos. Para ver esto razonaremos por lo que los matemáticos denominan *reducción al absurdo*.

El algoritmo de Euclides se encuentra en el libro séptimo de Los Elementos

Supongamos que existen otros polinomios $c_1(x)$ y $r_1(x)$, tales que:

$$p(x)=q(x)c_1(x)+r_1(x)$$

con el grado de $r_1(x)$ menor que el de $q(x)$. Y además $c_1(x)\neq c_2(x)$.

Restando las igualdades:

$$p(x)=q(x)c_1(x)+r_1(x)$$
$$p(x)=q(x)c(x)+r(x)$$

Obtenemos $0=q(x)(c_1(x)-c(x))+r_1(x)-r(x)$ y aquí encontramos un grave problema, el grado de $q(x)(c_1(x)-c(x))$ es, al menos, el de $q(x)$; y el de $r_1(x)-r(x)$ ¡es menor que el de $q(x)$! En consecuencia, es imposible que la suma sea el polinomio nulo. Por tanto, los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ son únicos.

Decimos que un polinomio $p(x)$ de grado n es **divisible** por un polinomio $q(x)$ de grado m, $n\geq m$, si y solo si el resto de la división de $p(x)$ por $q(x)$ es cero; esto es, si existe un polinomio $c(x)$ tal que:

$$p(x)=q(x)c(x)$$

Si $p(x)$ es divisible por $q(x)$ decimos que $q(x)$ es un **divisor** o **factor** de $p(x)$. Un polinomio con coeficientes reales se dice **irreducible** si no puede escribirse como producto de polinomios con coeficientes reales de menor grado. Éstos son los análogos a los números primos para los números enteros.

Como ejemplos tenemos:

- Cualquier polinomio $p(x)$ es divisible por un polinomio constante no nulo $q(x)=t$. En efecto, si $p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ entonces:

$$p(x)=t\left(\frac{a_0}{t}+\frac{a_1}{t}x^1+\frac{a_2}{t}x^2+\cdots+\frac{a_j}{t}x^j+\cdots+\frac{a_{n-1}}{t}x^{n-1}+\frac{a_n}{t}x^n\right)$$

  Aquí $c(x)=\frac{a_0}{t}+\frac{a_1}{t}x^1+\frac{a_2}{t}x^2+\cdots+\frac{a_j}{t}x^j+\cdots+\frac{a_{n-1}}{t}x^{n-1}+\frac{a_n}{t}x^n$.

- El polinomio $p(x)=x^4-1$ es divisible por el polinomio $q(x)=x^2+1$. Para ver esto observamos que $x^4-1=\left(x^2\right)^2-1^2=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$, lo que demuestra la afirmación.
- El polinomio $p(x)=x^2+x+1$ es irreducible en el conjunto de los números reales, ya que sus raíces son complejas (revisen el libro de Matemática de cuarto año de la *Colección Bicentenario*). El concepto de polinomio irreducible depende del sistema numérico en el que trabajemos.

El método de los coeficientes indeterminados

Vamos a ver una manera alternativa de encontrar el cociente y el resto de la división entre dos polinomios. Este método se basa en que conocemos la estructura de los polinomios que forman el cociente y el resto de la división y esto nos permite calcularlos. Empezaremos con un ejemplo y después formularemos el método en general.

Hallemos, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, el resto y el cociente que se obtienen al dividir el polinomio $p(x)=x^4-x^3+x-1$ por $q(x)=x^2-1$. Escribimos entonces $p(x)=q(x)c(x)+r(x)$, donde el cociente debe tener grado 2, lo que permite expresarlo como $c(x)=ax^2+bx+k$. Y como $r(x)$ debe ser un polinomio de grado a lo más 1, tiene la forma $r(x)=dx+e$. Por supuesto, l*os coeficientes a, b, k, d y e son los coeficientes indeterminados que debemos hallar*. Conociendo que $p(x)=q(x)c(x)+r(x)$, planteamos:

$$p(x)=x^4-x^3+x+1=\left(x^2-1\right)\left(ax^2+bx+k\right)+dx+e$$

Ahora aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

$$\begin{aligned}\left(x^2-1\right)\left(ax^2+bx+k\right)+dx+e&=ax^4+bx^3+kx^2-ax^2-bx-k+dx+e\\&=ax^4+bx^3+(k-a)x^2+(d-b)x+e-k\end{aligned}$$

Luego, igualando:

$$ax^4+bx^3+(k-a)x^2+(d-b)x+e-k=x^4-x^3+x-1$$

Recordemos que dos polinomios son iguales si, y solo si, sus coeficientes son iguales. Por tanto, debe ocurrir que:

$$a=1,\ b=-1,\ k-a=0,\ d-b=1,\ e-k=-1$$

Observen de las cinco ecuaciones algunas ya están resueltas. Como $k-a=0$, entonces $k=1$, y luego, e debe ser 0. Finalmente, como $d-b=1$ y $b=-1$, entonces $d=0$. Así, $c(x)=x^2-x+1$ y $r(x)=0$. Hemos mostrado que el polinomio $p(x)=x^4-x^3+x-1$ es divisible por el polinomio $q(x)=x^2-1$.

El método de los coeficientes indeterminados se basa en conocer la estructura, en función de ciertos parámetros, que debe tener un objeto matemático y usar la misma para determinar los parámetros indeterminados.

Otro ejemplo: afirmamos que el polinomio x^2+1 no es divisible por polinomio alguno de primer grado que esté en $\mathbb{R}[x]$. Veamos esto, supongamos que existe un polinomio de grado 1, $x-a$, con a un número real, que divide a x^2+1, es decir,

$$x^2+1=(x-a)(cx+d)=cx^2+dx-acx-ad$$

Luego, $c=1$, $d-ac=0$, $-ad=1$. Así, $d=a$ y luego $-a^2=1$. Pero esto es imposible en los reales, y por ende, no puede existir tal polinomio.

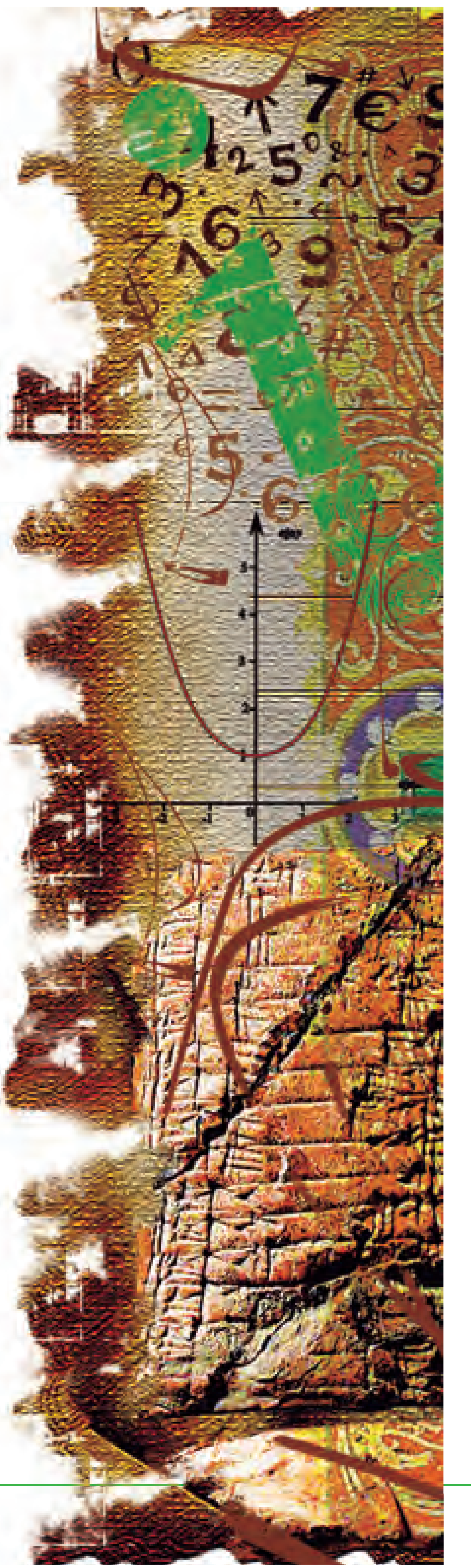
Este ejemplo demuestra que el concepto de divisibilidad depende de manera decisiva del sistema numérico donde tomemos los coeficientes del polinomio. En los complejos es posible escribir $x^2+1=(x-i)(x+i)$, donde i es la unidad imaginaria.

Un ejemplo más. Consideremos la función racional (cociente entre dos polinomios):

$$\frac{x+5}{x^2-4}$$

Escribiremos esta expresión como la suma de funciones racionales más simples. *Solución*: sabemos que $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Ahora podemos suponer que:

$$\frac{x+5}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$



Sumamos las fracciones que están a la derecha de la igualdad, obtenemos un polinomio de grado 1 en el numerador y el denominador será:

$$(x+2)(x-2)=x^2-4$$

Veamos:

$$\frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4}$$

Por ello $A(x-2)+B(x+2)=(A+B)x-2A+2B=x+5$. Y la definición de igualdad de polinomios implica aquí que:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B=5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos que $B=\frac{7}{4}$ y $A=-\frac{3}{4}$.

El **método de los coeficientes indeterminados** consiste en:

a) Plantear la estructura que debe tener la solución en función de ciertos parámetros desconocidos,

b) Desarrollar la expresión obtenida para encontrar las ecuaciones que determinan los parámetros, y

c) Resolver el sistema para encontrar los coeficientes indeterminados o parámetros del sistema.

Actividades

1) Descompongan la fracción $\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2}$ en una suma de fracciones simples por el método de los coeficientes indeterminados.

2) Determinen A y B para que el polinomio x^3+Ax+B sea divisible por $(x-2)^2$.

3) El resto al dividir un polinomio $p(x)$ *de grado mayor o igual que 3* por $x-2$ es 5. Y el resto al dividir el polinomio por $x+1$ es 3. ¿Cuál es el resto al dividir el polinomio por $(x-2)(x+1)$?

Las raíces de un polinomio

División por $x-a$, el teorema del resto y factorización de un polinomio

Un caso importante de la división entre polinomios es cuando el divisor es un polinomio de primer grado: $x-a$. Este es el momento oportuno para considerar funciones polinómicas definidas en el campo de los números reales.

Una **función polinómica** real $p(x)$ es una función, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, que a cada número real x le asigna el número:

$$p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

donde el polinomio $p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ tiene coeficientes reales.

El conjunto de llegada de la función $p(x)$ es el conjunto de los números reales. En notación funcional:

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

Existen ciertos valores distinguidos en el dominio de la función polinómica, denominados las **raíces del polinomio**.

Un número real x_0 es una raíz del polinomio:

$$p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

si, y solo si, $p(x_0)=0$, es decir, x_0 es una raíz de $p(x)$ si, y solo si, x_0 es solución de la ecuación:

$$a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$$

Veamos algunos ejemplos.

- El polinomio $p(x)=x^2+4$ no tienes raíces reales ya que como función polinómica verifica que $p(x)>0$ para cualquier real x.

- Las raíces del polinomio $p(x)=x^3-x$ se calculan de la siguiente forma: factorizamos $x^3-x=x(x^2-1)$. Luego debemos resolver la ecuación $x(x^2-1)=0$. Por tanto, las raíces de $p(x)=x^3-x$ son $x=0,\ x=\pm 1$
- Un resultado del *Cálculo* demuestra que cualquier polinomio de grado impar debe tener al menos una raíz real. El resultado es falso para polinomios de grado par (como pueden advertir después de pensar brevemente).

Les proponemos la actividad que sigue:

Para cualquier grado par, construyan un polinomio que tenga ese grado y que no tenga raíces reales.

Geométricamente, una raíz representa la intersección del gráfico de la función polinómica real con el eje x.

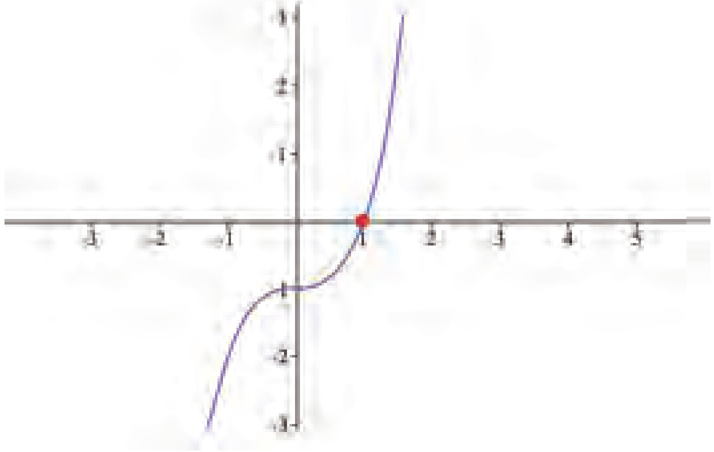


Gráfico 1. La curva corresponde a la función polinómica real $p(x)=x^3-1$

Observen que $x=1$ es una raíz del polinomio dado y es, de hecho, la única raíz real de éste.

Proyecto de Investigación

Para este proyecto necesitarán: (a) el software *Geogebra* (pueden descargarlo a su computador o usarlo en línea. Su página es www.geogebra.org) y (b) una calculadora de bolsillo.

Problema: Comprueben mediante exploraciones numéricas y gráficas que cualquier polinomio de grado impar *tiene una raíz real.*

Punto 1: Construyan un polinomio $p(x)$ de grado impar relativamente sencillo, donde $1 < \textit{grado de } p < 7$. Observen que si es de grado 1 el resultado es cierto. Expliquen con sus palabras el porqué de esta última afirmación.

Punto 2: Elaboren, con apoyo de su calculadora, una tabla de valores de la función polinomio. Nos interesa ver qué ocurre cuando x se hace muy grande en valor absoluto (tomen valores grandes, positivos y negativos).

Punto 3: Busquen en la tabla un valor a de x donde $p(a)>0$ y un valor b de x donde $p(b)<0$. ¿Qué ocurre si una función cambia de signo en dos valores de su dominio?

Punto 4: Usen el software *Geogebra* para verificar que p corta el *eje x* en algún momento.

Una observación elemental derivada del algoritmo de Euclides es que si dividimos un polinomio $p(x)$ por un polinomio de la forma $x-a$, entonces el resto debe ser un polinomio de grado 0, es decir, el resto es un polinomio constante que llamaremos r. Luego, aplicando el algoritmo de Euclides debemos tener:

$$p(x)=(x-a)c(x)+r$$

Evaluando la igualdad en $x=a$, obtenemos $p(a)=(a-a)c(a)+r=r$. Esto es, el valor del resto es $p(a)$. El resultado es notable y se conoce como el **Teorema del Resto**. Vamos a enunciarlo de manera explícita para resumir nuestra discusión.

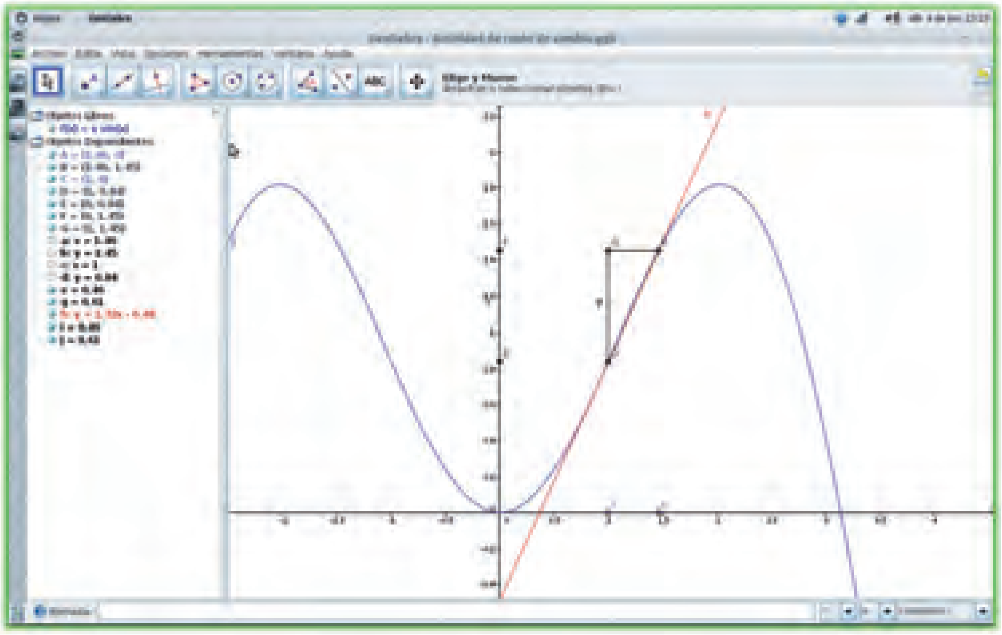


Gráfico 2. Una pantalla de software Geogebra

Teorema del resto

Si dividimos un polinomio $p(x)$ por un polinomio de la forma $x-a$ entonces el resto es $p(a)$.

Una aplicación importante de este resultado es que nos da un criterio de divisibilidad por $x-a$.

Recordamos que un polinomio $p(x)$ es divisible por $x-a$ si el resto de la división es el polinomio constante 0, pero entonces $p(a)=0$. El argumento se puede invertir demostrando que $p(x)$ es divisible por $x-a$ si, y solo si, $p(a)=0$.

Un polinomio $p(x)$ es divisible por $x-a$ si, y solo si, $p(a)=0$. Esto es equivalente a decir que a debe ser una raíz del polinomio $p(x)$ y también equivale a decir que el número a debe resolver la ecuación polinómica:

$$p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$$

Mostremos algunos ejemplos.

Para hallar el coeficiente k en el polinomio $p(x)=1+kx-3x^2+x^3$ de manera que sea divisible por $x+2$, razonamos como sigue. Debe cumplirse que $p(-2)=0$; pero $p(-2)=1-2k-12-8=0$. Resolviendo esta ecuación en k se tiene que $k=-\frac{19}{2}$.

Un hecho importante derivado de lo que hemos discutido hasta el momento es que si tenemos un polinomio de grado n, éste puede tener *a lo más n raíces reales*. No estamos afirmando que tales raíces existan pues sabemos que hay polinomios que no tienen raíces reales, lo que decimos es que si $p(x)$ es de grado 3, por ejemplo, entonces $p(x)$ tiene a lo sumo 3 raíces. Veamos el porqué. Supongamos que $p(x)$ tiene grado n, con n mayor o igual que uno. Si $p(x)$ no tiene raíces entonces el resultado es cierto ya que $0<1<n$. Si $p(x)$ tiene al menos una raíz a entonces sabemos que:

$$p(x)=(x-a)\,p_1(x)$$

donde el grado de $p_1(x)$ es $n-1$. Las raíces restantes de $p(x)$, de existir, deben estar en el polinomio $p_1(x)$. Si $p_1(x)$ no tiene raíces reales el resultado es cierto; pero si $p_1(x)$ tiene una raíz, digamos b, entonces $p_1(x)=(x-b)\,p_2(x)$. Con lo cual:

$$p(x)=(x-a)(x-b)\,p_2(x)$$

con el grado de $p_2(x)$ igual a $n-2$. El quid del argumento es que los polinomios $p_1(x),\ p_2(x),\ldots$ forman una sucesión de polinomios de grados estrictamente decrecientes, luego tenemos dos posibilidades mutuamente excluyentes:

- Eventualmente encontraremos un polinomio $p_k(x)$ con $k<n$ que no tiene raíces y el resultado es cierto, ya que en ese instante tendremos $k-1$ raíces.
- El proceso se detiene en exactamente n pasos cuando conseguimos un polinomio constante $p_n(x)$ y en este caso habremos reunido n raíces y el resultado es cierto.

En cualquier caso habremos demostrado nuestra afirmación.

No hemos descartado la posibilidad de que algunas de las raíces que vamos encontrando en el proceso descrito antes sean iguales. Si una raíz a se repite diremos que a es una **raíz múltiple**. Cuando esto ocurre, el término $(x-a)^k$, con algún $k>1$, divide a $p(x)$ y luego:

$$p(x)=(x-a)^s q(x)$$

donde asumimos que s es el mayor exponente admisible en esta forma de escribir $p(x)$. Luego, a no puede ser raíz de $q(x)$. ¿Pueden decir el porqué de la última afirmación? El número s se denomina el **orden de la raíz**. Repitiendo estas ideas con las raíces de $q(x)$, llegamos a la importante factorización de un polinomio $p(x)$.

Cualquier polinomio $p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ con coeficientes reales puede ser escrito como:

$$p(x)=a_n(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}\cdots(x-x_k)^{s_k}q(x)$$

donde el polinomio $q(x)$ no tiene raíces y los $x_1, x_2, \ldots, x_k$, son las raíces de $p(x)$ con órdenes $s_1, s_2, \ldots, s_k$, respectivamente. Además, el polinomio $q(x)$ se escribe como producto de polinomios cuadráticos irreducibles en los reales. Si el polinomio tiene n raíces reales (con algunas repetidas) $x_1, x_2, \ldots, x_k$, el polinomio **se factoriza** como:

$$p(x)=a_n(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}\cdots(x-x_k)^{s_k}$$

Esta descomposición es muy importante ya que las características y comportamiento del polinomio quedan expuestas y facilita tremendamente los cálculos. Una pregunta que podemos hacernos es: **¿cómo encontramos las raíces del polinomio y la descomposición anterior?**

La respuesta a esta pregunta no es trivial y escapa de la Matemática contempladas en el nivel de *Educación Media*. Trataremos de dar algunas indicaciones de cómo lograrlo en nuestras dos próximas secciones.

En este punto les proponemos que:

Comprueben que el polinomio $p(x)=x^3-3x^2-4x-12$ es divisible por los polinomios $x+3$ y $x+2$.

El método de Ruffini

Ruffini estableció un útil algoritmo para calcular el cociente y el resto cuando dividimos por $(x-x_0)$. Vamos a explicar cómo trabaja y luego justificaremos su idea. Supongan que queremos dividir $p(x)=x^4-3x^3+5x^2-7x+9$ por $(x-2)$.

Colocamos entonces los coeficientes de $p(x)$ en un arreglo como el que indicamos. Si alguna potencia de x falta colocamos un cero. El dos que tenemos al margen izquierdo proviene del término $(x-2)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

El primer paso consiste en colocar el 1 bajo la línea

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Posteriormente multiplicamos el 2 por el 1 (el que está bajo la línea) y lo colocamos debajo del -3. Además, sumamos $-3+2=-1$ y lo escribimos bajo la línea

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & & 2 & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & & & \end{array}$$

Ahora multiplicamos el –1 por 2, escribimos el resultado bajo el 5, y calculamos $5-2=3$. Este resultado se escribe bajo la línea

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & & 2 & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & & \end{array}$$

Reiteramos este proceso pero ahora con el 3: lo multiplicamos por el 2, escribimos este resultado bajo el -7, y calculamos $-7+6=-1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & & 2 & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -1 & \end{array}$$

Finalmente, multiplicamos -1 por 2, lo escribimos bajo el 9, y calculamos $9-2=7$. El cual copiamos bajo la línea

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & & 2 & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -1 & \boxed{7} \end{array}$$

El resto de la división corresponde al último término, es decir, al que aparece después de la línea, en nuestro caso 7. El polinomio cociente $c(x)$ está determinado por el resto de los coeficientes que aparecen en la última fila, tomados como coeficientes del cociente escrito con potencias de x decrecientes. En este caso:

$$c(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$$

Una observación muy útil es que *el método de Ruffini nos da una manera alternativa de evaluar* $p(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 9 = 16 - 24 + 20 - 14 + 9 = 7$.

Demostremos esto de manera general viendo el recorrido que hace x_0 cuando aplicamos el método de Ruffini. Lo primero que hacemos es bajar directamente a_n para obtener $k_0 = a_n$, multiplicar a_n por x_0 y sumarlo con $a_n - 1$, obteniendo $k_1 = a_n x_0 + a_{n-1}$. Esto lo volvemos a multiplicar por x_0 y le sumamos $a_n - 2$ para obtener: $k_2 = a_n (x_0)^2 + a_{n-1} x_0 + a_{n-2}$. Al aplicar el proceso j veces, con j menor o igual que n, obtenemos: $k_j = a_n (x_0)^j + a_{n-1} (x_0)^{j-1} + \cdots + a_{n-j}$

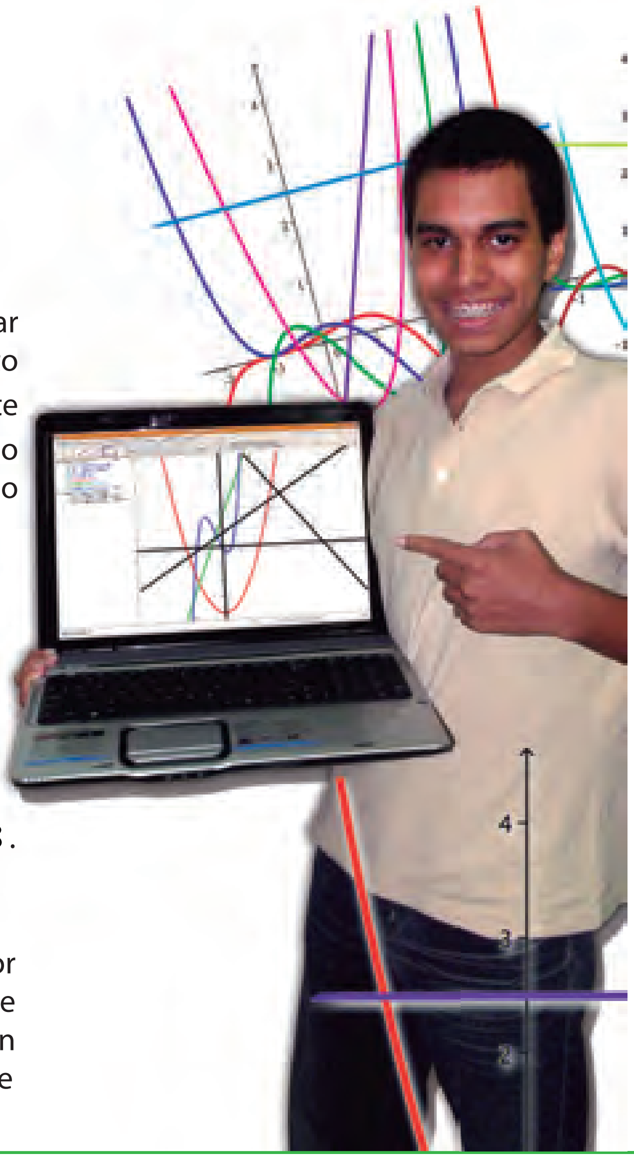
Cuando el parámetro j toma el valor n se obtiene:

$$k_n = p(x_0)$$

Observen también la relación recursiva:

$$k_{j+1} = x_0 k_j + a_{n-(j+1)}$$

Así, hemos demostrado que el resto obtenido al aplicar el método de Ruffini corresponde a lo que debemos obtener, esto es $p(x_0)$. Los coeficientes del cociente deben estar claro al estudiante si este realiza la división larga por $(x - x_0)$, observando con cuidado cómo calculamos cada coeficiente del cociente. De hecho, hacemos lo mismo que hicimos al aplicar el método de Ruffini.



Actividades

1 Consideremos la función polinómica $p(x) = x^4 - 5x^2 + 9x + 8$. Usando el método de Ruffini hallen $p(-3)$.

2 Para calcular $p(x_0)$, ¿es más económico hacerlo por el método de Ruffini o por evaluación directa? La pregunta requiere que estimen cuántas operaciones de suma y multiplicación deben realizar en cada uno de los casos. Si tienen una potencia n-ésima de x_0 deben contar esto como n multiplicaciones.

Una pregunta natural es ¿cómo dividimos $p(x)$ por $ax-b$? La forma más sencilla es dividir $\frac{1}{a}p(x)$ por $\left(x-\frac{b}{a}\right)$ es aplicando Ruffini. Así,

$$\frac{1}{a}p(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)c(x)+r$$

de donde $p(x)=a\left(x-\frac{b}{a}\right)c(x)+ar=(ax-b)c(x)+ar$.

Discutamos algunos ejemplos.

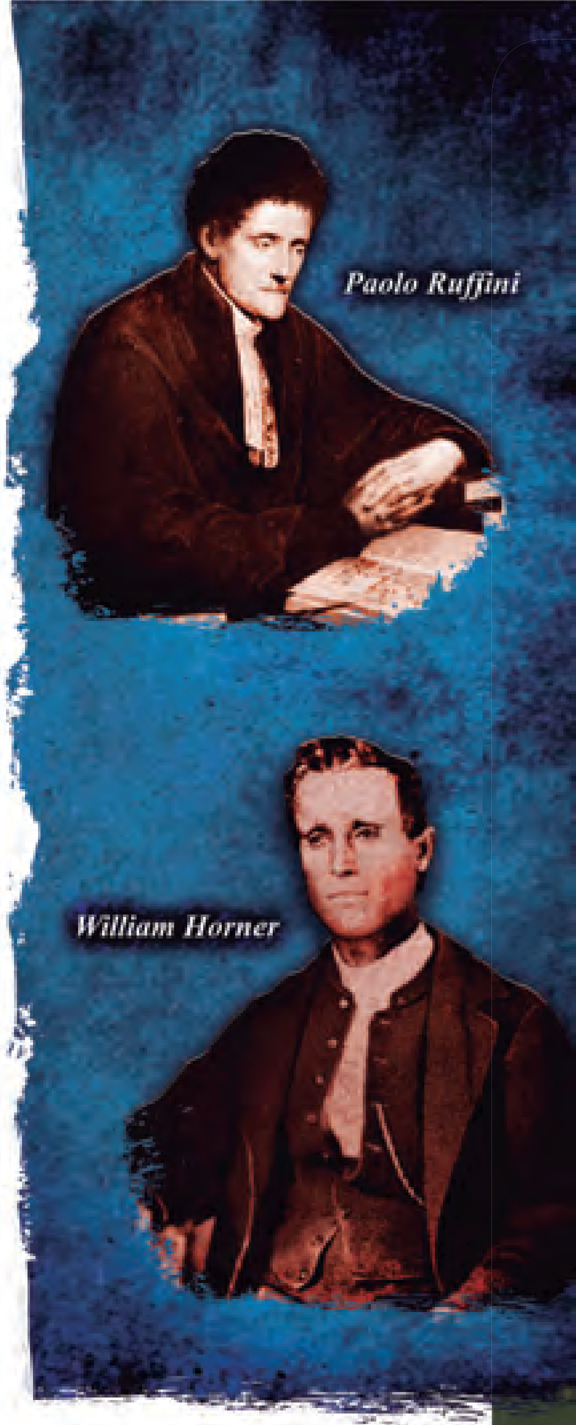
Hallemos el cociente y el resto de dividir el polinomio $3x^3-4x+5$ por $2x+1$.

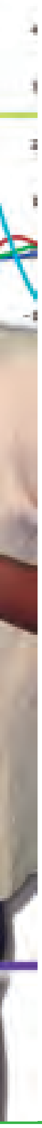
Solución: dividimos el polinomio dado por $x+\frac{1}{2}$ (de acuerdo al método de Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -4 & 5 \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{13}{8} \\ \hline & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{4} & \boxed{\frac{53}{8}} \end{array}$$

El cociente es entonces $3x^2-\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}$

Y el resto es $2\cdot\frac{53}{8}=\frac{53}{4}$





Método de Horner

En muchos casos interesa escribir un polinomio $p(x)$ en términos de potencias de $(x-a)$ en lugar de potencias de x. Esto se logra de manera sencilla mediante la iteración de divisiones por $(x-a)$ hechas por el método de Ruffini. Si el polinomio tiene grado n debemos hacer n *divisiones*. Exponemos el método sin mucho formalismo mediante un ejemplo.

Escribamos el polinomio $p(x)=3x^3+2x^2+x-1$ como potencias de $x-1$.

Volvamos a aplicar el método de Ruffini para dividir $3x^2+5x+6$ por $x-1$ y obtenemos:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 2 & 1 & -1 \\
1 & & 3 & 5 & 6 \\
\hline
 & 3 & 5 & 6 & \boxed{5} \\
1 & & 3 & 8 & \\
\hline
 & 3 & 8 & \boxed{14} &
\end{array}
$$

Obtenemos como cociente $3x+8$ como de resto 14. Nos queda todavía una división sintética por realizar:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 2 & 1 & -1 \\
1 & & 3 & 5 & 6 \\
\hline
 & 3 & 5 & 6 & \boxed{5} \\
1 & & 3 & 8 & \\
\hline
 & 3 & 8 & \boxed{14} & \\
1 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{11} & &
\end{array}
$$

Luego, $p(x)=(x-1)\left(3x^2+5x+6\right)+5$.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x-1)\left[(x-1)(3x+8)+14\right]+5 \\
&= (x-1)\left[(x-1)\left(3(x-1)+11\right)+14\right]+5
\end{aligned}
$$

Ahora expandimos esta expresión:

$$p(x)=3(x-1)^3+11(x-1)^2+14(x-1)+5$$

Noten que:

Los coeficientes del polinomio en $(x-a)$ son los restos que vamos obteniendo al aplicar el método de Ruffini, salvo el coeficiente principal que es el cociente de la última división.

Hipatia
(370-415, aproximadamente)

Es considerada una de las primeras mujeres matemáticas. Fue profesora en la Escuela de Atenas en una época y contexto en que la mujer era apartada de la Matemática, la Astronomía y la Filosofía. Trató las ecuaciones de primer y segundo grado (en su libro Sobre el Canon Astronómico de Diofanto), estudió las cónicas y elaboró unas tablas astronómicas. Defendió el heliocentrismo (teoría que sostenía que La Tierra gira alrededor del Sol) e hizo múltiples contribuciones en diversas disciplinas. A raíz del fanatismo del patriarca cristiano de Alejandría, Cirilo, fue perseguida y asesinada por su posición científica, lo que contrariaba las ideas religiosas de la época.

Actividades

1 Expresen el polinomio $p(x)=x^4-1$ como potencias de $x-1$.

2 Demuestren que si a es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces si escribimos $p(x)$, aplicando el método de Horner, como potencias de $(x-a)$, debemos tener que:

$$p(x)=k_n(x-a)^n+k_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+k_1(x-a)^1$$

Buscando las raíces enteras

Algunos de los problemas propuestos a las y los estudiantes tienen soluciones fácilmente calculables y, sin duda, ello representa cierto beneficio.

Cuando trabajamos con polinomios con coeficientes enteros muchas veces por inspección podemos encontrar una raíz a y al dividir por $(x-a)$ encontramos un polinomio de grado menor y por ende más sencillo de estudiar. Pero quisiéramos hacer ese proceso de búsqueda lo más sistemático posible. Tomemos el polinomio.

$$p(x)=x^3-3x^2-12x+36$$

Y supongamos que el entero a es una raíz de la ecuación, entonces debemos tener que:

$$a^3-3a^2-12a+36=0$$

Entonces:

$$36=a(-a^2+3a+12)$$

Es decir, el entero a debe dividir a 36. Pero los divisores de 36 son fácilmente calculables, de hecho el estudiante aprendió a hacer esto en primaria. Los divisores primos de 36 son 3 y 2, y $36=3^2\cdot 2^2$, luego la lista de divisores es $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,9,-9,12,-12,18,\ -18,\ 36$ y 36. Por otro lado, si a es una raíz del polinomio de $p(x)=(x-a)c(x)$ entonces:

$$p(1)=1-3-12=(1-a)c(1)$$

De donde $(1-a)$ debe dividir a -14. Verifiquemos algunos de los divisores de -36 para ver si son raíces.

Características de una raíz entera del polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros:

Cualquier raíz entera a debe dividir al término independiente del polinomio

Cualquier raíz entera a, distinta de 1, debe verificar que $(1-a)$ debe dividir a la suma de los coeficientes de la ecuación

Estudiemos el caso $x = 3$. vemos que $1-3 = -2$ es un divisor de -14 y lo debemos chequear.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -12 & 36 \\ 3 & & 3 & 0 & -36 \\ \hline & 1 & 0 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego 3 es raíz del polinomio ya que el resto de la división es 0. Pero hemos obtenido también el cociente de la división, esto es:

$$p(x) = (x^2-12)(x-3)$$

Pero las raíces de x^2-12 son $\mp\sqrt{12}$, luego:

$$p(x) = (x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})(x-3)$$

Entonces, para encontrar las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros debemos seguir el siguiente algoritmo:

Raíces enteras del polinomio $p(x)$ y su búsqueda:
1. Busquen todos los divisores del término independiente.
2. Verifiquen aquellos divisores k que cumplan la condición $1-k$ sea divisor de $p(1)$
3. Apliquen **Ruffini** para discriminar aquellos que son raíces del polinomio.

Actividades

1 Factoricen cada uno de los siguientes polinomios $p(x)=1-x+x^2-x^3$, $q(x)=x^4-9$, $r(x)=x^3-6x+4$, $m(x)=x^4-9x^3-7x^2+27x-18$.

Proyecto de investigación

¿Por qué sólo buscamos raíces enteras y no raíces racionales? En otras palabras, si tenemos un polinomio $p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ con coeficientes enteros, ¿puede tener este una raíz racional? Entendemos en este caso por racional una expresión $\frac{r}{q}$ no entera, es decir r no es divisible por q. Además simplificando la fracción lo más posible podemos suponer que r y q no tienen factores primos comunes.

A. Caso de polinomio mónico

a) Supongan que $\frac{m}{n}$ es una raíz de $p(x)$. Expliquen en sus propias palabras porqué podemos suponer que los números enteros m, n no tienen factores primos comunes.

b) Demuestren que $n^2a_0+mna_1+m=0$.

c) Demuestren entonces que n divide a m. Lo cual es absurdo.
Esto prueba que en el caso Mónico sólo pueden existir raíces enteras.

d)Demuestren usando las partes anteriores que $\sqrt{2}$ debe ser irracional. Para ello consideren el polinomio $p(x)=x^2-2$ y demuestren que no tiene raíces enteras.

B. Caso de un polinomio no mónico

Tomemos un polinomio $p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ con coeficientes enteros. Supongamos que $\frac{r}{q}$ es raíz del polinomio $p(x)$. Como siempre suponemos que r y q no tienen factores comunes.

a) Demuestren que $a_0q^n+a_1q^{n-1}r+\cdots+a_{n-1}q^1r^{n-1}+a_nr^n=0$.

b) Demuestren que a implica que q divide a a_n, y que r debe dividir a a_0.

Aplicación: ¿Cuáles son las posibles racionales de $p(x)=3x^3-x^2+6x-2$? Verifiquen cada una de ella y factoricen el polinomio $p(x)$.

2 Listen las posibles raíces racionales de $p(x)=18x^3+27x^2-2x-3$. Apliquen el método de Ruffini para investigar cuáles de ellas son raíces. Además, factoricen el polinomio.

3 Demuestren que $\sqrt{3}$ es un número irracional. Sugerencia: investiguen las raíces enteras del polinomio x^2-3 y atiendan a las ideas del proyecto anterior.

4 Demuestren que $\sqrt{5}$ es irracional.

Buscando las raíces complejas

Las raíces complejas de un polinomio con *coeficientes reales* presentan una propiedad muy interesante. Recordemos que si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su conjugado es $\overline{z} = a - bi$, es decir, la parte real del complejo z permanece igual pero la parte imaginaria le cambiamos de signo. El efecto geométrico de tomar el conjugado de un complejo equivale a hacer una simetría respecto al eje x como lo indica el *gráfico* 3.

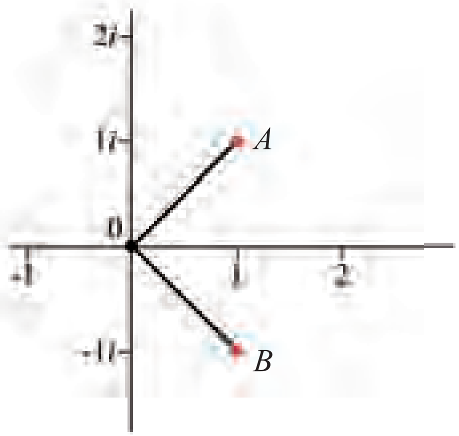


Gráfico 3. El complejo 1+i y su conjugado 1-i

La operación de conjugado verifica las propiedades siguientes.

Propiedades de la operación de conjugación de un complejo:
Para complejos z, w cualesquiera, se verifica que:

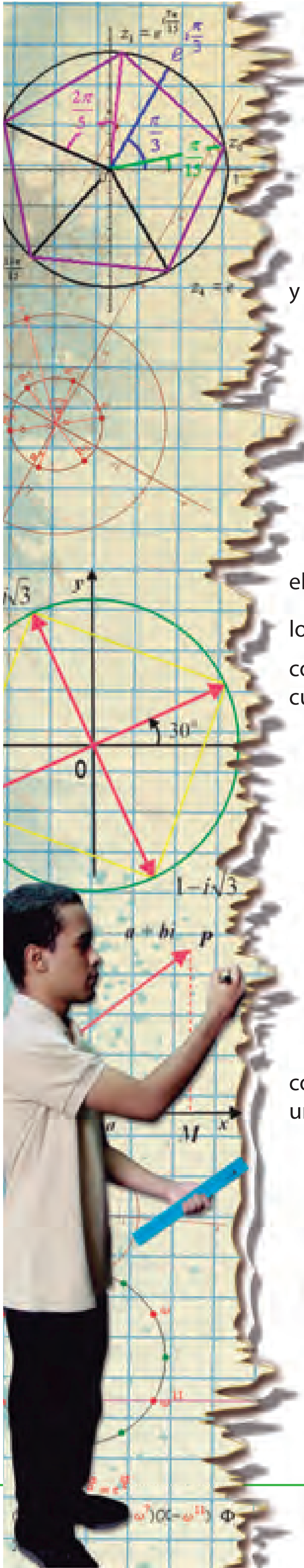
1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3) $\overline{\overline{z}} = z$
4) Si z es real, entonces $z = \overline{z}$.

Les invitamos a verificar estas propiedades. La última debe ser clara ya que un número real tiene parte imaginaria nula. Por otro lado, si pensamos geométricamente, la propiedad 3 es inmediata pues al hacer dos veces la simetría respecto al eje x regresamos al punto de partida. Supongamos ahora que z_0 es una raíz compleja del polinomio $p(x)$ con *coeficientes reales*, luego:

$$p(x) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^{\,2} + \cdots + a_j z_0^{\,j} + \cdots + a_{n-1} z_0^{\,n-1} + a_n z_0^{\,n} = 0$$

Tomando conjugados a ambos lados y aplicando las propiedades de la tabla vemos que:

$$p(x) = \overline{a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^{\,2} + \cdots + a_j z_0^{\,j} + \cdots + a_{n-1} z_0^{\,n-1} + a_n z_0^{\,n}} = 0$$



Por tanto:

$$p(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_2 z_0^{\,2}} + \cdots + \overline{a_j z_0^{\,j}} + \cdots + \overline{a_{n-1} z_0^{\,n-1}} + \overline{a_n z_0^{\,n}} = 0$$

y luego, observando que los coeficientes a_i son números reales, llegamos a:

$$p(x) = a_0 + a_1 \overline{z_0} + a_2 \overline{z_0}^{\,2} + \cdots + a_j \overline{z_0}^{\,j} + \cdots + a_{n-1} \overline{z_0}^{\,n-1} + a_n \overline{z_0}^{\,n} = 0$$

Así, $\overline{z_0}$ es una raíz del polinomio $p(x)$.

Como ejemplo tenemos:

Consideremos el polinomio $p(x) = 1 + x^2 + x^4$ y busquemos sus raíces. Haciendo el cambio de variable $y = x^2$, obtenemos la ecuación $1 + y + y^2 = 0$. Al resolverla (hagan los cálculos correspondientes) se tiene que $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Así, las raíces son complejos conjugados. Ellas se escriben de *forma polar* como $y = cis\,120^\circ$, $cis\,240^\circ$. Sus raíces cuadradas son $cis\,60^\circ$, $cis\,240^\circ$, $cis\,120^\circ$, $cis\,300^\circ$, y en *forma binómica* son:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Para factorizar el polinomio, escribimos:

$$p(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

Fíjense que, y esto es muy importante, los pares donde aparecen las raíces conjugadas dan origen a los factores cuadráticos irreducibles. Veamos esto con un ejemplo:

$$\begin{aligned}
\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) &= \left(\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\
&= x^2 + x + 1
\end{aligned}$$

Este último polinomio, de grado 2 (cuadrático), no puede descomponerse como producto de polinomios reales de grado 1. ¿Por qué?

Los **factores cuadráticos irreducibles** en la factorización de un polinomio real cualquiera, vienen del producto de dos polinomios de primer grado con raíces imaginarias conjugadas.

Factoricen el polinomio $p(x)=x^4+2x^2+1$ en términos de factores cuadráticos irreducibles.

Factoricen el polinomio $p(x)=3x^4+3x^3-3x^2+3x-6$ en términos de primer grado y cuadráticos irreducibles.

Buscando las raíces irracionales

Sabemos que en $\mathbb{R}$ la "expresión conjugada" de $3+\sqrt{3}$ es $3-\sqrt{3}$. Así, al multiplicar:

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=9-3=6$$

las raíces se destruyen y obtenemos una expresión racional.

Encontramos aquí una situación similar a la que encontramos cuando aparecieron las raíces complejas: *si tenemos un polinomio con coeficientes enteros* y tiene como raíz una expresión de la forma $d+m\sqrt{n}$, donde d y m son números racionales y n es un número natural entonces $d-m\sqrt{n}$ debe ser una raíz también. La razón es sencilla, esas expresiones provienen de las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$:

$$-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \text{ y } -\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

¡Que son expresiones conjugadas una de la otra! Si multiplicamos:

$$\left(x-\left(d+m\sqrt{n}\right)\right)\left(x-\left(d-m\sqrt{n}\right)\right)=(x-d)^2-\left(m\sqrt{n}\right)^2=(x-d)^2-m^2n$$

este polinomio tiene solo coeficientes racionales.

Si un polinomio con coeficientes enteros o racionales admite una raíz irracional de la forma $a+b\sqrt{c}$ donde a, b, c son números racionales, entonces debe admitir una raíz de la forma $a-b\sqrt{c}$.

En unos apuntes matemáticos de un gran ingeniero, se encontró una misteriosa ecuación cúbica: $x^3-?x^2+6x-?=0$. En ésta, los signos de interrogación eran coeficientes ilegibles por manchas de tinta. Sin embargo, más abajo se leía $x=1,\ x=?,\ x=2+\sqrt{2}$ y se supuso que eran las raíces. ¿Pueden encontrar la ecuación que resolvió este ingeniero y todas sus raíces?

Clases especiales de ecuaciones y sus soluciones

Ecuaciones Recíprocas

En Matemática siempre buscamos explotar la **simetría** de las expresiones. Ella permite realizar simplificaciones notables y revela propiedades interesantes. Ciertos polinomios $p(x)$ de grado n verifican la interesante propiedad que:

$$p\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{p(x)}{x^n}$$

Tales polinomios los llamaremos **polinomios recíprocos**.

Por ejemplo, el polinomio $p(x)=2x^3+3x^2+3x+2$ es recíproco ya que $p\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{p(x)}{x^3}$. Expongan ustedes los detalles de esta afirmación.

Desde un punto de vista práctico, lo que debemos observar para tener un polinomio recíproco de grado impar es que los coeficientes de los términos simétricos respecto *al centro* del polinomio sean iguales.

$$2x^3+3x^2+3x+2$$

El polinomio $p(x)=3x^4+4x^3-14x^2+4x+3$ es recíproco. En el caso de tener un polinomio de grado par, verificamos que los términos que equidistan del término central $-14x^2$ tienen coeficientes iguales.

$$3x^4+4x^3-14x^2+4x+3$$

Aquí hay algo muy interesante: si tomamos la función $g(x)=\frac{1}{x}$, definida sobre todos los reales distintos de 0, esta verifica que $g(-1)=-1$. Es decir, el valor -1 queda invariante al aplicarle la función (los matemáticos dicen que tenemos un punto fijo de la función g. Luego, si $p(x)$ es un polinomio recíproco de grado impar, entonces:

$$p\left(\tfrac{1}{-1}\right)=\frac{p(-1)}{(-1)^n}=-p(-1)$$

Así, $p(-1)=-p(-1)$ y esto implica (ustedes deben decir por qué) que -1 es una raíz del polinomio $p(x)$. Apliquemos esto en el siguiente ejemplo.

Consideremos la ecuación de grado tres:

$$2x^3+3x^2+3x+2=0$$

Los términos equidistantes *al centro* tienen iguales coeficientes. Luego el polinomio $2x^3+3x^2+3x+2$ es recíproco y de grado impar, -1 debe ser raíz de éste. Entonces, para calcular las raíces restantes podemos aplicar el método de Ruffini y dividir por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & & -2 & -1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El cociente de la división es el polinomio cuadrático $c(x)=2x^2+x+2$ (que no tiene raíces reales, verifiquen esto). Sus raíces complejas son:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$$

Vamos a discutir brevemente qué hacemos en el caso de un polinomio de grado par y recíproco. Un resultado muy útil derivado de la relación:

$$p\left(\tfrac{1}{x}\right)=\frac{p(x)}{x^n}$$

Emmy Amalie Noether
(1882-1935)

Contribuyó enormemente al álgebra abstracta; además se inclinó por el piano y la danza. Ya para 1900 decidió estudiar Matemática, sin embargo, para la época, las mujeres no podían inscribirse oficialmente en las universidades, así que debían contar con el permiso de cada profesor para asistir a sus clases. La Universidad de Erlangen le permitió matricularse (en 1904) y así obtuvo su doctorado en Matemática para 1907. Luego de ello, sólo por ser mujer le fue negada una plaza como profesora a lo largo de 12 años.

Lamentablemente, hoy en día, aún hay vestigios de la discriminación hacia la mujer. Problema que debe solventarse con la contribución de todas y todos.

Sophie Germain
(1776-1831)

A sus 13 años leyó cómo murió Arquímedes, quedó asombrada de que un problema matemático lo abstrajera al punto de no escuchar la voz de alto por parte de un soldado. Ello la motivó a estudiar Matemática. Intentó ingresar a L'Ecole Polytechnique pero no admitían mujeres.
Su interés fue tal, que siguió las clases a través de los apuntes de algunos compañeros, así que al final presentó una memoria con un seudónimo (sí, un nombre masculino). El profesor del curso, Lagrange, se impresionó a tal punto por la calidad del escrito que le quiso conocer. Luego de ello, Lagrange la invitó a su grupo de investigación. Sophie Germain realizó aportes en teoría de números, física, acústica y elasticidad.

Es que si a es una raíz de $p(x)$ y $p(a)=0$, entonces $\frac{1}{a}$ debe ser raíz también. Para ver esto evaluemos a en la expresión anterior y obtenemos :

$$p\left(\tfrac{1}{a}\right)=\frac{p(a)}{a^n}=0$$

Tomemos la ecuación $3x^4+4x^3-14x^2+4x+3=0$. Dividamos por x^2 toda la ecuación anterior:

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$$

Esto induce a considerar el cambio de variable:

$$y=x+\frac{1}{x}$$

Y como $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, entonces $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Así, la ecuación se escribe como $3\left(y^2-2\right)+4y-14=0$, que es equivalente a:

$$3\left(y^2\right)+4y-20=0$$

Resolviendo la ecuación mediante la fórmula de los babilonios, hallamos que $y=2$ e $y=-\frac{10}{3}$. Para terminar de resolver la ecuación devolvemos la sustitución:

$$x+\frac{1}{x}=2 \text{ y también } x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$$

Vamos a resolver la primera ecuación (le dejamos la segunda a ustedes). Si $x+\frac{1}{x}=2$, eliminamos el denominador multiplicando a ambos lados por x y obtenemos $x^2+1=2x$ que tiene como solución única $x=1$. Recuerden encontrar las soluciones restantes.

Actividades

1. Resuelvan la ecuación $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0$.

2. Resuelvan la ecuación $150x^4-95x^3-686x^2-95x+150=0$.

Ecuaciones trascendentes

Muchas de las ideas que hemos discutido son aplicables a ecuaciones no polinómicas e involucran funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Estas funciones se denominan **trascendentes**, de allí la denominación de estas ecuaciones. La idea básica es hacer un cambio de variable que permita llevar, la ecuación considerada, a una ecuación polinómica y aplicar nuestro trabajo previo para resolver esta. Luego devolvemos la sustitución para obtener las soluciones de la ecuación original.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación $3^{3x}-2\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x-1=0$. En primer lugar, reescribimos la ecuación como:

$$\left(3^x\right)^3-2\left(3^x\right)^2+2\cdot 3^x-1=0$$

Debe ser claro que la sustitución $y=3^x$ convierte la ecuación en una ecuación polinómica, explícitamente :

$$y^3-2y^2+2y-1=0 \qquad (A)$$

Esta ecuación es polinómica con coeficientes enteros. Como primera posibilidad buscamos las posibles raíces enteras de la misma. En este caso solo pueden ser 1 o -1 (que son los divisores de 1).

Aplicamos el método de Ruffini y dividimos por $y-1$ para verificar si 1 es una raíz.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego $y=1$ es una raíz de la ecuación (A). Para hallar las restantes raíces vemos que el cociente de la división que hicimos por el método de Ruffini es x^2-x+1. La ecuación $x^2-x+1=0$ no tiene raíces reales, así que la única solución real de nuestra ecuación la obtenemos al resolver, devolviendo la sustitución, la ecuación $3^x=1$. Ustedes sabrán que ésta admite solo una solución, $x=0$.

Veamos otro ejemplo sobre ecuaciones trigonométricas. Resolvamos la ecuación $12\,sen^2 x - 25\,sen\,x + 2\csc x + 1 = 0$. Recordemos que $csc\,x = \dfrac{1}{sen\,x}$. Sustituyamos en la ecuación la fórmula anterior y eliminemos los denominadores multiplicando todo por $sen\,x$. Así, tendremos que $12\,sen^3 x - 25\,sen^2 x + 2 + sen\,x = 0$. Siguiendo nuestro primer ejemplo, cambiamos la variable $y = sen\,x$. La ecuación se lee ahora como $12y^3 - 25y^2 + 2 + y = 0$, la cual es una ecuación cúbica que tiene coeficientes enteros. Ensayamos con los divisores de 2, éstos son 1, –1, 2, –2. Al ensayar con cada uno de los valores dados, concluiremos que solo el 2 es solución de la ecuación. Esto permite aplicar el método de Ruffini para encontrar un polinomio cuadrático más sencillo de estudiar:

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & -25 & 1 & 2 \\ 2 & & 24 & -2 & -2 \\ \hline & 12 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio que obtenemos es $12y^2 - y - 1$ que tiene como soluciones $\dfrac{1}{3}$ y $-\dfrac{1}{4}$, hagan ustedes los cálculos. Entonces, al devolver la sustitución debemos resolver las ecuaciones:

$$sen\,x = 2,\ \ sen\,x = \frac{1}{3},\ \ sen\,x = -\frac{1}{4}$$

La primera posibilidad la descartamos por ser imposible ya que el seno de un ángulo cualquiera no puede exceder el número 1. El gráfico de la función seno demuestra que sus valores están entre –1 y 1.

Las otras posibilidades sí son factibles, y de hecho, generan infinitas soluciones cada una de ellas.

Antes de proseguir, les hacemos una pregunta: ¿en qué cuadrantes el seno es positivo? Si α es un ángulo en el primer cuadrante cuyo seno sea $\frac{1}{3}$ por periodicidad de la función seno entonces $x = \alpha + 2k\pi$ es un conjunto de soluciones de la ecuación, $k = 1, 2, \ldots$ Además, si β es un ángulo en el segundo cuadrante cuyo seno sea $\frac{1}{3}$, entonces $x = \beta + 2k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ es otro conjunto de soluciones. Dejamos a las y los estudiantes completar los detalles del caso $sen\,x = -\dfrac{1}{4}$.

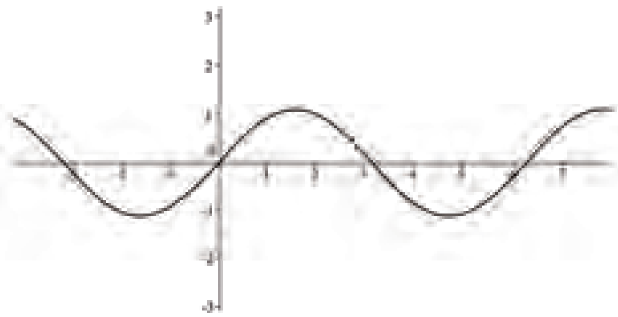


Gráfico 4. La función sen x

Consideremos un ejemplo para una ecuación logarítmica. El procedimiento es muy similar a lo hecho en los dos casos anteriores. Consideremos la ecuación:

$$(ln\,x)^4 - 6(ln\,x)^2 + 5 = 0$$

Cambiamos la variable colocando $y = ln\, x$. Entonces, la ecuación en la nueva variable se transforma en:

$$y^4 - 6y^2 + 5 = 0$$

Deben ver la próxima idea claramente: un nuevo cambio de variable que convierta la ecuación en una cuadrática está a la orden, $u = y^2$. Lo cual lleva a la ecuación $u^2 - 6u + 5 = 0$, que tiene las soluciones $u = 1$ y $u = 5$. Ahora, devolviendo el cambio de variable $u = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{u}$, obtenemos $y = \pm\sqrt{1}$ e $y = \pm\sqrt{5}$. Por último, devolviendo el primer cambio encontramos las soluciones de nuestra ecuación. Como $y = ln\, x$ implica que $x = e^y$, entonces:

$$x = e,\ x = e^{-1},\ x = e^{\sqrt{5}},\ x = e^{-\sqrt{5}}$$

Procedimiento para resolver una ecuación trascendente

a) Observen cuidadosamente la ecuación y reescríbanla, si es necesario, mediante un cambio de variable,
b) Transformen la ecuación en una ecuación polinómica,
c) Resuelvan la ecuación polinómica encontrada en (b), y
d) Regresen el cambio de variable (o los cambios que hayan hecho) para obtener la solución de la ecuación inicial.

Resuelvan cada una de las ecuaciones que siguen:

- $8^x - 7(4^x) + 14(2^x) - 8 = 0$
- $ln^3 x - 6\, ln^2 x + 11\, ln\, x - 6 = 0$
- $8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 10\cos^2 x + 3\cos x + 3 = 0$

Actividades

1) Demuestren que $\sqrt{n}$ es irracional a menos que n sea un cuadrado.

2) Demuestren que si un polinomio con coeficientes reales y recíproco admite al complejo i como raíz, entonces debe admitir a $-i$ como raíz.

3) Demuestren, aplicando el método de Ruffini, que $p(x) = x^n - a^n$ siempre es divisible por $x - a$.

4) Resuelvan la ecuación $\cos^4 x - \cos x = 0$.

5 Un polinomio se llama **par** si ocurre que $p(x)=p(-x)$. Por ejemplo, $p(x)=x^4-3x^2-6$. La condición $p(x)=p(-x)$ implica que la gráfica de tal polinomio es simétrica respecto al *eje y* (*ver gráfico* 5). Si tenemos un polinomio mónico par de grado 4, con raíces 1, –2. ¿Pueden decir cuál es el polinomio?

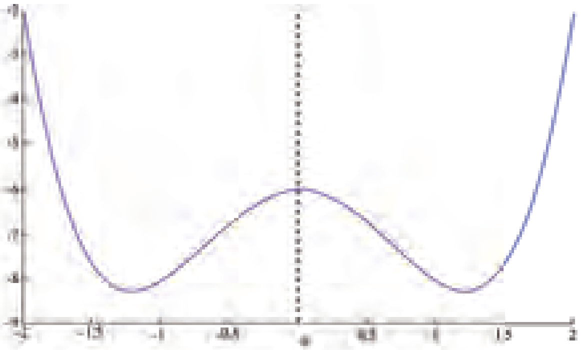


Gráfico 5. $p(x)=x^4-3x^2-6$

6 Si un polinomio es par y admite como raíz el número real a, demuestren que debe admitir como raíz el número real $-a$.

7 ¿Será cierto que en un polinomio p par solo aparecen potencias de x pares?

8 Factoricen el polinomio $p(x)=4x^7+32x^6+93x^5+105x^4-72x^2-16x+16$.

9 Un polinomio se llama **impar** si ocurre que $p(x)=p(-x)$. Por ejemplo, $p(x)=x^3$ es impar. Demuestren que 0 es siempre una raíz de un polinomio impar cualquiera.

10 Hallen el valor del parámetro m para que el polinomio $p(x)=2mx^3-2m^2x+1$ sea divisible por $x+1$.

Mensajes cifrados

Las matrices y los códigos cifrados

La Matemática resulta fundamental para cifrar mensajes, es decir, para codificar o encriptar información. Son muchas las actividades humanas que requieren proteger ciertos datos, tal es el caso de las transacciones electrónicas, las claves en las tarjetas emitidas por la banca nacional, en el acceso a los correos en línea, en temas neurálgicos de la política exterior y en tantos otros. En realidad son incontables las formas de encriptar mensajes, una de éstas tiene que ver con las **matrices**, concepto que será central en esta lección. Ya en el libro de Matemática de segundo año del nivel de *Educación Media* de la *Colección Bicentenario*, incursionamos en esta importante área tan necesaria en la modernidad, en especial en la lección titulada *Datos encriptados*, aunque en esa ocasión se empleó la idea de la división de polinomios.

Veremos entonces cómo, con apoyo en las matrices, podemos cifrar un mensaje de manera que solo pueda ser entendido por el (o la) destinatario(a), aún cuando sea interceptado el cifrado que se envíe.

Pero, ¿qué es una matriz?

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en m filas y n columnas $(m, n \in \mathbb{N})$, lo cual puede denotarse como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Big\} \text{ Filas de matriz } A$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

Columnas de la matriz A

donde a_{ij} es un elemento de la matriz A situado en la fila i y en la columna j.

La dimensión de una matriz está determinada por el número de filas y columnas de la misma. En este caso, A tiene dimensión $m \times n$.

Tipos de matrices

Matrices Cuadradas: éstas tienen igual número de filas que de columnas $(m = n)$. El conjunto de todas las matrices cuadradas con n filas y columnas se denota $M_{nxn}(\mathbb{R})$ o $M_n(\mathbb{R})$. Por ejemplo, son cuadradas las matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3} \qquad D = \begin{bmatrix} 29 & 4 & 7 & 25 \\ 5 & 1 & 5 & 14 \\ 1 & 2 & 10 & 1 \\ 4 & 3 & 15 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}$$

En cada caso, hemos indicado su dimensión.

En las matrices que les presentamos se distinguen lo que se conoce como *diagonal principal* y *diagonal secundaria*.

La *diagonal principal* consta de los elementos de la forma a_{ii}, es decir, de todos los elementos desde a_{11} hasta a_{nn}. La *diagonal secundaria* abarca los elementos de la forma a_{ij}, donde $i+j=n+1$, esto es, los elementos en la diagonal desde a_{1n} hasta a_{n1}. En las matrices que siguen hemos destacado en rojo la diagonal principal, y en azul, la secundaria.

$$E=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & -\sqrt{8} \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 4 \\ 5 & \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & -1 \\ -2 & \frac{9}{7} & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Matrices Triangulares: éstas verifican dos condiciones, son cuadradas y, además los elementos "bajo" la diagonal principal son nulos, $a_{ij}=0$ si $i>j$. En tal caso se dice que es una *matriz triangular superior*. O bien, los elementos "sobre" la diagonal principal son nulos, $a_{ij}=0$ si $i<j$. En este caso se dice que es una *matriz triangular inferior*.

$$G=\begin{bmatrix} \sqrt[3]{4} & 1 & 2 \\ 0 & -3 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ es triangular superior.}$$

$$H=\begin{bmatrix} -e & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & e \end{bmatrix} \text{ es triangular inferior.}$$

Matrices Diagonales: son matrices cuadradas en las que todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz Unidad o Matriz Identidad: es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son todos 1. Se denota como I o Id:

$$I=Id_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz identidad de orden 2}$$

$$I = Id_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz identidad de orden 3}$$

$$I = Id_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz identidad de orden 4}$$

Matriz cero: es aquélla matriz en la que todos sus elementos son 0. Por ejemplo,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2x2}$$

Matriz Columna: es cualquiera con una sola columna, esto es, su dimensión es $m \times 1$.

$$K = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \\ -3 \end{bmatrix} \in M_{3x1}$$

Matriz Fila: es cualquier matriz con una única fila; su dimensión es $1 \times n$.

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \in M_{1x3}$$

Matriz Ortogonal: es una matriz cuadrada que posee inversa A^{-1}, es decir, verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (idea que discutiremos en la sección *Cálculo de la matriz inversa* de esta misma lección).

Matriz Traspuesta: dada una matriz A de m filas y n columnas. La matriz traspuesta, A^T, tiene por elementos $a^t_{ij} = a_{ji}$, donde $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Esto significa que el elemento a_{ji} de la matriz A es ahora el elemento a^t_{ji} de la matriz A^T.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ \frac{5}{7} & \pi & 8 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{5}{7} \\ 1 & -3 & \pi \\ \sqrt{2} & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } B=\begin{bmatrix}1\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -1\end{bmatrix} \text{ entonces } B^T=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -1\end{bmatrix}$$

$$\text{Si } C=\begin{bmatrix}4 & -\sqrt{5} & 2\\ 1 & \frac{4\pi}{3} & -3\end{bmatrix} \text{ entonces } C^T=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -\sqrt{5} & \frac{4\pi}{3}\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

Ahora bien, luego de exponer estos tipos de matrices, estudiaremos uno de los métodos para encriptar datos a través de las matrices. Para encriptar un mensaje cualquiera son necesarios los siguientes elementos: el emisor, el receptor, el mensaje y un código encriptador. Cuando hablamos de códigos, nos referimos a un método de codificación, es decir, a un algoritmo que asigne a cada carácter del mensaje otros caracteres, con la finalidad de que el mensaje no pueda leerse según las reglas del lenguaje materno y que, además, sea difícil de descifrar por alguien diferente al receptor.

A continuación veamos un método sencillo para codificar mensajes:

En primer lugar, asignamos a cada letra de nuestro alfabeto un número tal como se muestra en la siguiente tabla.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Nosotros encriptaremos el mensaje "ROSA".

Nos fijamos entonces del número que corresponde a cada una de sus letras.

R	O	S	A
18	15	19	1

Agrupamos estos números en grupos de dos:

$$18 \;\; 15 \qquad\qquad 19 \;\; 1$$

Y formamos una matriz cuadrada de orden 2×2, tal orden dependerá de la extensión del mensaje a cifrar, como sigue:

$$\begin{bmatrix} R & O \\ S & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero si enviamos el mensaje codificado por la matriz $\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$, resulta que será muy fácil descifrarlo para cualquier persona, lo que lo hace muy vulnerable. Así que para complejizar la encriptación podemos emplear la idea de las matrices ortogonales; pero antes necesitamos precisar algunos conceptos.

Operaciones con matrices

Adición de Matrices

La adición de dos matrices A y B del mismo orden es otra matriz que se denota con $A + B$, del mismo orden que las otras dos y definida por:

$$\begin{aligned} A+B &= \left[a_{ij} \right] + \left[b_{ij} \right] \\ &= \left[a_{ij} + b_{ij} \right] \end{aligned}$$

Es decir, $A + B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices iniciales.

Aquí debemos hacer un comentario, la adición de matrices solo está definida para matrices del mismo orden. No es posible sumar dos matrices de órdenes distintos.

Veamos un ejemplo de adición de dos matrices.

Sean las matrices $C=\begin{bmatrix}4 & -1 & \frac{2}{5} & -1\\ 1 & \frac{4}{3} & -3 & 0\\ 0 & \pi & 5 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ y $D=\begin{bmatrix}0 & 8 & \frac{3}{5} & -7\\ 1 & -\frac{4}{3} & -3 & 4\\ \frac{3}{7} & \frac{\pi}{2} & 2 & 0\end{bmatrix}$, entonces:

$$C+D=\begin{bmatrix}4 & -1 & \frac{2}{5} & -1\\ 1 & \frac{4}{3} & -3 & 0\\ 0 & \pi & 5 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 8 & \frac{3}{5} & -7\\ 1 & -\frac{4}{3} & -3 & 4\\ \frac{3}{7} & \frac{\pi}{2} & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+0 & -1+8 & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -1+(-7)\\ 1+1 & \frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right) & -3+(-3) & 0+4\\ 0+\frac{3}{7} & \pi+\frac{\pi}{2} & 5+2 & \frac{1}{4}+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 7 & 1 & -8\\ 2 & 0 & -6 & 4\\ \frac{3}{7} & \frac{3\pi}{2} & 7 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Sean A, B y C matrices cualesquiera del mismo orden, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- *La Ley Asociativa*: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
- *Conmutativa*: $A+B=B+A$.
- *Existencia de elemento neutro*: $A+0=A$, donde 0 representa la matriz de igual dimensión que A en la que sus elementos son ceros.
- Para cualquier matriz A *existe una matriz opuesta*, denotada con $-A$, con $-A=\left[-a_{ij}\right]$, tal que: $A+(-A)=0$.

La demostración de cada una de estas propiedades es sencilla, por ejemplo, probemos la segunda y la tercera, las otras dos se dejan como ejercicios.

Prueba de la propiedad conmutativa de la adición de matrices. Sean A y B dos matrices de orden $m\times n$:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la definición de la adición de matrices

$$=\begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ya que la adición de números reales es conmutativa

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Por la definición de adición de matrices

Aunque esta prueba también se puede hacer de manera sintética así:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[b_{ij}+a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]+\left[a_{ij}\right]=B+A$$

Los argumentos son los mismos que escribimos antes.

Prueba de la existencia de elemento neutro para la adición de matrices. Sea A una matriz de orden $m\times n$. Definamos a la matriz $0_{m\times n}$ como sigue $0_{m\times n}=\left[0_{ij}\right]$. Entonces,

$$A+0=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m} & {}^{1}a_{m} & {}^{2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m} & {}^{1}a_{m} & {}^{2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=A$$

Ya que el 0 es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Multiplicación de una matriz por un escalar

El producto del escalar k por la matriz A es otra matriz, que se denota con $k \cdot A$, del mismo orden que A, tal que:

$$k \cdot A = k\left[a_{ij}\right] = \left[k \cdot a_{ij}\right]$$

La matriz $k \cdot A$ se obtiene de multiplicar por k cada elemento de la matriz A.

Mostremos algunos ejemplos. Si A es una matriz de orden 3×3, entonces,

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} \end{bmatrix}$$

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$ y $k = -\frac{1}{3}$, entonces $-\frac{1}{3} \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

Esta operación verifica las propiedades que siguen:

$$(1)\quad k(A+B) = kA + kB$$
$$(2)\quad (k+t)A = kA + tA$$

Éstas se demuestran de inmediato al comparar sus elementos. Por ejemplo, el elemento con coordenadas ij del lado izquierdo de (1) es $k\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$, y como la multiplicación de números reales es distributiva con respecto a la adición, esto es igual a $ka_{ij}+kb_{ij}$. Lo cual define a la matriz $kA+kB$. De forma similar, de la igualdad $(k+t)a_{ij} = ka_{ij} + ta_{ij}$ se sigue la igualdad (2).

Por otra parte, hay varias leyes que tienen que ver con la operación de trasponer matrices. Para matrices A y B de orden $m\times n$ y C una matriz de orden $n\times p$. Entonces:

$$\left(A^T\right)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

La primera de ellas se sigue de que el elemento de coordenadas ij es el elemento de coordenadas ji de A^T, que a su vez es el elemento ij de A. Por tanto, $\left(A^T\right)^T = A$. La segunda se deriva de que el elemento ij de $\left(A+B\right)^T$ es el elemento ji de $A+B$, el cual tiene la forma $a_{ji}+b_{ji}$, que es precisamente la suma de los elementos ij de AT y BT. En consecuencia, $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$.

Multiplicación de matrices

La multiplicación de dos matrices se da solo en el caso que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. En caso contrario, la multiplicación de matrices no está definida.

El producto de la matriz $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{mxn}$ y $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{nxp}$ es otra matriz $C = A\cdot B \in M_{mxp}$, con igual número de filas que A e igual número de columnas que B, en la que el elemento de la matriz C que ocupa la fila i y columna j, c_{ij} se obtiene mediante la suma de los productos de cada elemento de la fila i-ésima de la matriz A, por el correspondiente elemento de la columa j-ésima de la matriz B. Esto es,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \text{ donde } i = 1,\ldots,m \text{ y } j = 1,\ldots,p.$$

Veamos los siguientes ejemplos.

Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, notemos que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, por esta razón sí está definido el producto $C = A\cdot B$. Entonces,

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + (-5)\cdot(-1) + 8\cdot 3 & 4\cdot 0 + (-5)\cdot 2 + 8\cdot(-4) \\ 1\cdot 1 + 4\cdot(-1) + (-3)\cdot 3 & 1\cdot 0 + 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & -42 \\ -12 & 20 \end{bmatrix}$$

Aquí hemos indicado con colores la forma de multiplicar estas matrices. Fíjense que la fila uno (en rojo) de la primera matriz se multiplica por la columna uno de la segunda matriz (en azul); los resultados corresponden al elemento c_{11} de la matriz C. Luego, la fila uno de la primera matriz se multiplica por la columna dos de la segunda matriz (en verde), el resultado corresponde al elemento c_{12} de la matriz C. Como hemos tomado ya todas las columnas de la segunda matriz, procedemos a considerar la segunda fila de la primera matriz, y repetimos el proceso anterior; los resultados serán los elementos c_{21} y c_{22}, respectivamente.

¿Está definida $B \cdot A$?

Consideremos ahora las matrices $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Aquí también se verifica que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, por esta razón sí está definido el producto $C \cdot D$. A saber:

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 9 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

¿Está definida $D \cdot C$?

Como sabemos, la adición de matrices es conmutativa, pero ¿lo es la multiplicación de matrices? Mostremos un contraejemplo de ello. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Su producto, con A a la izquierda, es:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+1 & 10-1 \\ -\frac{2}{3}+0 & \frac{5}{3}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Pero el producto, con A a la derecha, es:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+\frac{5}{3} & 2+0 \\ -2+\frac{1}{3} & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

De inmediato vemos que $A \cdot B \neq B \cdot A$. Por tanto, la **multiplicación de matrices, en general, no es conmutativa**. Sin embargo, existen matrices que sí conmutan. Por ejemplo, en caso que $A = B$. También hay matrices distintas cuyo producto es conmutativo. Por ejemplo, dadas las matrices $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, se tiene que $C \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = D \cdot C$.

Algo similar sucede si multiplicamos cualquier matriz cuadrada por la identidad del mismo orden: $A \cdot I = I \cdot A$. Además, **en el espacio de matrices cuadradas de orden $n \times n$, la matriz I es el elemento neutro para la multiplicación**. En efecto, sea c_{ij} el elemento de la matriz $A \cdot I$ ubicado en la fila i y la columna j. Sabemos que $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \cdots + a_{in}\delta_{nj}$, con $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$ (δ es el "delta de Kronecker"). Pero como δ_{kj} es un elemento de la matriz identidad, se cumple que $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \cdots = \delta_{nn} = 1$. En los demás casos $\delta_{kj} = 0$. Así,

$$c_{11} = a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{21} + \cdots + a_{1n}\delta_{n1} = a_{11}\delta_{11} = a_{11} \cdot 1 = a_{11}$$

En general, se cumple que $c_{ij} = a_{ij}$. En conclusión, $A \cdot I = A$. Por otra parte, si para las matrices A, B y C están definidos los productos $A \cdot (B \cdot C)$ y $(A \cdot B) \cdot C$, entonces se verifica que $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, es decir, **en tal caso la multiplicación de matrices es asociativa**, dejamos a ustedes y sus profesoras o profesores la demostración de esta propiedad.

Con la multiplicación de matrices sucede algo curioso. Existen matrices distintas a la matriz cero (aquélla cuyos elementos son todos 0), cuyo producto es la matriz cero. Veamos, dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué otros ejemplos pueden dar en el caso de matrices de orden 2×2? ¿Y con matrices de orden 3×3?

Sean A una matriz de orden $m \times n$ y C una matriz de orden $n \times p$. Una propiedad interesante que vincula la operación trasposición con la multiplicación de matrices es:

$$(AC)^T = C^T A^T$$

Esto se demuestra observando que el elemento ij de $(AC)^T$ es el elemento ji de AC, el cual tiene la forma:

$$a_{j1}c_{1i} + a_{j2}c_{2i} + a_{j3}c_{3i} + \cdots + a_{jn}c_{ni} \qquad (I)$$

Además, sabemos que el elemento ij de $C^T A^T$ es:

$$(C^T)_{i1}(A^T)_{1j} + (C^T)_{i2}(A^T)_{2j} + \cdots + (C^T)_{in}(A^T)_{nj} = c_{1i}a_{j1} + \cdots + c_{ni}a_{jn} \qquad (II)$$

Y como las expresiones I y II son iguales, entonces está demostrado que $(AC)^T = C^T A^T$.

Determinantes

El **determinante** de una matriz cuadrada es la suma algebraica del producto de cada uno los elementos de una fila (o columna), cuyo signo es determinado por la expresión $(-1)^{i+j}$, por el determinante de su menor complementario.

Los determinantes se emplean en el estudio del *rango* de una matriz, en la *solución de sistemas de ecuaciones lineales*, así como en la definición del *polinomio característico* de una matriz. Son innumerables los problemas de la realidad y del contexto en los que interviene este concepto –en la lección 5 de este libro se estudiará una de sus aplicaciones.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, el menor complementario del elemento a_{11} es $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, el cual se obtiene de eliminar la fila y la columna a la cual pertenece el elemento a_{11}, esto es, la primera fila y la primera columna de A.

Para calcular el determinante de una matriz se deben calcular los menores complementarios de una fila o de una columna.

El caso más sencillo es el determinante de una matriz cuadrada de segundo orden ya que su menor complementario es un elemento. Por tanto, el determinante de una matriz cuadrada $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, de segundo orden, es el producto de sus diagonales:

$$|B|=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$$

El signo de la expresión b_{21} viene dado por $(-1)^{2+1}=(-1)^{3}=-1$.

Por ejemplo: si $B=\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$, entonces:

$$\det B=\begin{vmatrix} 18 & 15 \\ 19 & 1 \end{vmatrix}=18\cdot 1-19\cdot 15=18-285=-267$$

Ahora bien, el determinante de una matriz cuadrada $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, de tercer orden, es:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$=(-1)^{2}\cdot a_{11}\cdot\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+(-1)^{3}\cdot a_{12}\cdot\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+(-1)^{4}\cdot a_{13}\cdot\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$=a_{11}\cdot\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\cdot\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\cdot\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

Otro ejemplo es:

Si $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -5 & 0 \end{bmatrix}$, entonces,

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2\\ \frac{1}{3} & -5 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}1\cdot\begin{vmatrix}0 & -2\\ \frac{1}{3} & 0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & -5\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2}(-1)\big(1\cdot 0-(-2)\cdot(-5)\big)+(-1)^{3}1\left(0\cdot 0-(-2)\cdot\frac{1}{3}\right)+(-1)^{4}\frac{1}{2}\left(0\cdot(-5)-\frac{1}{3}\cdot 1\right)$$

$$=(-1)(0-10)+(-1)\left(0+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{3}\right)$$

$$=(-1)(-10)+(-1)\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=10-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{55}{6}$$

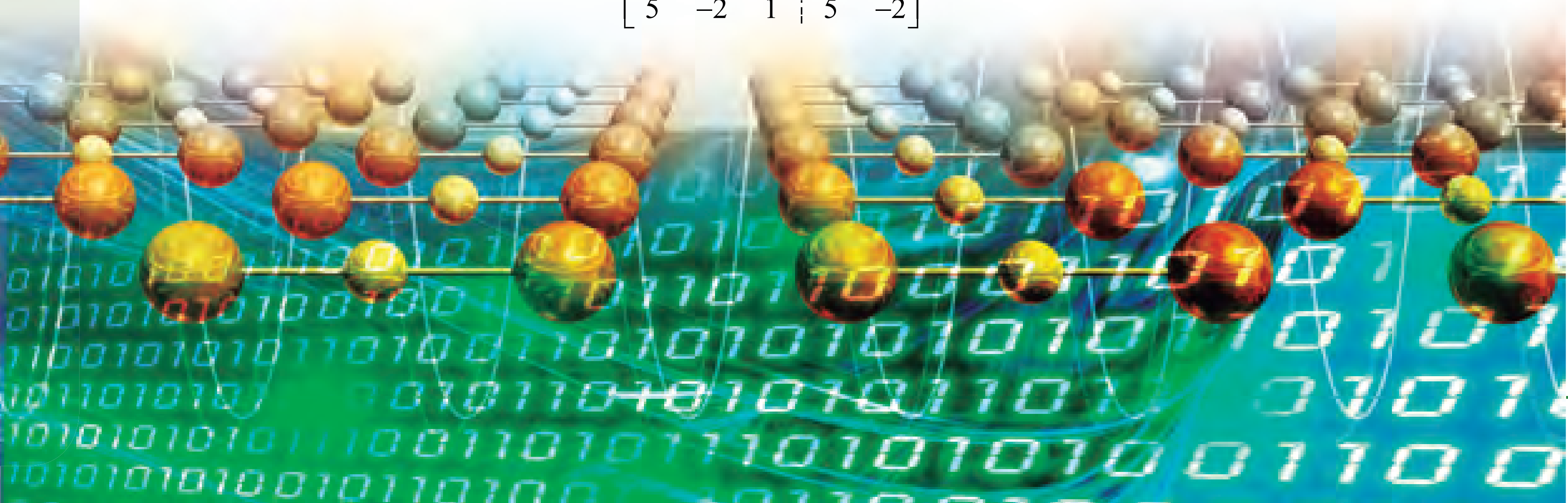
La Regla de Sarrus

Estudiemos esta regla, para calcular el determinante de una matriz de orden 3×3. Consideremos la matriz:

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -4\\ 5 & -6 & -1\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Se *extiende* o *amplía* la matriz repitiendo a su derecha las dos primeras columnas:

$$|C|=\left[\begin{array}{ccc:cc}-2 & 5 & -4 & -2 & 5\\ 5 & -6 & -1 & 5 & -6\\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2\end{array}\right]$$



Ahora, se multiplican las diagonales paralelas a la diagonal principal (en negro) y se suman sus resultados y se les resta la suma de los productos de las diagonales paralelas a la diagonal secundaria (en rojo):

$$|C| = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 5 & -4 & -2 & 5 \\ 5 & -6 & -1 & 5 & -6 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

Así, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} |C| &= (-2)(-6)1+5(-1)5+(-4)5(-2)-\{5(-6)(-4)+(-2)(-1)-2+1\cdot 5\cdot 5\} \\ &= 12-25+40-\{120-4+25\} \\ &= 56-170 \\ &= -114 \end{aligned}$$

Aunque existe un esquema que permite desarrollar el determinante de una matriz de orden 3×3 sin necesidad de repetir las dos primeras columnas (ver *gráfico* 1). En ella, los productos que conservan su signo están indicados en rojo, y los que se cambian de signo están señalados en azul. El determinante de la matriz A es precisamente la suma de todos estos productos. Ustedes pueden emplear el método que les sea más cómodo.

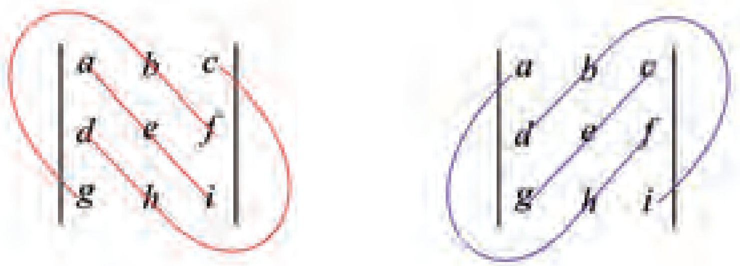


Gráfico 1

Cálculo de la matriz inversa

La **matriz inversa** o invertible A^{-1} de una matriz cuadrada A, es otra matriz cuadrada del mismo orden tal que se cumple:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Para matrices 2×2 podemos calcular la inversa a partir de la definición. Veamos:

Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$, etiquetemos a su inversa con $A^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$, y ahora efectuemos su producto:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Aquí igualamos a la matriz identidad pues la matriz inversa de A debe verificar que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. Es decir,

$$\begin{bmatrix}2x+2z & 2y+2t\\ 3x+7z & 3y+7t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Con lo cual, tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas, que podemos agruparlas en dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases}2x+2z=1\\ 2y+2t=0\\ 3x+7z=0\\ 3y+7t=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases}2x+2z=1\\ 3x+7z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}2y+2t=0\\ 3y+7t=1\end{cases}$$

Las soluciones son:

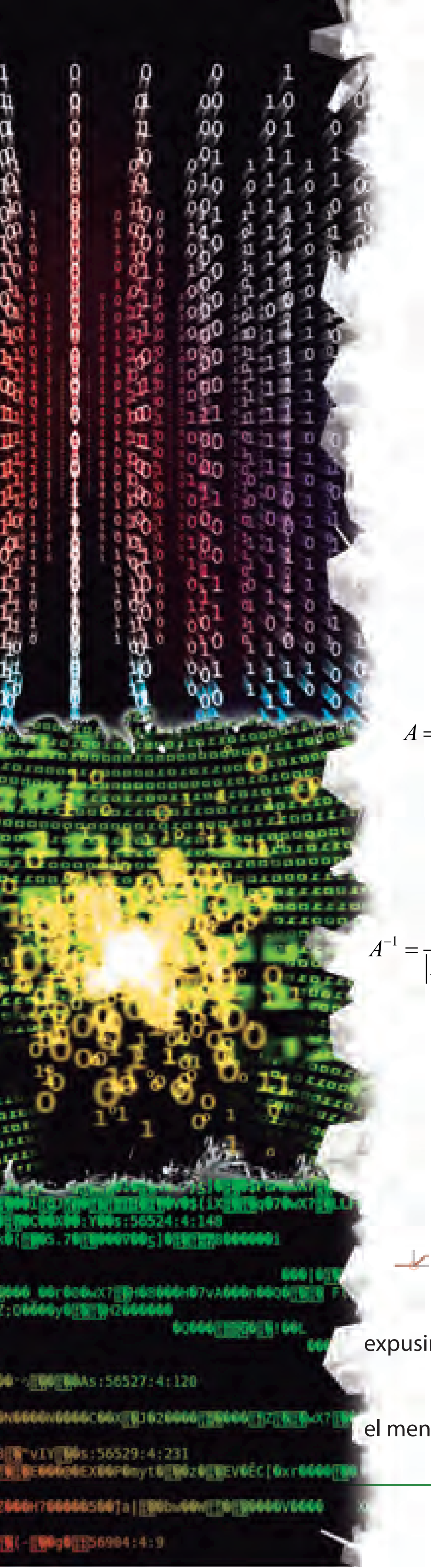
$$x=\frac{7}{8},\ y=-\frac{1}{4},\ z=-\frac{3}{8},\ t=\frac{1}{4}$$

Por tanto:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{8} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Para matrices de orden superior existen otros métodos. Expondremos acá el cálculo de la matriz inversa por determinantes, a saber:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^{*}\right)^{T}$$



$|A|$ es el determinante de la matriz A.
A^T es la matriz traspuesta.
A^* es la matriz adjunta.

Donde:

La **matriz adjunta** A^* se calcula hallando para cada uno de sus elementos el determinante de su menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

Por ejemplo, si:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{bmatrix}, \text{ entonces } A^*=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&0\\5&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&3\\1&-3&-2\\0&3&0\end{bmatrix}$$

Así, como $det\ A = 3$ y $\left(A^*\right)^T=\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-3&3\\3&-2&0\end{bmatrix}$, al aplicar la fórmula $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T$ tenemos que:

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-3&3\\3&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\-1&-1&1\\1&-\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$$

Verifiquen que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Continuemos con el plan de complejizar la codificación del mensaje que expusimos páginas atrás.

Recordemos que el mensaje a cifrar es "*ROSA*". Además, separamos el mensaje en grupos de dos caracteres: *RO* *SA*.

18	15	19	1

Empleando la codificación anterior, construimos matrices de una columna

$$\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} S \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elegimos una *matriz cualquiera* que permitirá codificar más el mensaje. Esta matriz es la clave. Así que solo la deben conocer el emisor y el receptor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallamos la matriz inversa de A, es decir hallamos A^{-1}, que por cierto obtuvimos antes

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora multiplicamos la matriz A, por cada una de las matrices columna

$$A\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 33 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} S \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Quedando el mensaje cifrado de la siguiente forma

51	33	39	20

El receptor del mensaje, conociendo la matriz de codificación, podrá descifrar el mensaje.

Una vez que el receptor del mensaje encuentre la matriz A^{-1}, solo le resta leer el mensaje

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 51 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 39 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18	15	19	1

Quedando: $R\ O\ S\ A$

Codificar es un proceso bastante rápido, siempre y cuando se dominen los conceptos y operaciones que hemos estudiado antes.

Codifiquen el siguiente mensaje, para una matriz 3×3: **Venezuela**.

Rango de una matriz

El rango de una matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{R})$ es el número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes. El rango de una matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{R})$ se simboliza con $rang(A)$, o bien, $r(A)$.

Esta definición permite relacionar el concepto de rango con la estructura de espacio vectorial, así como con las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Un método eficiente para hallar el rango de una matriz A es convertir dicha matriz en una matriz equivalente que sea triangular superior. Esta conversión de una matriz A a una **matriz equivalente** A' se hace realizando operaciones válidas entre filas (adición y sustracción de filas y/o multiplicación por un escalar). Por ejemplo, sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Mediante operaciones entre filas convertiremos esta matriz en una matriz triangular superior. Observemos que la *fila* 1, que denotaremos con F_1, consta de los elementos 1, –3, 2. F_2 consta de los elementos 1, 0, 1; y F_3 de 3, –9, 6.

Para que A sea equivalente a una matriz triangular superior, necesitamos convertir en 0 los elementos que están debajo de la diagonal principal. Como $a_{21} = 1$, entonces podemos restar la segunda fila de la primera, es decir, reemplazamos la segunda fila por la fila $F_1 – F_2$, así obtenemos la siguiente matriz equivalente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2:\ F_1 - F_2} A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

La flecha indica que ambas matrices son equivalentes. Observen que sobre ésta hemos escrito $F_2 : F_1 - F_2$, para indicar cuál operación entre filas se aplicó a la matriz a la izquierda de la flecha.

Con esta primera operación entre filas hemos logrado que el elemento a_{21} sea 0. Continuemos entonces con nuestra tarea. Como $a_{31}=3$, debemos multiplicar por 3 a F_1 y restarle la F_3, es decir, reemplazamos la fila tres por $3F_1-F_3$. Ya con esto podemos escribir:

$$A'=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 3 & -9 & 6\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3:3F_1-F_3}A''=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Notemos que se hicieron 0 los demás elementos de la F_3, de hecho, se cumple que:

$$F_3=3F_1$$

Esto significa que la tercera fila es combinación lineal de las demás filas.

En resumen, la matriz A es equivalente a una matriz triangular superior en la que se anuló una fila (las otras dos filas son no nulas). Por tanto, el rango de la matriz A es 2:

$$rang\ (A)=2$$

Veamos otro ejemplo. Sea la matriz:

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Sigamos entonces el proceso que ilustramos antes.

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2:\ F_1+F_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3:\ 2F_1-F_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & -1 & 7\\ 0 & -4 & 13\end{bmatrix}$$

Ya los elementos en la columna 1 y filas 2 y 3 son ceros (los hemos destacado en color rojo). Ahora necesitamos que el primer elemento no nulo de F_2 sea 1. Para ello multiplicamos esta fila por -1. Además, emplearemos este primer elemento no nulo para convertir en cero el elemento de la tercera fila y segunda columna. Apliquemos estas dos operaciones de seguidas:

$$\xrightarrow{F_2:\ -F_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & -4 & 13\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3:\ 4F_2+F_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & -15\end{bmatrix}=B'$$

B' es una matriz triangular superior en la que ninguna de sus filas se anuló (lo que significa que sus filas son independientes), por tanto, el rango de la matriz B es 3:

$$rang\ (B)=3$$

Propiedades de los Determinantes

Las propiedades que mostramos a continuación facilitan los cálculos. En todos los casos, naturalmente, la matriz indicada es cuadrada.

- **Si una matriz tiene una fila nula o una columna nula, entonces su determinante es 0**. Observen que en el desarrollo de un determinante los productos que se forman tienen un elemento de cada fila y uno de cada columna. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} = 0$$

- **El determinante de una matriz cuadrada y el de su traspuesta son iguales**.

$$det(A) = det\left(A^T\right)$$

De hecho, si A es una matriz 2×2, entonces:

$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = det\left(A^T\right)$. Y si A es 3×3, entonces:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

- **Si se intercambian dos filas de la matriz, entonces el valor absoluto del determinante es el mismo, pero cambia de signo. Lo mismo sucede si se intercambian dos columnas de la matriz**. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- **Si dos filas de una matriz son idénticas, entonces el determinante es 0. Algo similar sucede si dos columnas de la matriz son idénticas**. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

Si se multiplica una fila (columna) por un escalar k, entonces el determinante queda multiplicado por ese escalar. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = kaei + kbfg + kcdh - \left(kceg + kbdi + kafh\right)$$

$$= k\left[aei + bfg + cdh - \left(ceg + bdi + afh\right)\right]$$

$$= k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Si se cambia el signo de una fila, el determinante cambia de signo. Si hacemos $k = -1$ en la propiedad anterior, se tiene esta propiedad.

$$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Si los elementos de una fila (columna) son proporcionales a sus correspondientes elementos en otra fila (columna), entonces el determinante es 0. En efecto:

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

Un determinante se puede descomponer en una suma de determinantes con la forma que sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

Sabemos que:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} = \left(a_1 + b_1\right)qu + \left(a_2 + b_2\right)rs + \left(a_3 + b_3\right)pt$$

$$-\left(a_3 + b_3\right)qs - \left(a_2 + b_2\right)pu - \left(a_1 + b_1\right)rt$$

Por otra parte,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} = a_1qu + pta_3 + ra_2s - a_3qs - rta_1 - pa_2u$$

$$+ b_1qu + ptb_3 + rb_2s - b_3qs - rtb_1 - pb_2u$$

$$= (a_1+b_1)qu + (a_2+b_2)rs + (a_3+b_3)pt - (a_3+b_3)qs - (a_2+b_2)pu - (a_1+b_1)rt$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

Y esto completa la prueba.

- **Si se suman a los elementos de una fila (columna) los correspondientes elementos de las otras filas (columna), multiplicadas previamente por escalares cualesquiera, entonces el valor del determinante no varía.**

- **Si una fila (columna) es combinación lineal de otras filas (columnas), entonces el determinante es 0.**

Ambas se derivan de las propiedades anteriores. Por ejemplo, sabemos que la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

tiene rango 2 (pues vimos que su tercera fila es combinación lineal de la primera). Luego, su determinante debe ser 0. En efecto:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 1\cdot(-9)\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 3 - (-3)\cdot 1\cdot 6 - (-9)\cdot 1\cdot 1$$

$$= 0 - 18 - 9 - 0 + 18 + 9 = 0$$

Además, la propiedad anterior a ésta ("Si se suman a los elementos de una fila o columna los correspondientes elementos de las otras filas o columnas, multiplicadas previamente por escalares cualesquiera, entonces el valor del determinante no varía") garantiza que el determinante de matrices equivalentes por filas es el mismo, tal es el caso, por ejemplo, de los determinantes de las matrices A y A' que expusimos en la sección anterior, e incluso el que corresponde a las matrices B y B'.

¿Cómo calcular el determinante de una matriz de orden 4×4?

Por ejemplo, calculemos el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para ello desarrollaremos su determinante en menores de tercer orden según los elementos de la primera columna (destacados en rojo al lado izquierdo de la igualdad):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Noten que para el elemento $a_{11} = 1$, el menor complementario está dado por la matriz que se deriva de omitir la fila 1 y la columna 1. Para el elemento $a_{21} = -1$, el menor complementario se obtiene de omitir la fila 2 y la columna 1. Para $a_{31} = 1$, el tercer menor proviene de omitir la fila 3 y la columna 1. Y por último, para $a_{41} = 0$, se omitió la fila 4 y la columna 1.

Además, los signos de los escalares que multiplican a cada determinante en el desarrollo dependen de la regla $(-1)^{i+j}$, tal como vimos en la definición del determinante de una matriz. Observen que cuando la suma de las coordenadas del elemento que tomamos es par, entonces $(-1)^{i+j} = (-1)^{2n} = \left((-1)^2\right)^n = (1)^n = 1$, de acuerdo con las propiedades de la potenciación, así que no se altera el coeficiente del menor correspondiente. Pero si las coordenadas de tal elemento suman un número impar, entonces $(-1)^{i+j} = (-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \cdot (-1)^1 = 1 \cdot (-1) = -1$, por tanto, sí cambia el signo del coeficiente del menor correspondiente. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Este es precisamente el desarrollo del determinante dado en menores de tercer orden.

Con este método puede calcularse el determinante de cualquier matriz cuadrada. Aunque siempre deben estar atentas y atentos a las propiedades que mostramos antes, pues ellas permiten economizar los cálculos. Por ejemplo, si cierta matriz tiene uno o varios ceros en una de sus filas o columnas, entonces conviene desarrollar tal determinante con los elementos de esa fila o columna, pues así se harán 0 varios de los sumandos en el desarrollo.

Hoy en día estos cálculos se facilitan con el apoyo en la tecnología. Existen muchos *programas libres* disponibles en Internet que calculan, en décimas de segundo, el determinante de una matriz. Así que prepárense a descargar alguno de éstos pues les será de mucha ayuda para la lección que sigue.

Actividades

1. ¿Qué matriz es triangular superior e inferior?

2. Demuestren que la adición de matrices es asociativa.

3. Prueben que para cualquier matriz A existe una matriz opuesta.

4. Sean $C=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ y $E=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 14 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$, calculen:

   - $C+D+E$
   - $\frac{1}{5}C-2E+D$

5. Sean $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -8 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcular:

   - $2B+A$
   - $-3C+2A$
   - ¿Cuál es el rango de cada una?

6. ¿Existen matrices cuyo rango sea 0? En ese caso, expongan algunas de ellas.

7 Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 9\\ 4 & 7 & 8\\ -\frac{1}{5} & 1 & -1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$, ¿están definidas $A\cdot B$ y $B\cdot A$? En ese caso, calcúlenlas.

8 Si $C=\begin{bmatrix}6 & 4 & 5\\ -9 & 3 & 2\end{bmatrix}$ y $D=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 10 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, obtengan $C\cdot D$. ¿Está definida $D\cdot C$?

9 Sean $E=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & 3 & -9\\ 0 & -1 & 21\\ 4 & 6 & -8\end{bmatrix}$ y $F=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, obtengan $E\cdot F$. ¿Está definida $F\cdot E$?

10 Expongan una matriz de orden 2×2 y una de orden 3×3 cuyo determinante sea 1.

11 ¿Cuál es el determinante de las matrices que siguen?

- $\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & -5\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}4 & 17 & -3\\ 3 & \sqrt{3} & -\frac{1}{5}\\ -1 & \frac{\pi}{2} & 9\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -5\\ \frac{1}{3} & 2 & -1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}9 & 25 & 3\\ 0 & -1 & 19\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -5\\ \frac{1}{3} & 2 & -1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ 17 & \sqrt{3} & \frac{\pi}{2}\\ -3 & -\frac{1}{5} & 9\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}x & x & x & x\\ 1 & y & y & y\\ 1 & 1 & z & z\\ 1 & 1 & 1 & w\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}x & 1 & 0 & -2\\ 1 & 4 & 0 & 2\\ -1 & 1 & x & 3\\ 1 & 1 & 0 & 7\end{bmatrix}$

¿Cómo pueden deducir el determinante de la matriz $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & -5\end{bmatrix}$ sin hacer cálculos, solo basándose en la matriz $\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ y en las propiedades de los determinantes? ¿Qué otro determinante de la lista anterior no requiere hacer los cálculos nuevamente? Conversen esto con sus compañeras y compañeros.

12 ¿Tienen inversa las matrices que exponemos a continuación? En tal caso, deduzcan cuál es.

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 3 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13 Organícense en pequeños grupos, seleccionen un mensaje y codifíquenlo de acuerdo con el método estudiado en esta lección.

14 Investiguen algunas ideas históricas sobre la codificación de datos y expongan sus resultados en su liceo.

La idea de **matriz** es muy antigua. Ya los chinos, aproximadamente 600 años antes de Cristo, emplearon una notación matricial para denotar lo que se conoce como **cuadrado mágico**. Éste es una disposición matricial de números distintos, con igual número de filas que de columnas, de manera que la suma de los números situados en cualquier fila, columna o diagonal es constante. El orden de un cuadrado mágico es el número de filas o de columnas que tiene la matriz.

La Petroquímica y los fertilizantes

La petroquímica de Venezuela (PEQUIVEN)

En la página web de PEQUIVEN, se presentó la siguiente información para el mes de enero de 2012:

"El Gobierno Bolivariano, a través de la Corporación Petroquímica de Venezuela y Agropatria, garantiza el suministro de unas $900\ mil$ toneladas métricas de fertilizantes para cubrir los requerimientos del sector productivo nacional para el ciclo de invierno 2012. Así lo informó el viceministro de los Circuitos Agroproductivos y Agroalimentarios durante la instalación de la Mesa Técnica de Programación del Suministro de Fertilizantes para el Ciclo Invierno 2012, celebrada en las instalaciones del Complejo Petroquímico Morón (Carabobo) [...] A través de esta Mesa Técnica de Fertilizantes se iniciará la distribución de los abonos para atender 3 millones de hectáreas de siembra este año"[1].

1: Disponible en http://www.pequiven.com

¿Conocen ustedes cuáles son algunos de esos fertilizantes que se utilizan para la siembra y que son producidos por PEQUIVEN?

Uno de los más importantes es la urea, el cual es uno de los fertilizantes más conocidos. Es el sólido granulado de mayor concentración de Nitrógeno, esencial para las plantas, ya que las mismas requieren grandes cantidades del mismo para crecer normalmente. Este elemento es indispensable para la síntesis de la clorofila y, por ende, está involucrado en el proceso de la fotosíntesis. Es un componente de las vitaminas y de los sistemas de energía de la planta. El Nitrógeno es responsable del incremento de proteínas en las plantas, estando directamente relacionado con la cantidad de hojas, brotes y tallos. La urea se utiliza como fertilizante en la siembra de hortalizas, cereales y pastura para el ganado.

Otro de los fertilizantes que produce PEQUIVEN es el sulfato de amonio. Este producto se puede mezclar con otros fertilizantes, tales como la misma urea, ya que tiene gran compatibilidad. El sulfato de amonio contiene azufre y amonio, que se utiliza en suelos calizos y alcalinos, debido a su efecto acidificante. El sulfato de amonio aporta a las plantas nutrientes como el nitrógeno y el azufre.

PEQUIVEN también produce los llamados fertilizantes NPK, los cuales deben su nombre a que suministran los tres elementos químicos que se corresponden con sus siglas, estudiadas por ustedes en Química: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Por ejemplo, el NPK 12-24-12 CP es un fertilizante complejo que, por cada 100 kilogramos de abono, contiene 12 de nitrógeno, 24 de fósforo y 12 de potasio. La CP final identifica la categoría de los fertilizantes que están mezclados con materias inertes. Con esa mezcla se trata de reducir los riesgos tóxicos como consecuencia de un incendio o una explosión. Los NPK aportan tres de los nutrientes necesarios para el desarrollo de los vegetales. El fósforo (P) interviene en la fotosíntesis, en el almacenamiento y transferencia de energía, en la división celular, promueve la formación y el crecimiento de las raíces, y el potasio (K) contribuye a evitar organismos invasores.

Les invitamos a reflexionar sobre la importancia del petróleo en la producción de fertilizantes y su incidencia en la seguridad agroalimentaria de nuestro país.

Agropatria y la venta de fertilizantes

En la página web de PEQUIVEN se presenta la lista de precios de venta al público de los diferentes fertilizantes que comercializa, en particular de los tres fertilizantes que hemos descrito anteriormente. Los precios de venta vienen dados por presentaciones en sacos de $50\ kg$. A continuación mostramos en la *tabla* 1 los precios de algunos de esos productos:

Productos (sacos $50\ kg$)	Composición	Costo (Bs)
Urea perlada	46% N	18,85
Súper Sam (Sulfato de Amonio)	21% N-24% S	18,51
El Sabanero *(12-24-12 CP)*	*NPK*	34,22
El Rendidor *(10-26-26 CP)*	*NPK*	42,34

Fuente: www.pequiven.org.ve

Disponiendo de esa información, supongamos que necesitamos apoyar a la Sección de Administración de Agropatria en la población de Sabaneta (Barinas) a resolver la siguiente situación:

Problema A:

Se conoce que en una venta de fertilizantes se cobraron $Bs.\ 1.066{,}10$ y que se han vendido un total de 46 sacos, de $50\ kg$. cada uno, de urea perlada, Súper Sam y El Sabanero. Sin embargo, no se anotó el registro de cuántos sacos de cada fertilizante se habían vendido. El dependiente recuerda que el total de los sacos de Súper Sam y El Sabanero eran seis unidades más que los sacos de urea. La administración requiere tener el registro exacto para poder hacer inventario. ¿Cómo podremos ayudarles a obtener la información faltante?

Observamos que tenemos tres cantidades que son desconocidas: el número de sacos de urea, los de Súper Sam (sulfato de amonio) y los de El Sabanero (*NPK*). En consecuencia, tenemos **tres incógnitas**. Vamos a proceder a identificar, mediante una letra, cada una de dichas incógnitas. Sean:

- $x =$ número de sacos de urea.
- $y =$ número de sacos de Súper Sam.
- $z =$ número de sacos de El Sabanero.

Conocemos que el número total de sacos vendidos de los tres tipos de fertilizantes fue de 46. Planteamos, en consecuencia, la siguiente ecuación:

$$x + y + z = 46$$

Conocemos también que el precio unitario, por saco, de Urea, Súper Sam y El Sabanero, es de $Bs.$ $18{,}85$, $Bs.$ $18{,}51$ y $Bs.$ $34{,}22$, respectivamente. Adicionalmente conocemos que el monto total de la venta fue de $Bs.$ $1.066{,}10$. Podemos, en consecuencia, plantear la siguiente ecuación:

$$18{,}85x + 18{,}51y + 35{,}83z = 1.066{,}10$$

Además conocemos que el total de los sacos de Súper Sam y El Sabanero eran seis unidades más que los sacos de urea. Ello nos permite plantear otra ecuación: $x + 6 = y + z$, la cual es equivalente a $-x + y + z = 6$. ¿Por qué podemos afirmar esto?

Ahora tenemos planteadas tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} &x + y + z = 46 \\ &18{,}85x + 18{,}51y + 35{,}83z = 1.066{,}10 \\ &-x + y + z = 6 \end{aligned}$$

Ya ustedes han estudiado, en Tercer Año de *Educación Media*, un ***sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y***, por tanto sabemos que resolver tal sistema consiste en determinar los valores de las incógnitas x e y que satisfacen, simultáneamente, a cada ecuación del sistema.

¿Cuántas ecuaciones lineales con cuántas incógnitas se han formulado en la situación planteada en la tienda Agropatria de Sabaneta de Barinas? Efectivamente, como vemos tenemos tres ecuaciones lineales, es decir, de primer grado, con tres incógnitas. Juntas forman un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas y se suelen representar mediante una llave.

$$\begin{cases} x + y + z = 46 \\ 18{,}85x + 18{,}51y + 35{,}83z = 1.066{,}10 \\ -x + y + z = 6 \end{cases}$$

Ahora necesitamos resolver este sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones es determinar los valores de las incógnitas que satisfacen, simultáneamente, a cada ecuación del sistema.

En Tercer Año de *Educación Media* estudiamos tres métodos algebraicos para la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: **sustitución**, **igualación** y **reducción**. Esos mismos métodos algebraicos, mediante extensión, pueden ser aplicados para resolver nuestro sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Procedamos a utilizar el método de reducción para resolver la situación que tenemos planteada.

El *método por reducción* consiste en:

(*a*) multiplicar dos de las ecuaciones por números reales de tal manera que los coeficientes (en valor absoluto) de una de las incógnitas sean iguales y con signos distintos. Ello se hace para eliminar una de las incógnitas. Una manera práctica de realizar este procedimiento es obtener el mínimo común múltiplo (*m.c.m.*) de los valores absolutos de los coeficientes de la incógnita que se desea eliminar y multiplicar cada miembro de la ecuación por el cociente de dividir el *m.c.m.* entre el valor absoluto del correspondiente coeficiente de la incógnita considerada. De esa manera los coeficientes de la incógnita a eliminar tendrán igual valor absoluto. Nuestro sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z=46 \\ 18,85\,x+18,51\,y+35,83\,z=1.066,10 \\ -x+y+z=6 \end{cases}$$

Consideremos la primera y la segunda ecuación. Vamos a proceder a eliminar la incógnita x.

$$x+y+z=46$$
$$18,85\,x+18,51\,y+35,83\,z=1.066,10$$

Observamos que para ello debemos multiplicar la primera ecuación por $-18,85$. Tendremos entonces lo siguiente:

$$-18,85\,x-18,85\,y-18,85\,z=-867,10$$
$$18,85\,x+18,51\,y+35,83\,z=1.066,10$$

(*b*) sumar, algebraicamente, las ecuaciones resultantes miembro a miembro, eliminando así la incógnita x. Nos queda la siguiente ecuación:

$$-0,34\,y+16,98\,y=199$$

Esto permite obtener una ecuación donde queda eliminada la incógnita x y que resulta ser *combinación lineal* de la primera y la segunda ecuación. ¿Por qué?

(*c*) repetir el procedimiento hecho en (*a*) y (*b*), con la primera y la tercera ecuación del sistema original.

$$x+y+z=46$$
$$-x+y+z=6$$

Al sumar algebraicamente ambas ecuaciones, nos queda la siguiente ecuación:

$$2y + 2z = 52$$

La ecuación obtenida es equivalente a $y + z = 26$, ya que esta ecuación resulta ser **combinación lineal** de la primera y la tercera ecuación. ¿Cómo pueden justificar esta afirmación?

(d) Sustituimos la segunda y la tercera ecuación del sistema original por las ecuaciones obtenidas en (b) y en (c). Así, tendremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 46 \\ -0{,}34\,y + 16{,}98\,z = 199 \\ y + z = 26 \end{cases}$$

Este sistema es **equivalente** al dado originalmente.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

(e) Consideramos entonces las ecuaciones donde hemos eliminado la incógnita x, y procedemos con el método de reducción tal como lo hicimos en Tercer Año para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -0{,}34\,y + 16{,}98\,z = 199 \\ y + z = 26 \end{cases}$$

Vamos a proceder a eliminar la incógnita y. Justifiquen cada uno de los siguientes pasos:

$$-0{,}34\,y + 16{,}98\,z = 199$$
$$0{,}34\,y + 0{,}34\,z = 8{,}84$$

De donde: $17{,}32\,z = 207{,}84$ y obtendremos que $z = 12$. En consecuencia: $y = 14$, $x = 20$. La solución obtenida es la terna $(20, 14, 12)$.

¡Verifiquen que dicha solución satisface a cada una de las ecuaciones del sistema planteado originalmente y también al sistema equivalente considerado!

En conclusión, hemos obtenido la información requerida por la Sección de Administración de la tienda Agropatria de Sabaneta, en Barinas. La respuesta es entonces: 20 sacos de Urea, 14 sacos de Súper Sam y 12 sacos de El Sabanero.

Discutan con sus compañeras y compañeros cómo resolver el sistema original planteado en el problema de Agropatria, mediante los métodos de igualación y de sustitución.

Problema B:

Les proponemos resolver el siguiente problema haciendo uso de alguno de los tres métodos conocidos por ustedes: igualación sustitución o reducción.

En la Planta Petroquímica de Morón se combinan el nitrógeno (N), el fósforo (P) y el potasio (K) para formar los fertilizantes NPK. Entre ellos, **El Sabanero** (12-24-12 CP), que en 100 kilos de abono, contiene 12 de nitrógeno, 24 de fósforo y 12 de potasio, **El Rendidor** (10-26-26 CP) contiene 10 kg. de nitrógeno, 26 kg. de de fósforo y 26 kg. de potasio, y **El Productor** (12-12-17 CP) está formado por 12 kg. de nitrógeno, 12 kg. de fósforo y 17 kg. de potasio. Si hay disponibles 1.720 kg. de nitrógeno, 3.770 kg. de fósforo y 2.585 kg. de potasio, ¿cuántas unidades de cada tipo de los tres fertilizantes, de 100 kg. cada una, se pueden formar si se usa todo el material químico disponible?

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

En el problema A se nos presentó el caso de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. En general, podemos tener un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ese sistema también puede ser expresado en forma matricial, por medio del producto de matrices:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

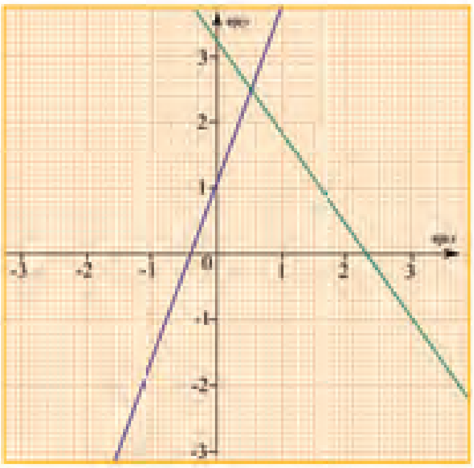
Es decir, $AX = B$.

Donde la matriz $A = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$ recibe el nombre de **matriz del sistema** (conformada por los coeficientes de cada una de las incógnitas en cada ecuación del sistema), X es la **matriz columna de las incógnitas** y B es la **matriz columna de los términos independientes**.

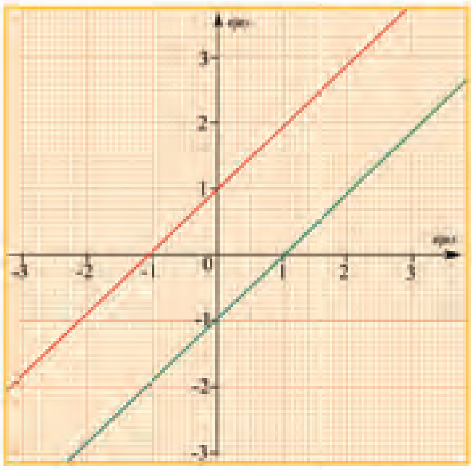
Interpretación geométrica de los sistemas de m ecuaciones con tres incógnitas

Recordemos que cuando estudiamos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tenemos ecuaciones de la forma $ax + by = c$, las cuales representan a una recta en el Plano, y sabemos que la interpretación gráfica de la solución de dicho sistema (*gráfico* 1) nos conduce a que solo existen tres posibilidades, a saber:

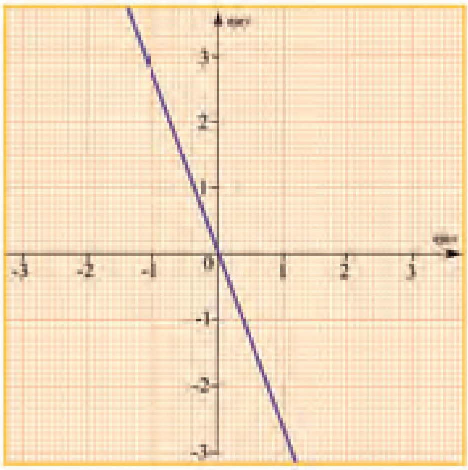
- Las rectas se corten, es decir son secantes (solución única).
- Sean paralelas (no tiene solución).
- Sean coincidentes (tiene infinitas soluciones).



Las rectas se cortan
(El sistema tiene solución única,
por lo tanto es: Compatible determinado)



Las rectas son paralelas
(El sistema no tiene solución
por lo tanto es: Incompatible)



Las rectas son coincidentes
(El sistema tiene infinitas soluciones por
lo tanto es: Compatible indeterminado)

En el caso que nos ocupa, tenemos ecuaciones lineales del tipo $ax + by + cz = d$.

La representación gráfica de una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$, lo cual estudiaremos en detalle en la lección 11 de este libro.

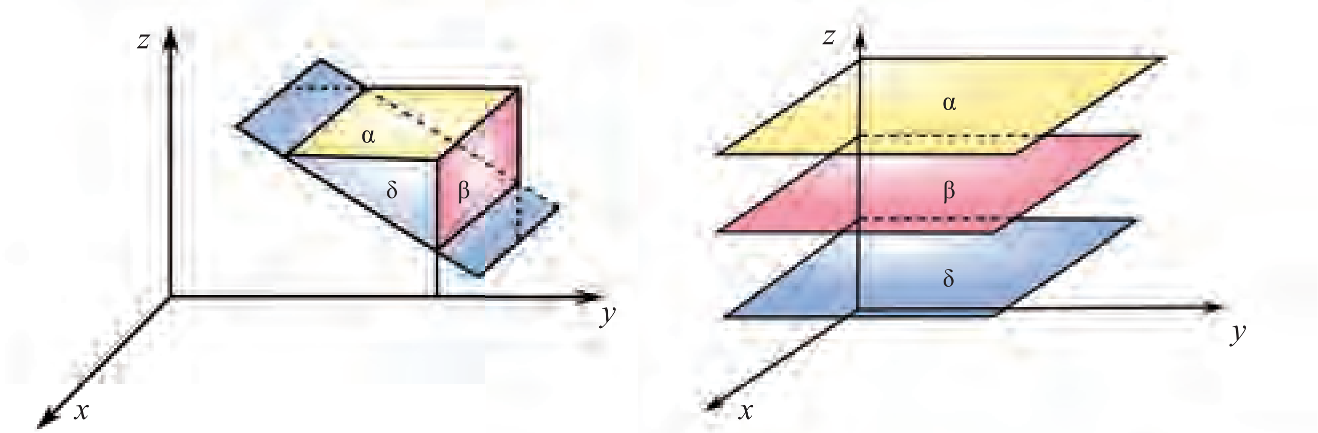
Consideremos el caso particular de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Hemos afirmado, anteriormente, que resolver dicho sistema consiste en obtener el o los puntos (x, y, z) que deben satisfacer, simultáneamente, a cada una de las ecuaciones lineales que estamos considerando. Por tanto, ese o esos puntos deben pertenecer a cada uno de los planos que representan a dichas ecuaciones.

Existen entonces tres posibilidades:

- La intersección de los tres planos es vacía (por tanto, el sistema no tiene solución).
- Los planos se cortan en un único punto (la solución es única).
- Los planos son coincidentes o su intersección es una recta (hay infinitas soluciones).

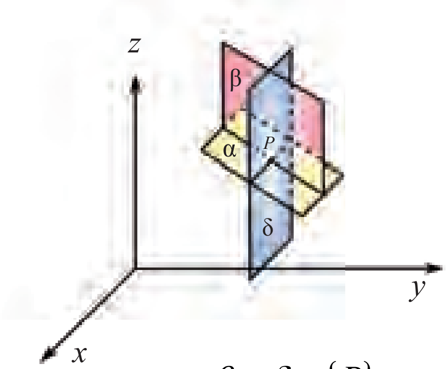
Cuando un sistema tiene solución se dice que es **compatible**. Si la solución es única se denomina **compatible determinado** y si tiene infinitas soluciones se llama **compatible indeterminado**. Si no tiene soluciones se dice que es **incompatible** (*gráfico* 2). ¿Qué podemos afirmar acerca del sistema asociado a los problemas A y B?

Veamos gráficamente lo que se tiene para el caso $n = 3$.



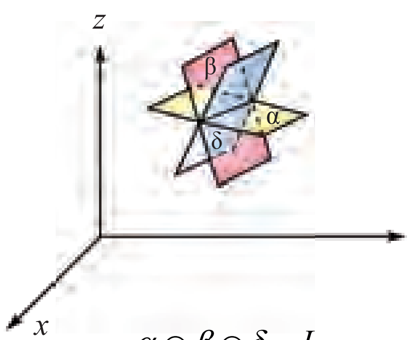
$$\alpha \cap \beta \cap \delta = \varnothing$$

El sistema de ecuaciones asociado es incompatible

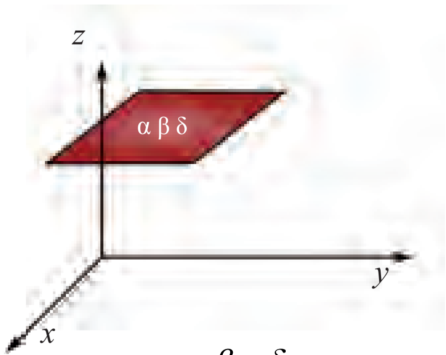


$$\alpha \cap \beta \cap \delta = \{P\}$$

El sistema asociado es compatible determinado



$$\alpha \cap \beta \cap \delta = L$$



$$\alpha = \beta = \delta$$

Aquí el sistema asociado es compatible indeterminado

Gráfico 2

El esquema que presentamos permite clasificar los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Algunas consideraciones sobre los sistemas equivalentes

Para resolver el problema en Agropatria planteamos el siguiente sistema:

$$(1)\quad \begin{cases} x+y+z=46 \\ 18,85x+18,51y+35,83z=1.066,10 \\ -x+y+z=6 \end{cases}$$

En la resolución del sistema por el método de reducción, operamos con la primera y la segunda ecuación así como también con la primera y la tercera ecuación, y nos resultó el siguiente sistema:

$$(2)\quad \begin{cases} x+y+z=46 \\ -0,34y+16,98z=199 \\ y+z=26 \end{cases}$$

Afirmamos que estos dos sistemas, (1) y (2), eran **equivalentes** porque tenían las mismas soluciones. También señalábamos que la ecuación $-0,34y+16,98y=199$ era una **combinación lineal** de las dos primeras ecuaciones que forman el sistema (1) y que la ecuación $y+z=26$ era **combinación lineal** de las ecuaciones primera y tercera que forman dicho sistema. En este caso decimos que el sistema (2) es obtenido a partir del sistema (1) mediante **operaciones de fila**.

En general afirmamos que una ecuación $ax+by+\cdots+cz=d$ es **combinación lineal** de otras varias ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&a_1x+b_1y+\cdots+c_1z=d_1\\
&a_2x+b_2y+\cdots+c_2z=d_2\\
&\vdots\\
&a_mx+b_my+\cdots+c_mz=d_m
\end{aligned}$$

cuando el **vector fila** $(a,b,\ldots,c,d)$ formado por los coeficientes de las incógnitas y el término independiente es combinación lineal de los vectores filas correspondientes de las otras ecuaciones. O sea, si existen números $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$ tales que:

$$(a,b,\ldots,c,d)=\alpha_1(a_1,b_1,\ldots,c_1,d_1)+\alpha_2(a_2,b_2,\ldots,c_2,d_2)+\cdots+\alpha_m(a_m,b_m,\ldots,c_m,d_m)$$

Considerando que los sistemas (1) y (2) son equivalentes podemos formular la siguiente propiedad, la cual es susceptible de ser demostrada:

A partir de un sistema de ecuaciones se puede obtener otro equivalente, sustituyendo una de las ecuaciones por una combinación lineal de las que forman el sistema; siempre y cuando el factor α_i que multiplique en la combinación lineal a la ecuación que se va a sustituir no sea nulo, es decir $\alpha_i\neq 0$.

Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1)\quad \begin{cases}5x-2y+3z=4\\2x+5y-4z=8\\7x+3y-z=12\end{cases}$$

Observen que la tercera ecuación del sistema resulta de sumar las dos primeras. Es decir, es una combinación lineal de las dos primeras ecuaciones. Verifiquen esta afirmación.

El sistema que resulta al suprimir dicha ecuación es:

$$(2)\quad \begin{cases}5x-2y+3z=4\\2x+5y-4z=8\end{cases}$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes porque ambos tienen las mismas soluciones.

En general podemos enunciar la siguiente propiedad:

Si en un sistema de ecuaciones una de ellas es combinación lineal de las restantes, el sistema que resulta de suprimir dicha ecuación es equivalente al dado.

Método de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Matemático, físico y astrónomo de origen alemán. Hizo estudios en la Universidad de Gotinga, donde presentó su tesis doctoral sobre el teorema que establece que toda ecuación algebraica de coeficientes complejos tiene, igualmente soluciones complejas. En 1801 publicó una de sus obras fundamentales, las Disquisiciones aritméticas, allí hizo un trabajo exhaustivo de la teoría de los números congruentes y dio una solución algebraica al problema, sin resolver desde los tiempos de Euclides, de cómo determinar si un polígono regular de n lados puede ser construido de manera geométrica. Gauss fue conocido como el príncipe de la Matemática.

Wilhelm Jordan (1842-1899). Fue un científico de origen alemán que hizo trabajos de gran importancia en el campo de la geodesia, el estudio y determinación de la forma y dimensiones de la Tierra. La geodesia utiliza, de manera importante, la Física y la Matemática; sus resultados son base geométrica fundamental para otras ramas del conocimiento geográfico como son la Topografía y la Cartografía. En el trabajo de Jordan sobre topografía empleó el método de los mínimos cuadrados. En su obra fundamental dio una detallada presentación del método de eliminación de Gauss para convertir el sistema dado en uno "triangular".

Resolvamos el sistema de ecuaciones planteado en la tienda de Agropatria utilizando el llamado **método de eliminación de Gauss-Jordan**. Recordemos que teníamos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=46 \\ 18{,}85x+18{,}51y+35{,}83z=1.066{,}10 \\ -x+y+z=6 \end{cases}$$

El procedimiento que seguiremos es el siguiente:

(*a*) Escribimos la **matriz ampliada del sistema**, que se forma con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. En nuestro caso, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 46 \\ 18,85 & 18,51 & 35,83 & 1.066,10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(*b*) Operaremos con las filas de la matriz para obtener otro sistema equivalente de manera que cada ecuación del mismo tenga una incógnita menos que la anterior. Es decir, vamos a llevar a la matriz ampliada del sistema a una forma escalonada reducida. Para ello utilizaremos las propiedades estudiadas en la sección anterior.

Ilustremos esto con nuestro ejemplo:

Realicemos las siguientes operaciones de filas:

$F_2: F_2 + (-18,85)F_1$ y $F_3: F_3 + F_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 46 \\ 0 & -0,34 & 16,98 & 199 \\ 0 & 2 & 2 & 52 \end{bmatrix}$$

Operemos ahora $F_3: 0,17F_3 + F_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 46 \\ 0 & -0,34 & 16,98 & 199 \\ 0 & 0 & 17,32 & 207,84 \end{bmatrix}$$

Hemos obtenido otro sistema equivalente donde cada ecuación del mismo tiene una incógnita menos que la anterior. El sistema al que hemos llegado es fácilmente resoluble:

$$\begin{cases} x + y + z = 46 \\ -0,34y + 16,98z = 199 \\ 17,32z = 207,84 \end{cases}$$

Despejando z de la tercera ecuación tendremos $z=12$. Sustituyendo ese valor de z en la segunda ecuación tenemos $y=14$, y haciendo la sustitución de los valores de z e y en la primera ecuación del sistema equivalente obtendremos $x=20$. Por supuesto, hemos obtenido la misma solución que cuando resolvimos a través del método de reducción.

Verifiquen que el punto $(20,14,12)$ satisface las tres ecuaciones del sistema equivalente que obtuvimos con las diversas operaciones de fila. Como el sistema tiene una única solución afirmamos que es un sistema **compatible determinado**.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el **método de eliminación de Gauss-Jordan** cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación del sistema tiene una incógnita menos que la anterior. El método de Gauss-Jordan transforma la matriz del sistema, o de coeficientes de las incógnitas, en una matriz triangular superior.

Vamos ahora a resolver el siguiente sistema utilizando el *método de Gauss-Jordan*:

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+z=\dfrac{1}{2} \\ x-3y+4z=2 \end{cases}$$

(a) Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Ahora, aplicamos las operaciones de filas $F_2: F_2 - F_1$ y $F_3: F_3 - F_1$. Con lo cual:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si hacemos $F_3: F_3 + 2F_2$ y $F_1: F_1 + F_2$, nos queda,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz que se asocia al sistema de ecuaciones que sigue,

$$\begin{cases} x + z = \dfrac{1}{2} \\ y - z = -\dfrac{1}{2} \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Es decir, $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - z \\ y = -\dfrac{1}{2} + z \end{cases}$

Por tanto, las incógnitas x e y dependen de z. Entonces el sistema anterior puede escribirse como:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - t \\ y = -\dfrac{1}{2} + t \\ z = t \end{cases}$$

Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones ya que para cada valor de t se tendrá un punto (x, y, z). Por ejemplo si $t = 0$ entonces $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0$ es una solución del sistema. ¿Cuáles serían las soluciones para $t = 1$ ó $t = -3$? Así, reiteramos que el sistema planteado tiene infinitas soluciones. En consecuencia, es un sistema **compatible indeterminado**. La solución viene dada entonces por los puntos de la forma $\left(\frac{1}{2} - t, -\frac{1}{2} + t, t\right)$.

Ustedes ya resolvieron el problema B planteado en esta lección. Resolvamos el sistema asociado utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 4x+3y-z=10 \\ 2x-y-2z=6 \end{cases}$$

(a) Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Aplicamos las operaciones de filas $F_2 : F_2 - 2F_1$ y $F_3 : F_3 - F_1$. Con lo cual:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Operamos $F_3 : F_3 - F_2$ y nos queda lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se asocia al sistema,

$$\begin{cases} 2x+4y \quad +z=1 \\ \quad -5y-3z=8 \\ 0x+0y+0z=-13 \end{cases}$$

Notemos que de la ecuación $0x+0y+0z=-13$ nos resulta la igualdad $0=-13$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, el sistema dado **no tiene solución**. Por tanto, llegamos a la conclusión de que es un sistema **incompatible**.

Ampliación de los criterios de compatibilidad de sistemas lineales

Con el método de eliminación de Gauss-Jordan desarrollamos una manera de determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución y así precisar si es compatible o incompatible. Sin embargo, sería importante tener criterios necesarios y suficientes que nos permitan determinar si un sistema tiene solución antes de proceder al hallazgo de la misma. Una herramienta fundamental para ello es el conocido **Teorema de Rouché-Frobenius**. Usaremos en dicho teorema el concepto de característica ó rango de una matriz, que ya hemos estudiado en la lección 4 correspondiente a Matrices.

Teorema de Rouché-Frobenius: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea **compatible** es que la característica o rango, k, de la matriz del sistema (matriz de los coeficientes de las incógnitas) sea igual a la de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si la característica tiene un valor igual al número de incógnitas, $k = n$, entonces el sistema es **determinado**, y si $k < n$, el sistema es **indeterminado**.

Tal Teorema lo podemos plantear de la siguiente manera: en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, sea A la matriz del sistema y A' la matriz ampliada, denominemos $r(A)$ la característica de A y la característica de $r(A')$, con k el valor numérico de la característica, tendremos entonces que se cumple:

$k = r(A) = r(A') \Rightarrow$ el sistema compatible.
$k = n \Rightarrow$ el sistema compatible determinado.
$k < n \Rightarrow$ el sistema compatible indeterminado.

Eugéne Rouché (1832-1910). Matemático francés. Trabajó, principalmente, sobre la teoría de funciones, series funcionales y cálculo de probabilidades. Escribió varias obras didácticas.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) Matemático alemán. Hizo importantes aportes en la teoría de ecuaciones diferenciales y en la teoría de grupos.

Gabriel Cramer (1704-1752) Matemático suizo. Recibió su doctorado a los 18 años. Fue profesor desde los 20 años en la Universidad de Ginebra. Su obra más importante fue Introducción al análisis de las curvas algebraicas, donde aparece la llamada Regla de Cramer (que permite resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas mediante el uso de determinantes).

Regla de Cramer para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

Basándonos en el *Teorema de Rouché-Frobenius*, ¿en qué caso podremos afirmar que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas –igual número de ecuaciones que incógnitas- es **compatible**? ¿y **compatible determinado**?¿Cuál debe ser la característica de la matriz del sistema? Efectivamente, si A es la matriz del sistema y A' la matriz del sistema ampliado debe ocurrir que $r(A)=r(A')$ para que el sistema sea compatible y además $r(A)=n$ para que el sistema sea compatible determinado.

Ahora, si $r(A)=n$, el determinante del sistema es no nulo, ya que $n\neq 0$. Por tanto, $det\ A\neq 0$. Si consideramos el caso particular de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas donde $r(A)=3$, ¿cuál es la característica de la matriz ampliada? Notemos que si $r(A)=3$, entonces $det\ A\neq 0$ por tanto $r(A')=3$ ya que A' es una matriz de orden 3×4. En general $r(A)=n$ si, y solamente si, $det\ A\neq 0$, y se cumple que $r(A')=n$. Tenemos, entonces, un criterio para conocer si un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es **compatible determinado**:

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es **compatible determinado** si, y solamente si, la característica de la matriz del sistema es n, es decir el determinante del sistema es diferente de cero.

Ya tenemos una parte de la llamada **Regla de Cramer**. Nos falta ahora obtener un método de resolver el sistema cuando es compatible determinado.

Para ello, vamos a considerar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. El procedimiento a utilizar puede ser generalizado a cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Consideremos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = b_3 \end{cases}$$

Ya conocemos que la *Regla de Cramer* solamente es aplicable si el determinante del sistema es diferente de cero, esto es, si:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Vamos a proceder a eliminar las incógnitas y y z. Para ello haremos lo siguiente:

Multiplicamos las ecuaciones del sistema por los siguientes factores:

La primera ecuación por el adjunto de a_{11} en $|A|$, es decir por A_{11}. Recordamos que A_{11} viene dado por la siguiente expresión:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- La segunda ecuación por el adjunto de a_{21} en $|A|$, es decir por A_{21}.
- La tercera ecuación por el adjunto de a_{31} en $|A|$, es decir por A_{31}.

Tendremos entonces:

$$\begin{cases} a_{11}\,A_{11}\,x + a_{12}\,A_{11}\,y + a_{13}\,A_{11}\,z = b_1\,A_{11} \\ a_{21}\,A_{21}\,x + a_{22}\,A_{21}\,y + a_{23}\,A_{21}\,z = b_2\,A_{21} \\ a_{31}\,A_{31}\,x + a_{32}\,A_{31}\,y + a_{33}\,A_{31}\,z = b_3\,A_{31} \end{cases}$$

Sumemos miembro a miembro y obtendremos la siguiente combinación lineal:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})\,x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})\,y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})\,z = c_1A_{11} + c_2A_{21} + c_3A_{31}$$

En esa igualdad tenemos que:

- El coeficiente $a_{11}\,A_{11} + a_{21}\,A_{21} + a_{31}\,A_{31}$ de la incógnita x es el desarrollo del determinante $|A|$, multiplicado por x.
- El coeficiente $a_{12}\,A_{11} + a_{22}\,A_{21} + a_{32}\,A_{31}$ de la incógnita y, es la suma algebraica de los productos de cada elemento de la segunda columna por los adjuntos de los respectivos elementos de la primera columna. Sabemos que $a_{12}\,A_{11} + a_{22}\,A_{21} + a_{32}\,A_{31} = 0$ debido a una propiedad de los determinantes que nos dice que la suma algebraica de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada por los respectivos adjuntos de una línea paralela, es nula.
- El coeficiente $a_{13}\,A_{11} + a_{23}\,A_{21} + a_{33}\,A_{31}$ de la incógnita z corresponde a una suma algebraica nula. ¿Por qué?
- El término independiente $c_1\,A_{11} + c_2\,A_{21} + c_3\,A_{31}$, al ser desarrollado, resulta igual al siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

que resulta de sustituir en el determinante $|A|$ la columna de los coeficientes de x por una columna formada por los términos independientes. Con lo cual:

$$c_1A_{11} + c_2A_{21} + c_3A_{31} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

En función de todas las consideraciones anteriores tenemos que la expresión:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})\,x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})\,y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})\,z = c_1A_{11} + c_2A_{21} + c_3A_{31}$$

Puede expresarse como:

$$|A|x=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Procediendo de manera análoga para eliminar las incógnitas x y z, así como para eliminar las incógnitas x e y, obtendremos, respectivamente, las siguientes expresiones:

$$|A|y=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A|z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

En consecuencia, tenemos un sistema equivalente al original. ¿Por qué?

$$\begin{cases} |A|x=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ |A|y=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ |A|z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Observemos que en el sistema obtenido, si dividimos por $|A|$ cada una de las ecuaciones obtendremos la solución a dicho sistema. Por tanto, ésta viene dada por:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Como $|A|\neq 0$, el sistema es compatible determinado.

Podemos, entonces, enunciar de manera completa lo siguiente:

Regla de Cramer: Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es *compatible determinado* si y solamente si el determinante del sistema, $|A|$, es diferente de cero. Para obtener la solución al mismo, el valor correspondiente a cada incógnita viene dado por el cociente de dividir el determinante, que se obtiene de sustituir en $|A|$ la columna formada por los coeficientes de la incógnita por los correspondientes términos independientes, entre $|A|$.

¿Qué implica el hecho de que el determinante del sistema sea nulo? Si $det\ A = 0$, no podemos afirmar que el sistema sea incompatible, lo que podemos afirmar es que hay dos posibilidades: que el sistema sea *compatible indeterminado* o *incompatible*.

Consideremos nuestro problema inicial de Agropatria, y apliquemos la *Regla de Cramer* al sistema que se había planteado:

$$\begin{cases} x+y+z=46 \\ 18,85x+18,51y+35,83z=1.066,10 \\ -x+y+z=6 \end{cases}$$

Seguiremos los siguientes pasos:

Calculemos el determinante $|A|$ del sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 18,85 & 18,51 & 35,83 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18,51-35,83+18,85+18,51-35,83-18,85=-34,64$$

Como $|A| \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado. Procedamos a resolverlo.

Aplicamos la *Regla de Cramer* para obtener el valor correspondiente de cada incógnita:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 46 & 1 & 1 \\ 1066,10 & 18,51 & 35,83 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{851,46+1066,10+214,98-111,06-1648,18-1066,10}{-34,64}$$

$$= \frac{-692,80}{-34,64} = 20$$

Además,

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 46 & 1\\ 18,85 & 1066,10 & 35,83\\ -1 & 6 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1066,10-1648,18+113,10+1066,10-214,98-867,10}{-34,64}$$

$$=\frac{-484,96}{-34,64}=14$$

Y por último:

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 46\\ 18,85 & 18,51 & 1066,10\\ -1 & 1 & 6\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{111,06-1066,10+867,10+851,46-1066,10-113,10}{-34,64}$$

$$=\frac{-415,68}{-34,64}=12$$

En consecuencia, la solución es $(20,14,12)$.

La solución al sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas planteado para la situación problemática presentada en Agropatria, la hemos obtenido a través de tres métodos: *reducción*, *Gauss-Jordan* y *Cramer*. Naturalmente, hemos llegado a las mismas conclusiones.

Anteriormente destacamos que si $det\ A=0$, lo que podemos afirmar es que hay dos posibilidades: que el sistema sea *compatible indeterminado* o *incompatible*. Vamos a utilizar los dos sistemas adicionales al problema de Agropatria que se plantearon en el estudio del método de Gauss-Jordan para aplicarle Cramer. Uno de ellos era el siguiente:

$$\begin{cases} x-y+2z=1\\ x+z=\dfrac{1}{2}\\ x-3y+4z=2\end{cases}$$

Calculemos el determinante $|A|$ del sistema:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 4\end{vmatrix}=-1-6+3+4=0$$

En consecuencia, como $det\ A = 0$, lo que podemos afirmar es que el sistema es *compatible indeterminado* o es *incompatible*. Al aplicar, tal como ya lo hicimos anteriormente, el *método de Gauss-Jordan* arribamos a la conclusión que el sistema es *compatible indeterminado*, ya que tiene infinitas soluciones.

El otro sistema que expusimos fue el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 4x + 3y - z = 10 \\ 2x - y - 2z = 6 \end{cases}$$

Su determinante $|A|$ es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 8 - 4 - 6 - 2 + 32 = 0$$

¿Qué podemos afirmar con respecto a este sistema?

Si aplicamos el *método de Gauss-Jordan* llegamos a la conclusión definitiva de que no tiene solución, por tanto es un sistema incompatible.

Actividades

1 Analicen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, y resuélvanlos en $\mathbb{R}$ en caso de ser compatibles.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 8y + 2z = 7 \\ 4x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = -2 \\ -2x + 13y - z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 5x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + 2w = 1 \\ 2x - y + 3z + w = -1 \\ -3x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 5y - z + 5w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ 2x - y + 3z - 2w = -1 \\ x + y - z + w = 8 \\ -x - y + z + 2w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z - w = 3 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 4x + y + 5z + 3w = 3 \end{cases}$$

2 Determinen el o los valores de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, para que el sistema dado sea: (i) compatible determinado, (ii) compatible indeterminado, o (iii) incompatible.

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+2y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+2z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -\dfrac{1}{2}x+y+z=-5 \\ 2x+\dfrac{1}{2}y+\frac{1}{2}\alpha^2 z=7 \end{cases}$$

3 Resuelvan el siguiente problema: una finca de Ospino, Estado Portuguesa, manejada por un colectivo agrícola, hizo tres compras, durante todo el año 2011, de tres tipos de fertilizantes NPK que produce PEQUIVEN: El Llanero, El Vigorizador y El Rendidor. En la primera compra adquirieron 20 sacos del El Llanero, 40 sacos de El Vigorizador y 30 sacos de El Rendidor, pagando un total de $Bs.$ 3.220. En la segunda oportunidad compraron 30 sacos de El Llanero, 20 de El Vigorizador y 50 de El Rendidor, para un total de $Bs.$ 3.800. En la tercera compra adquirieron 40 sacos de El Llanero, 30 de El Vigorizador y 20 de El Rendidor, por un monto total de $Bs.$ 3.210. Si el precio por saco de cada tipo de fertilizante se mantuvo sin variaciones durante todo el año, ¿cuál es el precio que tiene cada tipo de fertilizante por saco?

Sistemas lineales homogéneos

Consideremos la siguiente ecuación lineal: $ax+by+\cdots+cz=0$. ¿Qué podemos afirmar con respecto al término independiente? Una ecuación lineal como ésta se denomina homogénea.

Una ecuación lineal de n incógnitas es **homogénea** cuando el término independiente es 0.

Consideremos el siguiente sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Como dicho sistema está formado por m ecuaciones lineales homogéneas, afirmamos entonces que es un **sistema lineal homogéneo**.

Veamos cómo podemos resolver un sistema lineal homogéneo.

Consideremos para el estudio, la matriz A del sistema y la matriz ampliada con los términos independientes (A'):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, la característica o rango k de la matriz del sistema, $r(A)$, es igual a la característica de la matriz ampliada, $r(A')$, ya que lo que estamos agregando en esta segunda matriz es una columna nula. Por el **Teorema de Rouché-Frobenius** podemos afirmar que el sistema lineal homogéneo es *siempre compatible*. Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea *compatible* es que la característica o rango k de la matriz del sistema (matriz de los coeficientes de las incógnitas) sea igual a la de la matriz ampliada con los términos independientes.

Siguiendo a *Rouché-Frobenius*, tenemos que si la característica tiene un valor igual al número de incógnitas, $k=n$, entonces el sistema es *compatible determinado*.

En el caso de un sistema lineal homogéneo, por simple inspección, podemos afirmar que *siempre* acepta la solución: $(0,0,0,\ldots,0)$, la cual se denomina solución trivial, por tanto, en este caso, esa sería la única solución.

Si se tiene que $k<n$, entonces el sistema es *compatible indeterminado*.

Con base en lo considerado, por medio del **Teorema de Rouché-Frobenius**, afirmamos:

En un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas, con A la matriz del sistema y $r(A)$ la matriz del sistema, se cumple:

$r(A)=n \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ tiene solución trivial única.
$r(A)<n \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado $\Rightarrow$ tiene infinitas soluciones.

Por tanto, un sistema lineal homogéneo **nunca** es incompatible. Argumenten esta afirmación y convérsenla con sus compañeras y compañeros.

Recordando lo planteado en la *Regla de Cramer* vimos que si $det\ A = 0$, lo que podemos afirmar es que hay dos posibilidades: que el sistema sea **compatible** indeterminado o incompatible. En el caso de un sistema lineal homogéneo si $det\ A = 0$ entonces podemos afirmar que el sistema es compatible indeterminado. ¿Por qué?

Estamos en condiciones de plantear que:

> Un sistema lineal homogéneo es **compatible indeterminado** si, y solamente si, $det\ A = 0$.

Con las consideraciones hechas hasta ahora, tratemos de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Procedamos a calcular el determinante del sistema:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -16 + 15 + 2 - 40 + 6 - 2 = -35 \neq 0$$

Al resultar $det\ A \neq 0$ entonces, por Cramer, el sistema homogéneo es compatible determinado, por lo cual admite una solución única. Es decir la solución es la trivial: $(0,0,0)$.

Resolvamos ahora el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Su determinante es:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 - 3 - 1 + 12 - 2 = 0$$

Sabemos que si $det\ A = 0$, entonces el sistema homogéneo es compatible indeterminado. En consecuencia, tiene soluciones diferentes a la trivial. Debemos resolverlo utilizando el *método de Gauss-Jordan.*

Para ello debemos escribir la matriz del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sumemos, algebraicamente, el opuesto de la tercera fila con la primera fila, nos queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Tenemos, de la tercera ecuación, que:

$$3y + 3z = 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow z = -y$$

Tomando la primera ecuación y considerando el resultado anterior nos queda:

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x + 2y - y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

Si consideramos que $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, las soluciones del sistema vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

En el sistema que acabamos de resolver la característica de la matriz del sistema es de orden 2. ¿Por qué? En consecuencia, la tercera ecuación de ese sistema es combinación lineal de las otras dos y, por tanto, podemos suprimirla y tendríamos un sistema equivalente, de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ahora, expondremos un método para resolver un sistema de ecuaciones homogéneas donde el número de ecuaciones independientes sea una unidad menor que el de incógnitas, es decir un sistema de $n-1$ ecuaciones homogéneas independientes con n incógnitas. Para ello, consideremos el caso particular de un sistema homogéneo de dos ecuaciones independientes con tres incógnitas.

Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = 0 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = 0 \end{cases}$$

Como las dos ecuaciones son independientes, de acuerdo a una de las condiciones del problema, la característica del sistema es 2, es decir, $r(A) = 2$. Esto implica que, al menos, uno de los menores de orden 2 es diferente de cero. Asumamos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Considerando a z como parámetro, el sistema anterior es equivalente a:

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = -a_{13}\,z \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = -a_{23}\,z \end{cases}$$

Y aplicando el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}\,z & a_{12} \\ -a_{23}\,z & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}\,z \\ a_{21} & -a_{23}\,z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z$$

Y haciendo $t = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$, nos resulta:

$$x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} t, \quad y = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} t, \quad z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} t$$

Si los tres determinantes son distintos de cero, esas igualdades las podemos escribir como:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = t$$

La aplicación de esas expresiones nos da la solución del sistema. Este método se puede generalizar, siguiendo el procedimiento explicado anteriormente, para cualquier sistema de $n-1$ ecuaciones homogéneas independientes con n incógnitas.

Apliquemos ese método para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Utilicemos el método anteriormente descrito:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = t$$

Es decir:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{7} = t$$

En consecuencia, las infinitas soluciones del sistema compatible indeterminado son los elementos del siguiente conjunto:

$$\left\{ (6t, -5t, 7t) /\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Actividades

1 Resuelvan en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas lineales homogéneos:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+4y-3z=0 \\ 5x-y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+2y-3w=0 \\ x-z-2w=0 \\ 6x+y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z-w=0 \\ 2x+3y+z-2w=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

2 Determinen para qué valor(es) de α, con $\alpha \in \mathbb{R}$, los siguientes sistemas admiten soluciones distintas a la trivial.

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ 4x-\alpha y+\alpha z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x+4y+\alpha w=0 \\ x+2y+z+(\alpha-1)w=0 \\ 4x+\alpha z-4w=0 \end{cases}$$

3 Determinen para qué valor(es) de $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, los siguientes sistemas tienen solución única, infinitas soluciones o no tienen solución:

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ x+2y-3z=4 \\ 2x+6y+\alpha^2 z=-\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=2 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z=\frac{1}{2} \\ x+y+(\alpha^2-5)z=\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1 \\ x+3y+z=8 \\ 2x+3y+(\alpha^2-7)z=\alpha+4 \end{cases}$$

4 Analicen y resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Utilicen los métodos que ustedes consideren más adecuados en cada caso.

$$\begin{cases} x+z=5 \\ -3x+4y+5z=6 \\ -x-2y+3z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2z=13 \\ 2x+y+3z=-4 \\ x-2y-2z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-z+3w=1 \\ 3x+2y+z+w=2 \\ x+y+2z=1 \\ 2x+2y-3z=3 \end{cases}$$

5 Resuelvan los siguientes problemas:

- La suma de las edades de los próceres de la Independencia Venezolana: Antonio José de Sucre, José Antonio Anzoátegui y Santiago Mariño, dan un total de 121 años. El Mariscal Sucre vivió 5 años más que el General Anzoátegui. La suma de las edades de Sucre y Anzoátegui es una unidad menor que la edad que tenía el General Mariño al fallecer. ¿Cuántos años vivieron cada uno de esos tres próceres?

- Un colectivo agrícola de Turén, Estado Portuguesa, necesita comprar tres tipos de fertilizantes A, B y C, que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. Deben mezclarlos para obtener $400\ kg$ de fertilizante con un 25% de nitrógeno. La mezcla debe contener $50\ kg$ más del tipo C que del tipo B. ¿Cuántos kg de cada tipo de fertilizante deben comprar? Si la presentación de cada fertilizante viene en sacos de $50\ kg$, ¿cuántos sacos de cada tipo de fertilizante necesitan adquirir?

Una de las grandes potencialidades de nuestro país como miembro pleno del MERCOSUR es la apertura de un mercado de más de 300 millones de personas; nuestros productos petroquímicos, en especial los fertilizantes, representan una de las áreas en que puede cobrar forma el intercambio y una fortaleza del conjunto de países que lo conforman.

6 La fotografía y la Matemática

Las fotografías digitales

El mundo de la fotografía digital y del desarrollo tecnológico ofrece un sinnúmero de aplicaciones para la Matemática. Las matrices, los sistemas de ecuaciones, las transformaciones y en suma, los espacios vectoriales y el álgebra lineal, constituyen parte del soporte conceptual para el procesamiento de imágenes fotográficas. De hecho, una fotografía (o imagen digital) puede representarse con una matriz que contiene los datos sobre cada uno de los píxeles que la conforman, la palabra píxel se deriva de la expresión *picture element*, y se corresponde con la menor unidad homogénea en color que conforma la imagen. Naturalmente, esta matriz queda encriptada en el dispositivo de almacenamiento, es decir, en la memoria de la cámara o memoria extraíble y no suele escribirse como es común, sino que se emplea el *sistema binario* de numeración, estudiado por ustedes en sexto grado de Educación Primaria.

En esta lección abordaremos cierto tipo de trasformaciones geométricas realizadas a las fotografías digitales, el concepto de transformación lineal y algunas de sus propiedades.

Las transformaciones constituyen uno de los conceptos matemáticos que permite emprender proyectos como el reconocimiento de rostros, tal como se hizo recientemente con el rostro de nuestro Libertador Simón Bolívar, y de huellas dactilares indispensables en la identificación de las y los ciudadanos y en los modernos sistemas de elección popular.

Las transformaciones geométricas

Dada una imagen en 2 dimensiones ($2D$) es común transformarla geométricamente, es decir, cambiar la relación espacial entre cada uno de sus píxeles. En nuestro caso, estudiaremos un tipo particular de transformación geométrica, precisamente la que se asocia con la redistribución de los píxeles en el plano. Formalmente:

Sea (x, y) un punto de la fotografía, y por tanto, del plano. Si el punto (x^*, y^*) está relacionado con el primero a través de una transformación afín, esto significa que las coordenadas de (x^*, y^*) se pueden escribir de forma lineal en términos de las de (x, y). Con esto, las ecuaciones que caracterizan tal transformación afín son:

$$x^* = ax + by + r$$
$$y^* = cx + dy + s$$

Ahora bien, si $r = s = 0$, tales ecuaciones adoptan la forma de una transformación lineal:

$$x^* = ax + by$$
$$y^* = cx + dy$$

Las cuales se representan en notación matricial así:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para convencernos de ello basta multiplicar las dos matrices del lado derecho de la igualdad y atender a la definición de igualdad de matrices.

Sean V y W dos espacios vectoriales. Una **transformación lineal** de V en W es una función $T:V\to W$ tal que para cualesquiera vectores u y v de V y cualquier escalar k:

$$T(u+v)=T(u)+T(v)$$
$$T(ku)=kT(u)$$

Aquí hemos denotado los vectores con las etiquetas u y v. Por comodidad hemos suprimido las flechas que acompañan a la notación convencional.

Veamos unos ejemplos elementales.

Consideremos a $V=W=\mathbb{R}$. Definamos la función $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por la regla $T(x)=0$. Afirmamos que T es una transformación lineal. Para comprobarlo debemos mostrar que se verifican las dos condiciones descritas en la definición anterior. En efecto, para dos vectores cualesquiera x e y (en este caso, son números reales) se tiene que:

$$T(x+y)=0=0+0=T(x)+T(y)$$

y además

$$T(kx)=0=k\cdot 0=kT(x)$$

Esta transformación se conoce como la **transformación lineal cero** de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Otro ejemplo es el que sigue: sea el espacio vectorial de las funciones polinómicas con coeficientes reales, es decir, $\mathbb{R}[x]$. Definamos la función $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que a cada polinomio $p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_jx^j+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ le asigna el número real $Dp(x)=1a_1+2a_2x^1+\cdots+ja_jx^{j-1}+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}$. La cual se denomina transformación **derivación**. Veamos que es una transformación lineal.

En primer lugar, escribimos los polinomios $p(x)$ y $q(x)$:

$$T(p(x)+q(x))=T\left(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+b_0+b_1x^1+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n\right)$$

Seguidamente, los sumamos agrupando sus términos semejantes:

$$=T\left((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n\right)$$

Luego aplicamos la transformación dada:

$$=1(a_1+b_1)x^{1-1}+2(a_2+b_2)x^{2-1}+\cdots+n(a_n+b_n)x^{n-1}$$

Desagrupamos y asociamos convenientemente:

$$=1a_1+2a_2x^1+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}+1b_1+2b_2x^1+\cdots+(n-1)b_{n-1}x^{n-2}+nb_nx^{n-1}$$

Finalmente, podemos expresar esta adición como la suma de las transformaciones $T(p(x))$ y $T(q(x))$:

$$=T(p(x))+T(q(x))$$

Aún nos resta comprobar la otra condición:

$$\begin{aligned}T(kp(x))&=T\left(k\left(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right)\right)\\&=T\left(ka_0+ka_1x^1+ka_2x^2+\cdots+ka_{n-1}x^{n-1}+ka_nx^n\right)\\&=1ka_1+2ka_2x^1+\cdots+(n-1)ka_{n-1}x^{n-2}+kca_nx^{n-1}\\&=k\left(1a_1+2a_2x^1+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}\right)\\&=kT(p(x))\end{aligned}$$

Aquí multiplicamos el escalar k por el polinomio $p(x)$, luego aplicamos la transformación, sacamos factor común k y observamos que el otro factor es precisamente $kT(p(x))$.

Un tercer ejemplo: en el caso que expusimos al comienzo de esta sección, el espacio vectorial V se identifica con el plano, y además, V es igual a W, simbólicamente: $V=W=\mathbb{R}^2$. Y la transformación geométrica es una función $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por la regla:

$$T(x,y)=(x^*,y^*)=(ax+by,cx+dy)$$

Y es lineal, pues para cualesquiera puntos (x,y) y (z,w):

$$\begin{aligned}T((x,y)+(z,w))&=T(x+z,y+w)\\&=(a(x+z)+b(y+w),c(x+z)+d(y+w))\\&=((ax+by)+(az+bw),(cx+dy)+(cz+dw))\\&=(ax+by,cx+dy)+(az+bw,cz+dw)\\&=T(x,y)+T(z,w)\end{aligned}$$

Además, para un escalar k cualquiera:

$$
\begin{aligned}
T\left(k\left(x,y\right)\right) &= T\left(kx,ky\right) \\
&= \left(akx+bky, ckx+dky\right) \\
&= \left(k\left(ax+by\right), k\left(cx+dy\right)\right) \\
&= k\left(ax+by, cx+dy\right) \\
&= kT\left(x,y\right)
\end{aligned}
$$

Aquí multiplicamos el escalar k por el vector (x,y), aplicamos la transformación, sacamos factor común k en cada coordenada, aplicamos la definición de la multiplicación por un escalar y, finalmente, notamos que la penúltima expresión tiene la forma $kT(x,y)$.

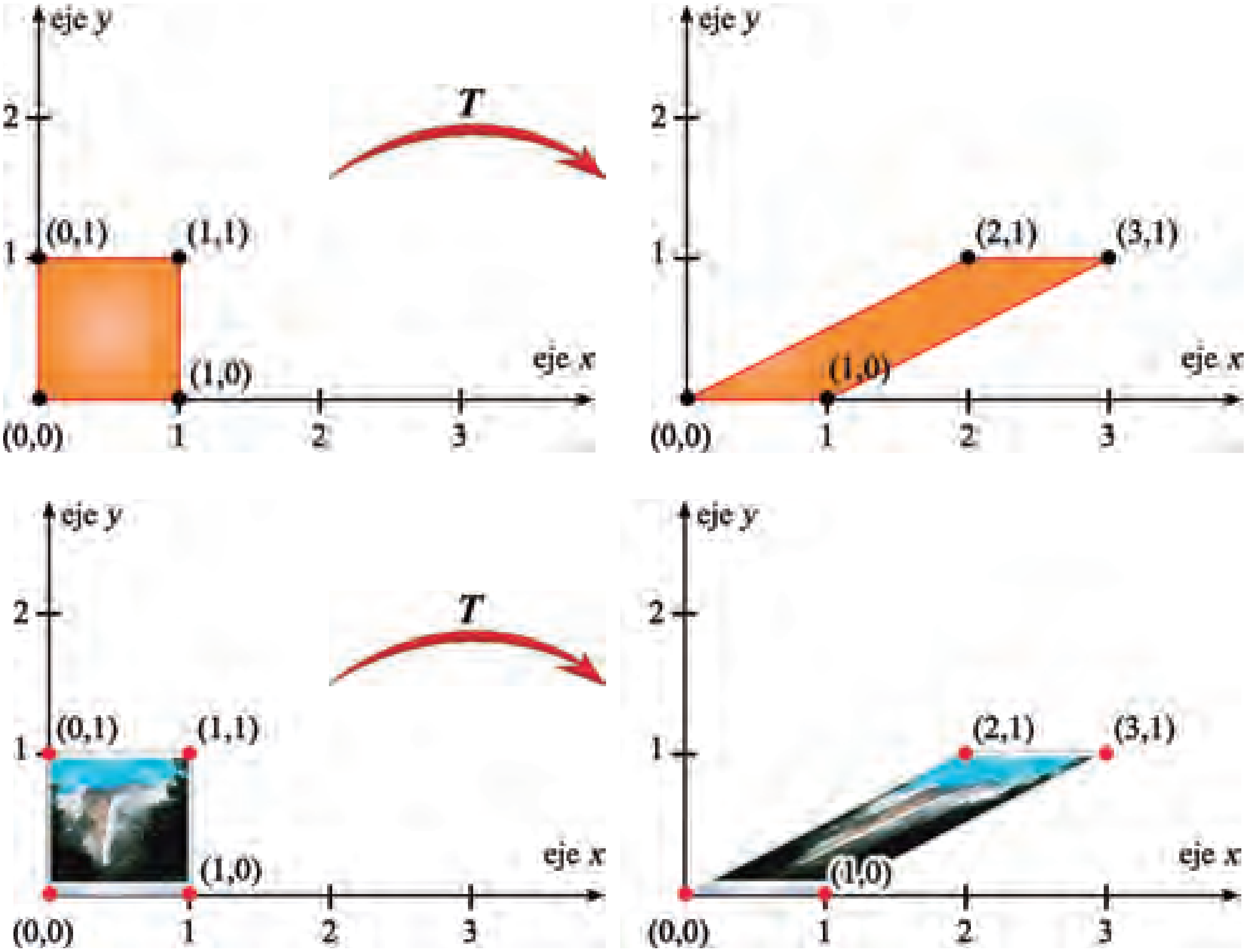


Gráfico 1. El empuje horizontal de un cuadrado (arriba) y una fotografía (abajo)

Habiendo ya probado que esta trasformación es lineal podemos estudiar la interpretación geométrica de esta función. Para ello, supongamos que la matriz de coeficientes en $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Y T adopta la forma:

$$T(x,y) = (1x + 2y, 0x + 1y) = (x + 2y, y)$$

Así que para un cuadrado o una fotografía, por ejemplo, esta transformación lineal se corresponde con un **empuje** de ésta en dirección horizontal, tal como se aprecia en el *gráfico* 1.

Una transformación de este tipo aplicada a una fotografía se llama **sesgo horizontal**.

Fíjense que el punto $(0,0)$ permanece invariante con la transformación lineal, es un **punto fijo**. El punto $(1,0)$ tiene por imagen al punto $(1,0)$ –también es invariante, el punto $(0,1)$ tiene por imagen a $(2,1)$. Y la imagen de $(1,1)$ es $(3,1)$. En efecto:

$$T(0,0) = (1\cdot 0 + 2\cdot 0, 0\cdot 0 + 1\cdot 0) = (0,0)$$

Naturalmente hemos mostrado solo las imágenes de los vértices del paralelogramo dado, ello nos da una idea clara de la transformación de esta figura. Pero deben tener presente que existen infinitos puntos en el paralelogramo e infinitas imágenes asociadas a éstos.

Ya estamos en condiciones de exponer algunas de las propiedades de las transformaciones lineales. Consideremos, en lo que sigue, dos espacios vectoriales V y W, y T una transformación lineal cualquiera de V en W.

La imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W, es decir:

$$T(0) = 0$$

Nutria

Una observación previa: el 0 en el argumento de T es el neutro aditivo en V, en cambio, el 0 en el lado derecho de la igualdad es el neutro aditivo en W. Si $V \neq W$, entonces estos ceros son distintos.

Para demostrar esta propiedad consideramos un vector cualquiera en V y calculamos su imagen a través de T, pero como $v = v + 0$, podemos escribir:

$$T(v) = T(v+0)$$

Y sabiendo que T es una transformación lineal:

$$T(v) = T(v+0) = T(v) + T(0)$$

Ya con esto, con base en la ley de cancelación, esta igualdad implica que:

$$0 = T(0)$$

Esto completa la demostración.

Es por esta propiedad que el punto $(0,0)$ ha quedado invariante a través de la T que definimos.

La imagen del opuesto de todo vector de V es el opuesto de su imagen, simbólicamente:

$$T(-v) = -T(v)$$

Para demostrar esta propiedad escribimos la imagen del vector 0 de V:

$$0 = T(0) = T(v + (-v)) = T(v) + T(-v)$$

Esto garantiza que los sumandos en la última expresión son opuestos, esto es:

$$-T(v) = T(-v)$$

Las transformaciones lineales preservan las combinaciones lineales, esto es, para cualquier n de $\mathbb{N}$:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T\left(v_i\right)$$

Les proponemos investigar sobre el método de inducción completa necesario para demostrar esta propiedad.

Ahora bien, sabemos que $T: V \to W$ es una transformación lineal si, y solo si, la aplicación T satisface las condiciones expuestas en la definición dada al comienzo de la lección. Pero nada adicional se exige a la aplicación T. Diremos entonces que:

- T es un monomorfismo si, y solo si, T es inyectiva.
- T es un epimorfismo si, y solo si, T es sobreyectiva.
- T es un isomorfismo si, y solo si, T es biyectiva.

Adicionalmente, si $V = W$, la transformación T se denomina **endomorfismo**; si este endomorfismo es biyectivo se llama entonces **automorfismo**. En otras palabras, un automorfismo es una transformación lineal biyectiva de un espacio vectorial en el mismo espacio vectorial.

La transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la regla $T\left(x, y\right) = \left(x^*, y^*\right) = \left(ax + by, cx + dy\right)$, el ejemplo del sesgo horizontal de la fotografía, es un endomorfismo, lo que significa que es una transformación lineal del espacio $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.

También resulta interesante pensar en qué transformación generó cierta imagen. Por ejemplo, dados sesgos que mostramos a continuación, les proponemos deducir la matriz de coeficientes y la transformación T correspondiente a cada caso. Conversen sus ideas con sus compañeras y compañeros.

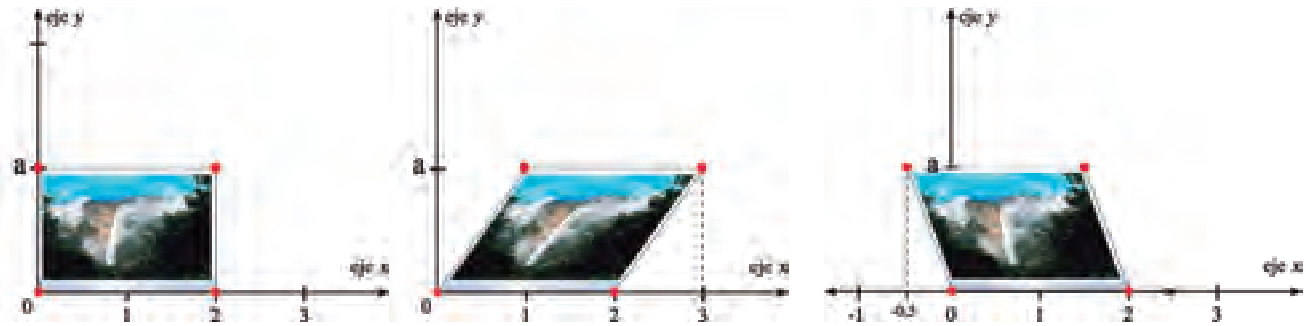


Gráfico 2. Tres sesgos horizontales asociados a tres transformaciones lineales

Por otra parte, desde ciertos gráficos podemos estudiar si la función que le dio origen es una transformación lineal o no. Pongamos por caso el que sigue (vean el *gráfico* 3). Aquí notamos que el módulo del vector u es la mitad del módulo del vector v. Y luego de la transformación T, el módulo del vector imagen de u es dos tercios del módulo del vector imagen de v. Esta información es suficiente para responder el planteamiento dado. ¿Por qué? Lo que acabamos de expresar se escribe simbólicamente así:

$$u = \frac{1}{2}v$$

y además

$$T(u) = \frac{2}{3}T(v)$$

Si T fuese lineal entonces debería suceder que $T(u) = T\left(\frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}T(v)$. Pero esto no se cumple, en consecuencia, T no es lineal.

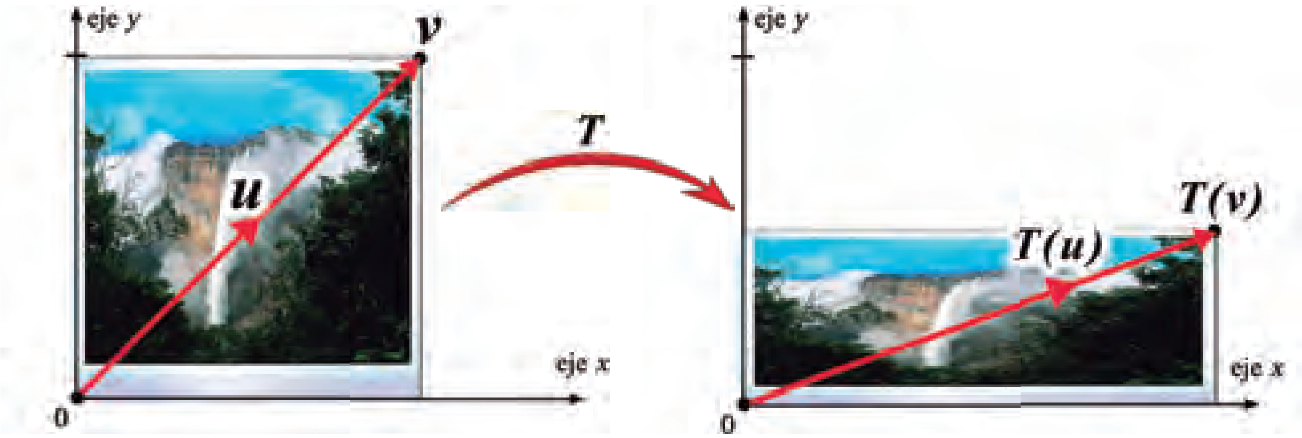


Gráfico 3. Una transformación que no es lineal

La propiedad que sigue es sumamente importante.

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces el conjunto $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de la imagen de T.

Nota: la imagen de T, $Im(T)$, es el conjunto de todas las imágenes a través de T.

Una **base** de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes ($l.i.$) que generan a todo el espacio. La **dimensión** de un espacio vectorial es el número de vectores que hay en la base. Por ejemplo, una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es el conjunto $B=\{(1,0),(0,1)\}$ pues los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ son $l.i.$, y además, cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de éstos; efectivamente, si v es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ entonces:

$$v=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$

Así, la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2.

Como advertirán, ésta no es la única base que genera a $\mathbb{R}^2$, existen otras, más bien infinitas.

El teorema dado nos dice que si un conjunto de vectores es $l.i.$ en V, y además, generan a V, entonces las imágenes de tales vectores son $l.i.$ en W, y generan a la imagen de T. Ésta será la estructura de la demostración.

Sea w un vector de W que está en la imagen de T. En tal caso, debe existir un vector v en V que verifique $T(v)=w$. Como B es una base de V, el vector v es una combinación lineal de los v_i. Así, hay escalares k_i, tales que:

$$v=k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n$$

Ahora aplicamos la transformación lineal T:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n) \\ &= T(k_1v_1)+T(k_2v)+\cdots+T(k_nv_n) \end{aligned}$$

Lo que garantiza que $T(v)=w$ es combinación lineal de los vectores $T(k_iv_i)$, con $1\leq i\leq n$. Esto significa que si w está en la imagen de T, entonces w está generado por $T(B)$. Llamemos a este resultado (1).

Por otra parte, si w es generado por $T(B)$, deben existir escalares k_i, tales que:

$$w=k_1T(v_1)+k_2T(v_2)+\cdots+k_nT(v_n)$$

Y como T es lineal:

$$w = T\left(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n\right)$$

donde su argumento está en V (por ser un espacio vectorial). En consecuencia, w está en la imagen de T. Este resultado lo llamamos (2).

Por (1) y (2), concluimos que el conjunto imagen de T es igual al espacio generado por $T\left(B\right)$. Y el teorema está demostrado.

El **núcleo de T**, denotado por $N\left(T\right)$, es el conjunto $N\left(T\right) = \left\{v \in V : T\left(v\right) = 0\right\}$.
El núcleo suele denominarse también *kernel de T*.

Por ejemplo, en la transformación que representa el sesgo horizontal de la fotografía, el núcleo adopta la forma:

$$N\left(T\right) = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : T\left(x, y\right) = \left(x + 2y, y\right) = \left(0, 0\right)\right\}$$

Pues así definimos a T en aquella ocasión. Además, el vector 0 en $\mathbb{R}^2$ posee la forma $\left(0, 0\right)$. Ello nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Lo cual es inmediato. Aquí $x = y = 0$. Como este sistema tiene una única solución hay un único elemento en el núcleo de T, precisamente el vector $\left(0, 0\right)$. Y podemos escribir:

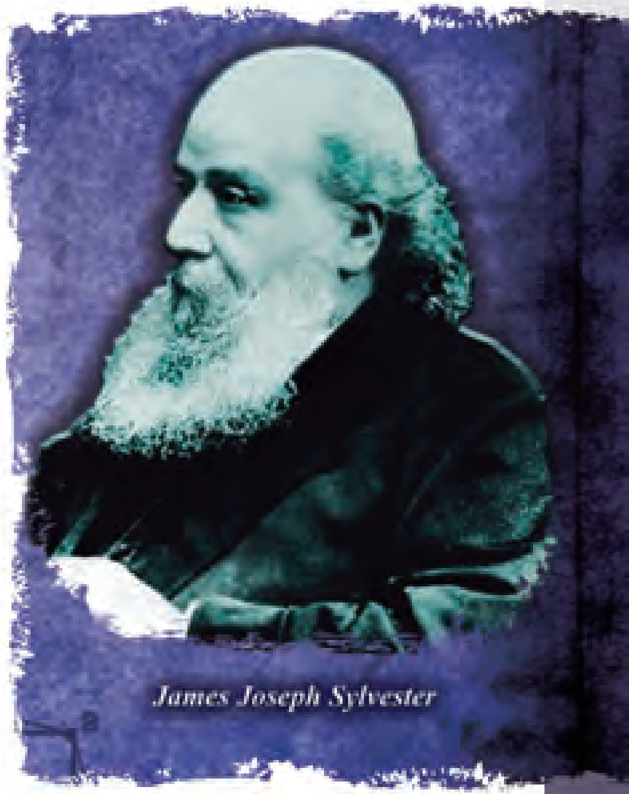
$$N\left(T\right) = \left\{\left(0, 0\right)\right\}$$

Pero en el caso de la transformación **cero**, el núcleo de T es todo el espacio vectorial V (el dominio de T). Ustedes deben argumentar el por qué de esta afirmación. El núcleo de una transformación lineal T entre espacios vectoriales y la imagen de T son en sí mismo espacios vectoriales. Les invitamos a investigar y discutir sobre estas dos propiedades.

Otra propiedad importante se conoce como el Teorema de **Sylvester**, veamos.

Teorema (de Sylvester). Sean V y W dos espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$dim\ V = dim\ N(T) + dim\ Im\ (T)$$


James Joseph Sylvester

La dimensión de un espacio vectorial V de dimensión finita es la suma de las dimensiones del núcleo de T y de la imagen de T.

Por ejemplo, sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal definida por:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & x+y \\ x+y & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $dim\,\mathbb{R}^2 = 2$. Si deseamos conocer $dim\,Im\,(T)$, una vía es aplicar el Teorema de Sylvester, esto es, requerimos conocer $dim\,N(T)$:

$$N(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Pero, $\begin{bmatrix} 0 & x+y \\ x+y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ solamente cuando $y = -x$. Por esta razón:

$$N(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{(x,-x) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Ahora bien, este espacio vectorial es generado por un único vector, por ejemplo, por $(1,-1)$. En consecuencia, la dimensión del núcleo de T es 1.

Y de acuerdo con el Teorema de Sylvester:

$$dim\ Im\ (T) = dim\ V - dim\ N(T) = 2 - 1 = 1$$

De hecho:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(x, y)\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x+y \\ x+y & 0 \end{bmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x+y) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Con esto vemos que el vector $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ genera al espacio vectorial $Im(T)$.

Hasta ahora hemos mostrado transformaciones que se asocian con sesgos horizontales del plano (que ilustramos con la idea de la fotografía). Una pregunta natural en este punto es si los sesgos verticales son o no transformaciones lineales –ello se propone como actividad al final de esta lección. Ahora bien, **¿las rotaciones del plano son transformaciones lineales?** Tal transformación asocia al punto P un punto Q que se obtiene de rotar a P alrededor del origen con un ángulo fijo θ en el sentido contrario a las agujas del reloj; esto es,

$$T_\theta(P) = Q$$

El subíndice θ indica que en la transformación se ha fijado este ángulo. El *gráfico* 4 muestra esta idea. En él apreciamos que $OQ = OP = r$, ya que el giro deja invariante la distancia de un punto y su imagen con respecto al origen. Pero, ¿cuál es la forma explícita de la transformación T? Notemos que $cos\,\alpha = \frac{x_1}{r}$, $sen\,\alpha = \frac{y_1}{r}$. Además $cos\,\beta = \frac{x_2}{r}$, $sen\,\beta = \frac{y_2}{r}$. Estas cuatro expresiones son equivalentes a $x_1 = r\,cos\,\alpha$, $y_1 = r\,sen\,\alpha$, $x_2 = r\,cos\,\beta$, y $y_2 = r\,sen\,\beta$. Otra información importante es que $\beta = \alpha + \theta$. Por tanto, basándonos en las fórmulas elementales del seno y del coseno para la suma de ángulos:

$$\begin{aligned} cos\,\beta &= cos\,\alpha\, cos\,\theta - sen\,\alpha\, sen\,\theta \\ sen\,\beta &= sen\,\alpha\, cos\,\theta + cos\,\alpha\, sen\,\theta \end{aligned}$$

En consecuencia podemos escribir:

$$\begin{aligned} x_2 &= r\cos\beta \\ &= r\left(\cos\alpha\cos\theta - sen\,\alpha\, sen\,\theta\right) \\ &= \cos\theta\left(r\cos\alpha\right) - sen\,\theta\left(r\,sen\,\alpha\right) \\ &= \cos\theta\, x_1 - sen\,\theta\, y_1 \end{aligned}$$

Oso Frontino

Y, por otra parte,

$$\begin{aligned} y_2 &= r\,sen\beta \\ &= r\left(sen\alpha\cos\theta + \cos\alpha\, sen\theta\right) \\ &= \left(r\,sen\alpha\right)\cos\theta + \left(r\cos\alpha\right)sen\theta \\ &= y_1\cos\theta + x_1 sen\theta \\ &= sen\theta\, x_1 + \cos\theta\; y_1 \end{aligned}$$

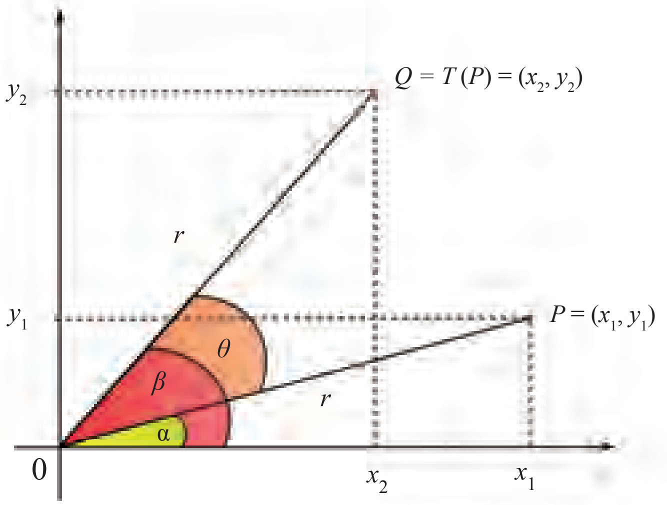


Gráfico 4

Con todo esto, la forma explícita de la transformación lineal T es:

$$T\left(x_1, y_1\right) = \left(x_2, y_2\right) = \left(\cos\theta\, x_1 - sen\theta\, y_1\,, sen\theta\, x_1 + \cos\theta\; y_1\right)$$

que es lineal, pues tiene la estructura de las transformaciones afines:

$$\begin{aligned} x^* &= ax + by + r \\ y^* &= cx + dy + s \end{aligned}$$

pero con $r = s = 0$.

En resumen, las rotaciones del plano que dejan invariante al punto origen son transformaciones lineales.

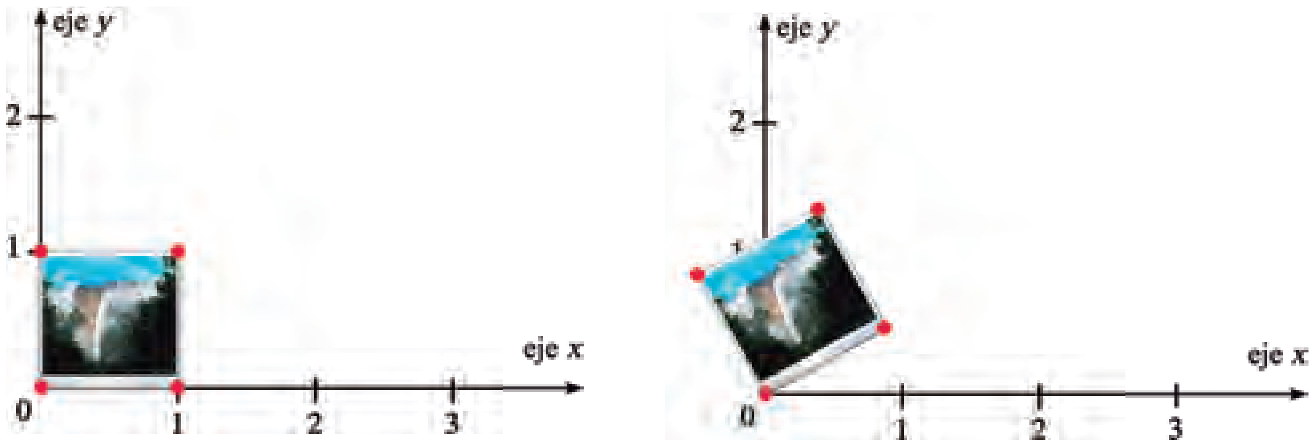
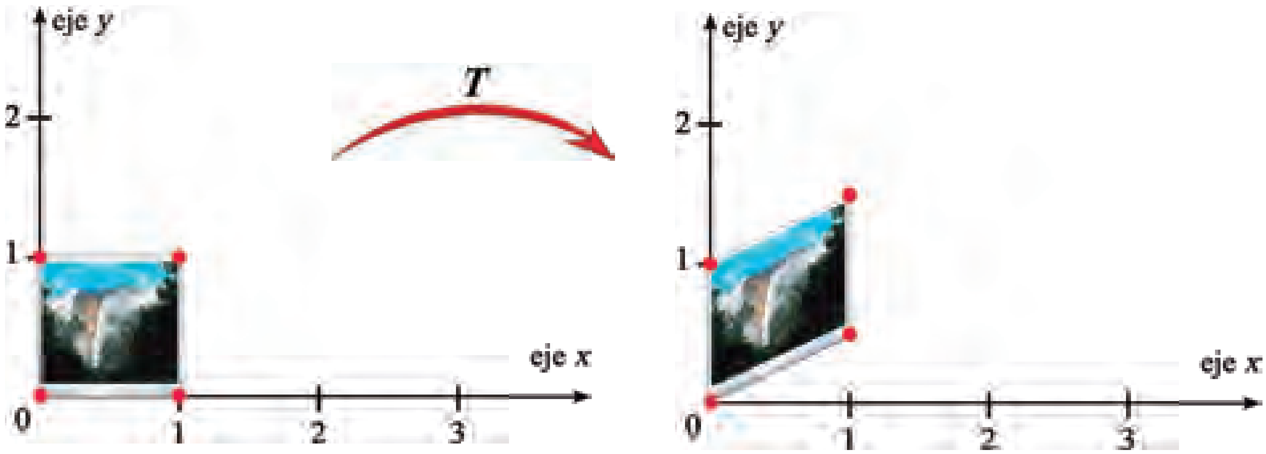


Gráfico 5. Este tipo de rotación se vincula con una transformación lineal

Actividades

1 ¿Es la siguiente transformación lineal? Si la respuesta es no, argumenten por qué. En cambio, si la respuesta es sí, encuentren la transformación lineal y la matriz de coeficientes.



2 Encuentren la transformación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0)=(8,-3)$ y $T(0,1)=(-1,-5)$.

3 Repitan la actividad anterior pero esta vez con las condiciones: T va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,-1)=(1,0)$, $T(-1,1,0)=(0,1)$ y $T(0,1,1)=(1,1)$.

4 ¿Qué representan las transformaciones planteadas en (3)?

5 Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$. La función $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,x_2-x_3)$$

es una transformación lineal [verifíquese]. ¿Cuál es su interpretación geométrica?

6 Investiguen si las siguientes funciones representan transformaciones lineales:

- Sean V y W dos espacios vectoriales y $T:V\to W$ definida por $T(x)=1$.
- $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $T(x)=ax+b$.
- $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $T(x_1,x_2)=x_1x_2$.
- $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1,x_2)=(x_2,2x_1-x_2)$.

- $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = (x, 2x)$.
- $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$.

7) Demuestren que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & x+y \\ x+y & 0 \end{bmatrix}$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es una transformación lineal. ¿Es T inyectiva o sobreyectiva?

8) En cada caso hallen una base para $Im(T)$ y $N(T)$, y comprueben el teorema de Sylvester:

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ definida por } T(x) = (x, 2x)$$

9) Investiguen qué otras aplicaciones tienen las transformaciones lineales en áreas como la Física, Química, Biología, Electricidad, e incluso, en la Informática y Computación. Además, preparen una exposición en su Liceo así como en otros espacios de la comunidad.

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Antonio Ornés Díaz (1874-1958)

Este ilustre venezolano nació el 16 de noviembre de 1874 en la población de El Valle (actualmente una parroquia de Caracas) pero que para la época era un pueblo cercano a la capital de Venezuela. Antonio era hijo primogénito de Félix Ornés Sosa y de Luisa Díaz León.

Sus primeros estudios los realizó en un plantel local, era lo que en ese entonces se conocía como escuela de primeras letras. Posteriormente, pasó a la secundaria bajo la tutela del insigne ingeniero Agustín Aveledo, quien regentaba el famoso Colegio "Santa María", situado en las cercanías de la Plaza Bolívar de Caracas.

Desde muy temprano mostró una gran vocación por la Matemática, la cosmografía y la astronomía. Para esa época la única posibilidad de seguir estudios superiores en esas áreas del conocimiento estaba en cursar ingeniería. En consecuencia Antonio Ornés se inscribió en la Universidad Central de Venezuela (UCV) para seguir dicha carrera, estudios que en enero de 1895 son separados de nuestra máxima institución universitaria pasando a ser la Escuela de Ingeniería independiente de la UCV.

Según afirma Carrera Domínguez (1993), Ornés culminó la escolaridad en 1898, aunque por razones económicas no pudo adquirir el título que le acreditara como ingeniero.

También nuestro biografiado adquirió profundos conocimientos de filosofía y literatura. Fue un destacado educador y científico. En 1898 dicta cátedra en el Liceo San José de Los Teques. Allí enseña Filosofía, Cosmografía y Trigonometría.

En la población de Tucupido (Estado Guárico) fue profesor y Director de un Colegio patrocinado por la Logia Masónica.

También fue docente de Filosofía y de Matemática en la Escuela Militar de Venezuela.

Fue profesor desde inicios del siglo XX en la Escuela Politécnica (actual Liceo "Andrés Bello"), encargándose de la enseñanza de Cosmografía y de Astronomía, laborando allí hasta 1945. Por esos tiempos también era profesor del Colegio "Santa María" de Lola de Fuenmayor, que aunque de igual nombre no era el mismo dónde él había cursado su bachillerato.

Dado que poseía grandes conocimientos en astronomía participó en 1910 en la comisión que levantó el primer mapa físico y político de Venezuela, en calidad de topógrafo.

En 1922 ocupa el cargo de adjunto del Observatorio Cagigal, institución en la cual se venía desempeñando desde 1918. Como adjunto, entre otras labores allí desarrolladas, estaba el encargarse del registro de las observaciones meteorológicas encomendadas al Observatorio. Es luego designado Subdirector del mismo, cargo que detentó hasta 1932, año en que renuncia al puesto.

En 1910 estuvo muy pendiente del paso del cometa Halley. Además del estudio de los aspectos astronómicos de interés por el paso del cometa, Ornés ayudó a la divulgación del conocimiento explicando de manera científica el significado y características de estos cuerpos celestes y desmitificando su aparición, combatiendo las supersticiones tan arraigadas y las creencias apocalípticas que se tejieron alrededor de este hecho, de las cuales lamentablemente se hicieron eco muchos medios de comunicación de la época.

Asimismo, muchos años después, ante supuestos avistamientos de ovnis sobre los cielos venezolanos, particularmente en Caracas, Ornés no duda en calificar tales aseveraciones como ilusiones.

Sobre los aspectos climáticos realizó una amplia labor divulgativa, publicando durante mucho tiempo una columna sobre pronósticos del tiempo en el diario "El Universal" de Caracas.

Adicionalmente se dedicó a labores vinculadas con el conservacionismo y la salud. También ocasionalmente produjo algunos escritos de corte literario.

El 15 de enero de 1946 recibió la Medalla de Honor de la Instrucción Pública, como reconocimiento a su larga y fructífera labor docente.

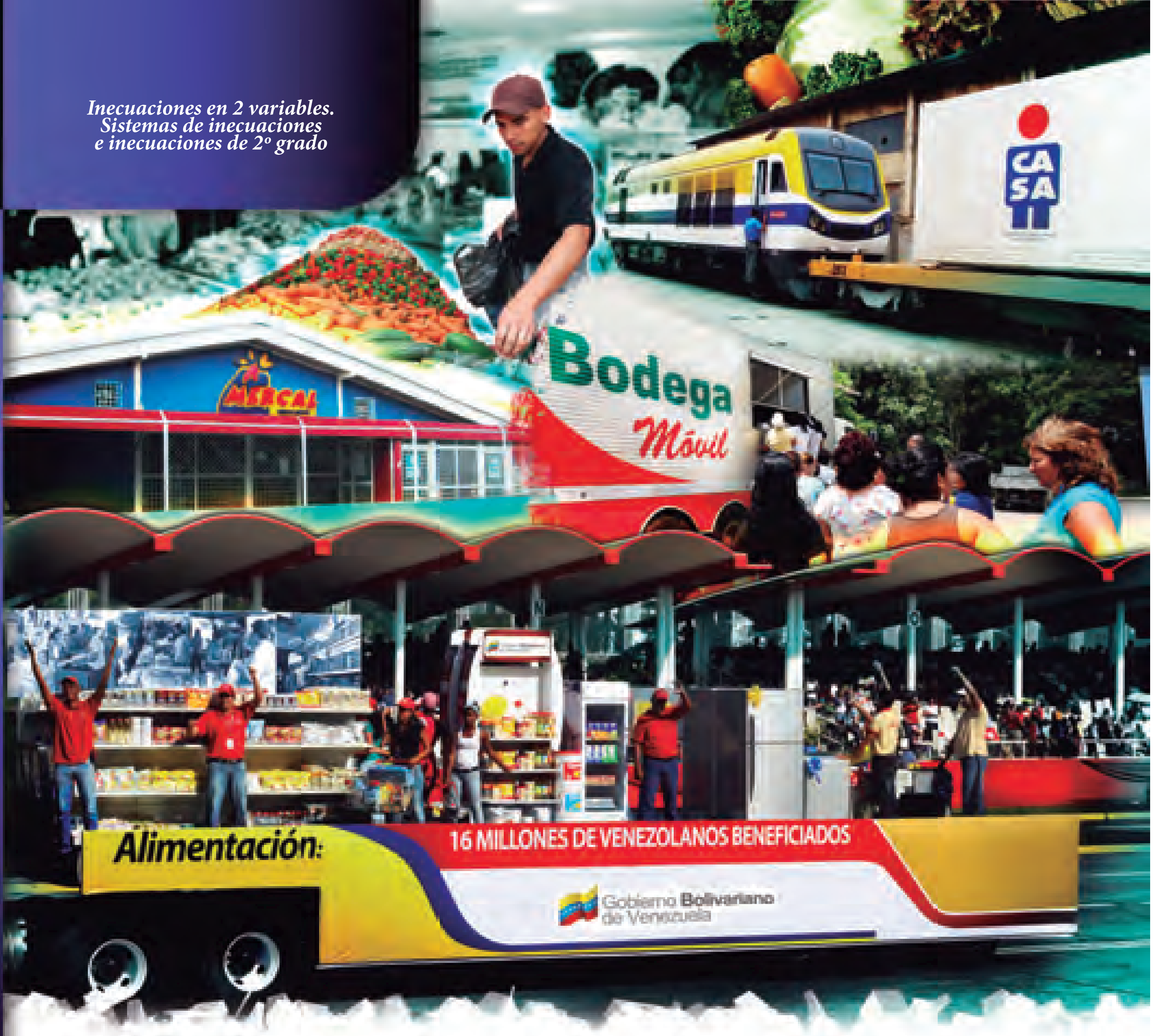
Asimismo, en la ciudad de Caracas, específicamente en el Sector Los Cujicitos (Cotiza), hay actualmente una escuela distrital la cual en su honor lleva el nombre de Antonio Ornés. Este plantel escolar fue fundado el 15 de enero de 1947.

Antonio Ornés fallece en Caracas el 1° de diciembre de 1958.

7

Inecuaciones en 2 variables. Sistemas de inecuaciones e inecuaciones de 2º grado

Sobre la toma de decisiones



Los modelos matemáticos para la toma de decisiones

Buena parte de nuestras acciones diarias, tanto individuales como colectivas, ameritan tomar decisiones que sobrepasan el alcance de la intuición, las cuales requieren un análisis cuidadoso de las opciones con las que contamos. La Matemática nos aporta diversos instrumentos que pueden sustentar esta tarea, tal es el caso de la **programación matemática**. Este modelo proporciona una visión cuantitativa acerca del problema y la mejor decisión posible. En nuestro caso, programación se entenderá como la mejor combinación de valores que pueden tomar las variables que intervienen en la situación en estudio.

En ciertos problemas, para seleccionar una opción, deben verificarse varias condiciones al mismo tiempo, justo la idea que seguiremos a lo largo de esta lección.

Estudiaremos entonces algunos problemas, en el ámbito de la programación lineal, con la finalidad de ilustrar este modelo matemático como soporte para la toma de decisiones; aunque al final les propondremos problemas en otros contextos con el objeto de ampliar el panorama de aplicación de esta herramienta y método.

Transporte de alimentos

Una unidad productiva desea distribuir pescado y plátanos. Para ello cuentan con camiones de dos tipos: un camión, del tipo A, tiene un espacio refrigerado de $20\ m^3$ y un espacio no refrigerado de $40\ m^3$; el otro camión, del tipo B, posee una capacidad de $30\ m^3$ de refrigeración y $30\ m^3$ no refrigerados. Ellos desean transportar una cantidad de pescado equivalente a $300\ m^3$ y una cantidad de plátano que equivale a $400\ m^3$, y usar para ello ambos camiones. Si la asignación que se le da a cada conductor por viaje es de $Bs.\ 525$, ¿cuál es la menor cantidad de viajes que debe hacer cada camión para distribuir toda la producción a un costo mínimo? Esta pregunta es medular, y como advertirán se presenta en multiplicidad de situaciones cotidianas.

Para resolver este problema, organicemos esta información en una tabla que nos permita comprender la situación:

Tabla 1. Datos sobre el problema dado.

	Espacio refrigerado (m^3)	Espacio no refrigerado (m^3)
Camión tipo A	20	40
Camión tipo B	30	30
Requerimiento	300	400

Digamos que:

- x_1 : es el número de viajes que realiza el camión tipo x.
- x_2 : es el número de viajes que realiza el camión tipo y.

Entonces podemos establecer las siguientes relaciones, que en nuestro caso tienen que ver con las restricciones de capacidad de cada camión:

Con respecto al espacio **refrigerado** tenemos lo siguiente:

20 m^3 por cada viaje del camión tipo x

Necesitamos al menos 300 m^3

$$20x_1 + 30x_2 \geq 300$$

30 m^3 por cada viaje del camión tipo y

(Restricción 1)

Con respecto al espacio **no refrigerado** nos queda:

40 m^3 por cada viaje del camión tipo x

Necesitamos al menos 400 m^3

$$40x_1 + 30x_2 \geq 400$$

30 m^3 por cada viaje del camión tipo y

(Restricción 2)

Como el número de viajes que daría cada camión no puede ser negativo, pues no tiene sentido hablar de -1 viajes o -3 viajes, entonces x_1 y x_2 no toman valores negativos, es decir:

$$x_1 \geq 0 \quad y \quad x_2 \geq 0$$

(**Restricciones 3 y 4**)

Además de estos datos, sabemos que cada viaje en cualquiera de los camiones tiene un costo de $Bs.\ 525$. Podríamos entonces establecer una expresión para el costo de distribución de estos alimentos en función del número de viajes de cada camión. Veamos:

Costo en función del número de viajes de cada camión

Suma del número de viajes de cada camión

$$C(x_1, x_2) = 525 \cdot (x_1 + x_2)$$

Costo de cada viaje

A esta función la llamaremos **función a optimizar.**

También podemos escribirla así:

$$z = 525 \cdot (x_1 + x_2)$$

Donde z es un número que tomará el valor del costo calculado.

En nuestro caso, el valor óptimo del costo de distribución debe ser el mínimo. Por lo tanto, necesitamos **minimizar el valor de esta función**.

Podríamos escribir nuestro problema como sigue:

Encontrar los valores de x_1 y x_2 que minimizan $z = 525 \cdot (x_1 + x_2)$, sujeto a las restricciones:

1) $20x_1 + 30x_2 \geq 300$

2) $40x_1 + 30x_2 \geq 400$

3) $x_1 \geq 0$

4) $x_2 \geq 0$

Las expresiones en (1) y (2), se conocen como inecuaciones con dos variables.

Una desigualdad como la siguiente:

$$ax_1 + bx_2 < c, \quad con\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

o cualquier expresión de la forma anterior que, en lugar de la relación $<$, incluya a la relación $\leq$, se conoce con el nombre de **inecuación lineal de dos variables**.

Para resolver una inecuación lineal dos variables se deben encontrar todos los pares ordenados (x_1, x_2) para los cuales se cumple la desigualdad. Por lo tanto, **la solución de una inecuación lineal de dos variables tiene por representación gráfica una región del plano**.

Veamos como resolvemos la inecuación (1) de nuestro problema:

Debemos encontrar los puntos (x_1, x_2) tales que $20x_1 + 30x_2 \geq 300$. En un sistema de coordenadas, los valores de x_1 corresponden al eje x, y los valores de x_2 corresponden al eje y.

Primero describiremos el conjunto de puntos que satisfacen la igualdad $20x_1 + 30x_2 = 300$; esta expresión corresponde a una recta que "divide" al plano en dos regiones.

Como sabemos, para graficar la recta $20x_1 + 30x_2 = 300$, basta ubicar dos de sus puntos; en nuestro caso hallaremos los puntos de corte con los ejes: Para $x_1 = 0$, tenemos que: $20(0) + 30x_2 = 300 \Rightarrow 30x_2 = 300$.

Con lo cual $x_2 = \frac{300}{30} = 10$. Así, el punto $(0,10)$ está en la recta dada. Para $x_2 = 0$, tenemos que: $20x_1 + 30(0) = 300 \Rightarrow 20x_1 = 300$. Así, $x_1 = \frac{300}{20} = 15$. Por tanto, el punto $(15,0)$ está en la recta dada.

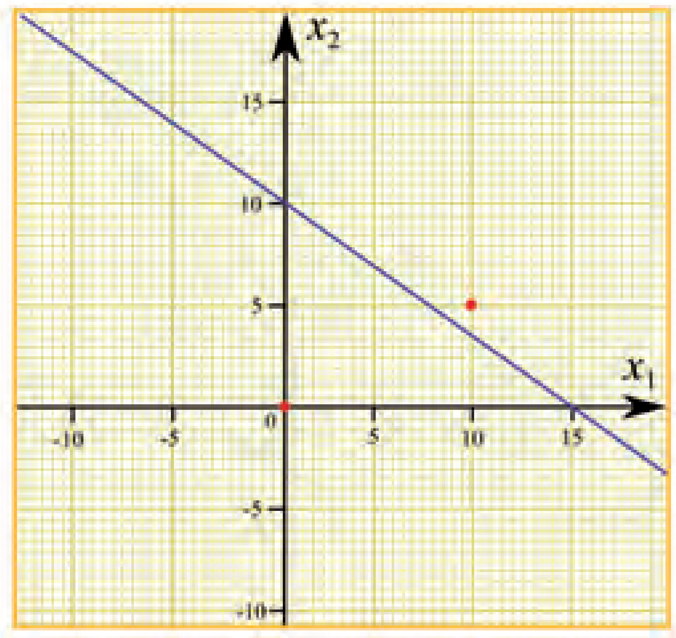


Gráfico 1. La recta $20x_1 + 30x_2 = 300$

La recta nos ha dividido el plano en dos regiones. Veamos cuál de las dos regiones satisface la inecuación. Tomemos un punto de cada región y evaluemos si cumple con la desigualdad o no.

Tomemos el punto $(0,0)$ que queda **por debajo** de la recta, tal como se observa en la gráfica anterior. Si sustituimos estos valores en la expresión de la inecuación tenemos:

$$20(0) + 30(0) \geq 300$$
$$0 \geq 300$$

Pero, **no es cierto que 0 es mayor o igual a 300**. En consecuencia, podemos inferir que los puntos que están debajo de la recta **no cumplen con la desigualdad**.

Ahora evaluemos el punto $(10,5)$ que está **por encima** de la recta, como pueden ver en la gráfica. Al sustituir estos valores en la inecuación nos queda:

$$20(10) + 30(5) \geq 300 \Rightarrow 200 + 150 \geq 300$$
$$350 \geq 300$$

Como vemos, este punto **sí cumple con la desigualdad**. Por lo que la región solución de la inecuación es la que se encuentra por encima de la recta.

Ahora hagan la prueba con otro par de puntos, que se encentren por encima o por debajo de la recta, y comprueben que nuestra conclusión acerca de la región solución de la inecuación es correcta.

La gráfica de la región solución es:

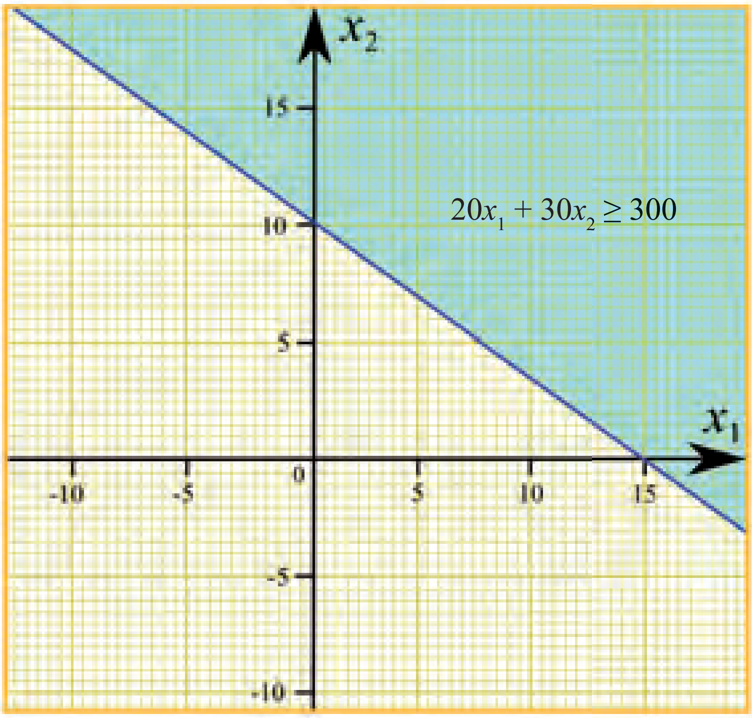


Gráfico 2. La región solución de la inecuación $20x_1 + 30x_2 \geq 300$

Ahora emplearemos el mismo procedimiento para obtener la región solución de la inecuación (2): $40x_1 + 30x_2 \geq 400$.

En primer lugar, hallemos el conjunto de puntos que satisface la igualdad $40x_1 + 30x_2 = 400$, que como vemos es la ecuación de una recta.

Para $x_1 = 0$, tenemos que: $40(0) + 30x_2 = 400 \Rightarrow 30x_2 = 400$.

Con esto podemos escribir que $x_2 = \dfrac{400}{30} \Rightarrow x_2 = \dfrac{40}{3}$.

Obtenemos entonces el punto $\left(0, \dfrac{40}{3}\right)$.

Para $x_2 = 0$, tenemos que: $40x_1 + 30(0) = 400 \Rightarrow 40x_1 = 400$.

Así, $x_1 = \dfrac{400}{40} \Rightarrow x_1 = 10$. Entonces, el punto $(10,0)$ está en la recta dada.

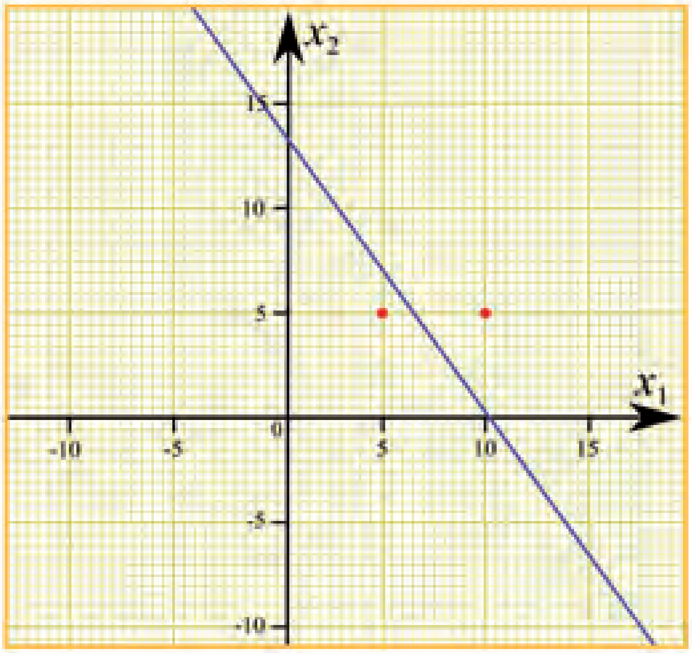


Gráfico 3. La recta $40x_1 + 30x_2 = 400$

Ahora que la recta ha dividido el plano en dos regiones, escogemos un punto de cada una para evaluarlo en la inecuación:

$$40x_1 + 30x_2 \geq 400$$

Tomemos el punto $(5,5)$, que se encuentra **debajo de la recta**. En este caso:

$$40(5) + 30(5) \geq 400 \Rightarrow 200 + 150 \geq 400$$
$$350 \geq 400$$

Pero **no es verdad que 350 es mayor o igual que 400**. De donde, esta región **no satisface la inecuación** planteada.

Sustituyamos ahora el punto $(10,5)$ que se encuentra **encima de la recta**:

$$40(10) + 30(5) \geq 400 \Rightarrow 400 + 150 \geq 400$$
$$550 \geq 400$$

Este punto **sí satisface la desigualdad** planteada. Entonces, podemos decir que esta región es solución de la inecuación.

Prueben con otro par de puntos que se encentren por encima o por debajo de la recta para comprobar que llegamos a la conclusión correcta acerca de la región solución de la inecuación.

Observen la gráfica solución de la inecuación $40x_1 + 30x_2 \geq 400$.

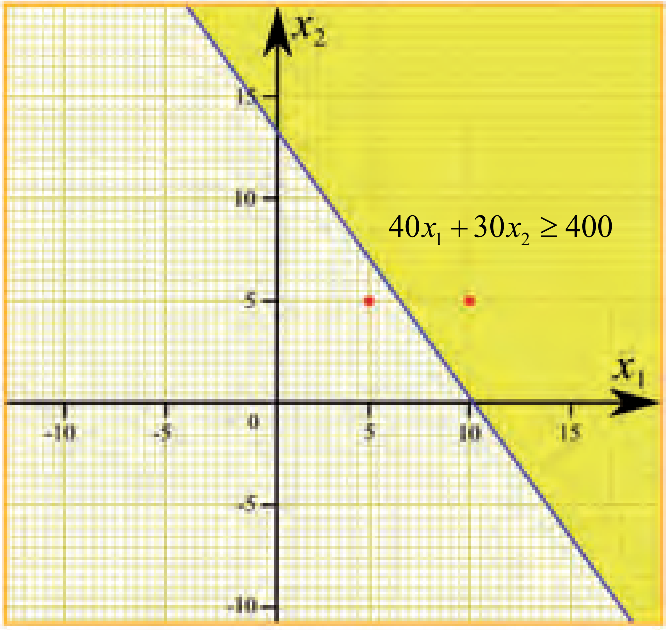


Gráfico 4. La región solución de la inecuación $40x_1 + 30x_2 \geq 400$

Hemos resuelto las dos inecuaciones que representan las restricciones 1 y 2 de nuestro problema. Pero debemos recordar que todas las restricciones deben cumplirse simultáneamente, por lo que debemos buscar la región del plano que cumpla con: (1) $20x_1 + 30x_2 \geq 300$, (2) $40x_1 + 30x_2 \geq 400$, (3) $x_1 \geq 0$, y (4) $x_2 \geq 0$ simultáneamente.

Para encontrar las soluciones simultáneas debemos intersecar las regiones.

La intersección de las regiones solución de 1 y 2 se puede observar en la siguiente gráfica:

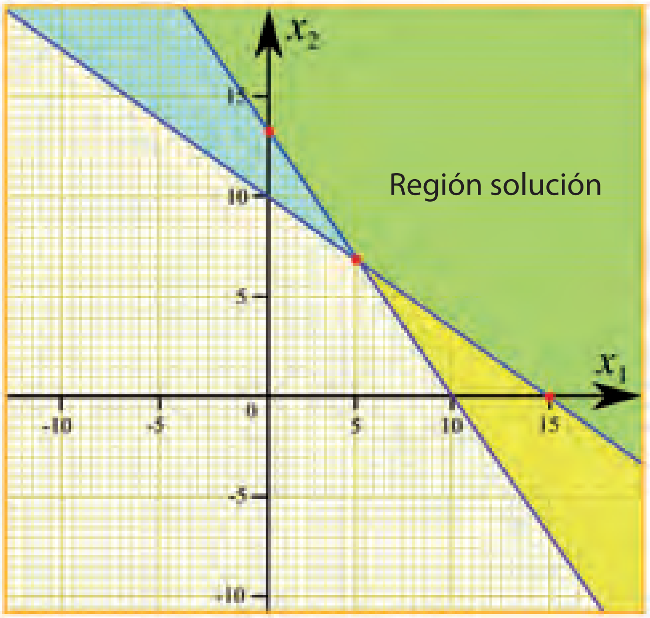


Gráfico 5. Intersección de las regiones solución de 1 y 2

Pero como sabemos, por las restricciones (3) $x_1 \geq 0$ y (4) $x_2 \geq 0$, esto implica que nuestra región del plano queda limitada al primer cuadrante (en el que ambas componentes de los puntos son positivas). Veamos:

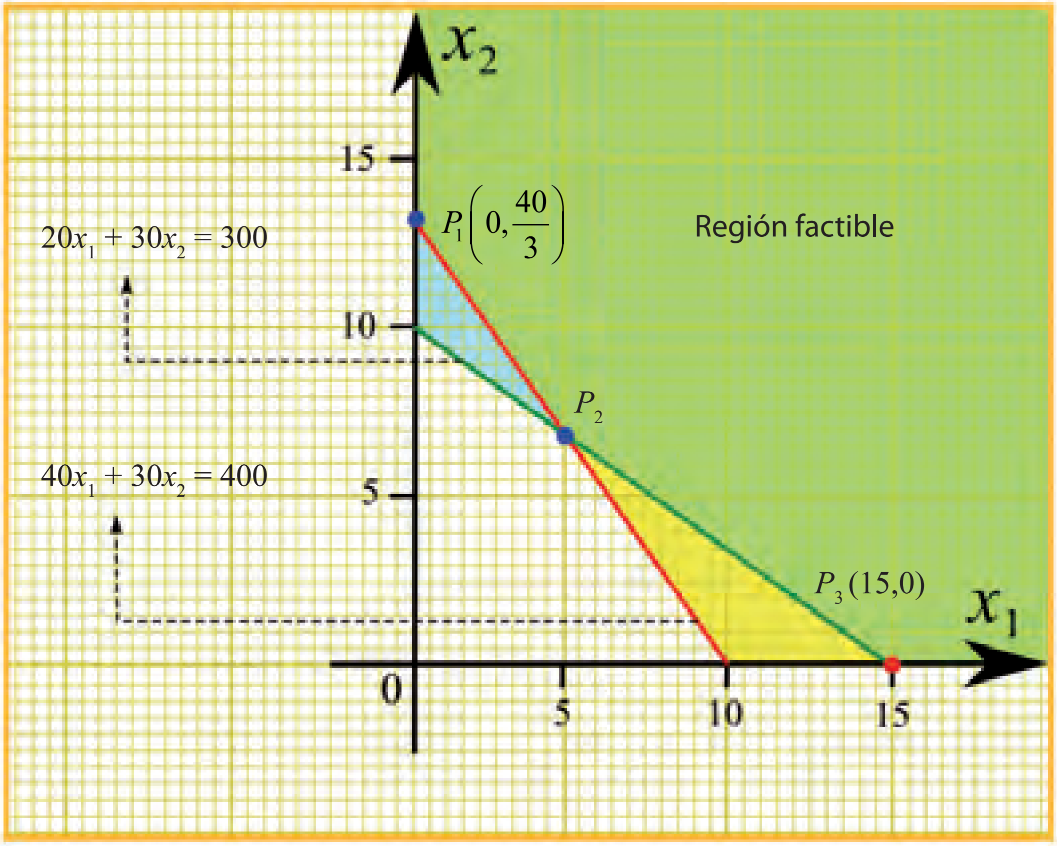


Gráfico 6. Intersección de las regiones solución de 1, 2, 3 y 4

Esta región del plano que satisface todas las restricciones del problema la llamaremos **región factible.**

Como ven, la región factible se encuentra acotada inferiormente por las rectas $20x_1 + 30x_2 = 300$, $40x_1 + 30x_2 = 400$, por el eje de las abscisas ($x_1 = 0$) y por el eje de las ordenadas ($x_2 = 0$). Mientras que superiormente no está acotada. Podemos observar que los puntos P_1, P_2 y P_3 son los **vértices de la región factible**. Es importante que conozcamos todos estos vértices pues debemos evaluar la función a **optimizar**, $z = 525 \cdot (x_1 + x_2)$, en cada uno de ellos.

En la gráfica 6 notamos que se conocen los vértices P_1 y P_3, sin embargo, no se conocen las coordenadas de P_2, solo sabemos que es el punto de intersección de las rectas $20x_1 + 30x_2 = 300$ y $40x_1 + 30x_2 = 400$. Pero esto es suficiente para hallar sus coordenadas.

Debemos entonces resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

Lo haremos empleando la reducción gaussiana (revisen las lecciones 4 y 5 de este libro):

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 = 300 \\ 40x_1 + 30x_2 = 400 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & 300 \\ 40 & 30 & 400 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & 300 \\ 40 & 30 & 400 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 : F_1 - F_2} \left[\begin{array}{cc|c} -20 & 0 & -100 \\ 40 & 30 & 400 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 : -\frac{1}{20} F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 40 & 30 & 400 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 : -40F_1 + F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 30 & 200 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 : \frac{1}{30} F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{3} \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = 5 \ y \ x_2 = \frac{20}{3}$$

Hemos obtenido las coordenadas del vértice que faltaba: $P_2\left(5, \frac{20}{3}\right)$.

Ahora vamos a evaluar la **función a optimizar**, la del costo de los viajes de los camiones, $z = 525 \cdot (x_1 + x_2)$, en los vértices de la región factible:

Para $P_1\left(0, \frac{40}{3}\right)$ nos queda:

$$z = 525 \cdot \left(0 + \frac{40}{3}\right)$$
$$= 525 \cdot \frac{40}{3} = \frac{21.000}{3}$$
$$= 7.000$$

Al sustituir $P_2\left(5, \frac{20}{3}\right)$, tenemos:

$$z = 525 \cdot \left(5 + \frac{20}{3}\right)$$
$$= 525 \cdot \frac{35}{3} = \frac{18.375}{3}$$
$$= 6.125$$

Por último, hallamos el valor de z para $P_3(15,0)$:

$$\begin{aligned} z &= 525\cdot(15+0) \\ &= 525\cdot 15 \\ &= 7.875 \end{aligned}$$

Recuerden que queremos minimizar el costo de distribución de los plátanos y el pescado, que en este caso está representado por z. Por lo tanto, el punto de la región factible que satisface todas las restricciones y nos da el menor valor, el **valor óptimo**, para z es $P_2\left(5,\frac{20}{3}\right)$.

Noten que estos valores de z dan origen a una familia de rectas que pasan por algunos puntos de la región factible, éstas son:

$$\begin{aligned} 525x_1 + 525x_2 &= 7.000 \\ 525x_1 + 525x_2 &= 6.125 \\ 525x_1 + 525x_2 &= 7.825 \end{aligned}$$

La gráfica de cada una se muestra de seguidas.

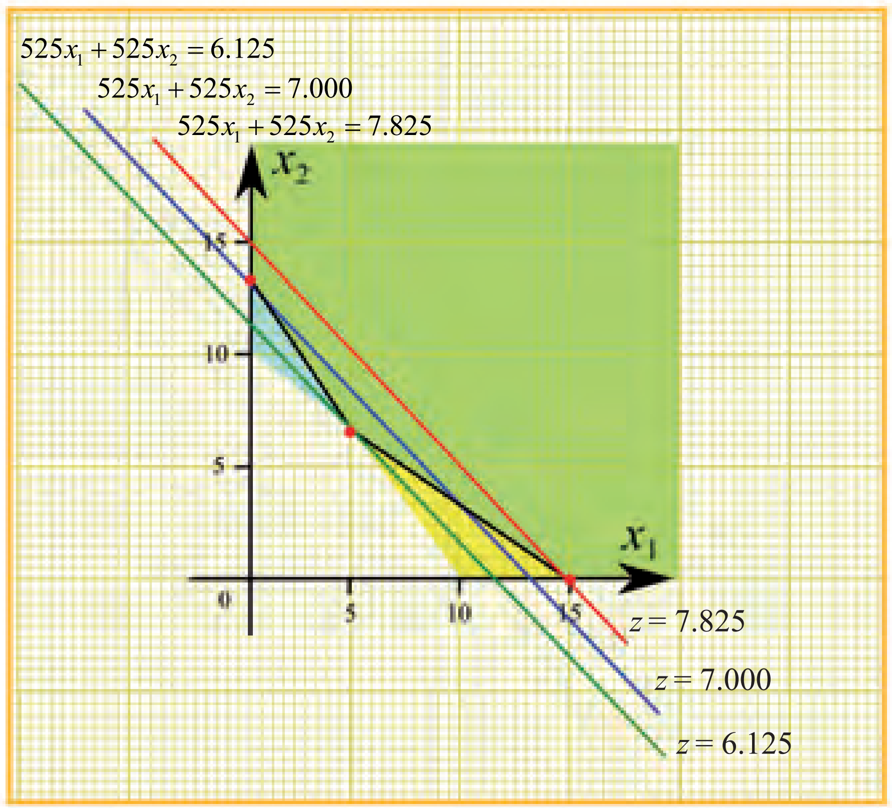


Gráfico 7. Rectas que pasan por los vértices de la región factible

El valor óptimo $z = 6.125$ se obtiene en el punto $P_2\left(5, \frac{20}{3}\right)$, en el que $x_1 = 5$ y $x_2 = \frac{20}{3} \approx 6,6$. Es decir, que el camión tipo x debe realizar 5 viajes, pero como obviamente el camión tipo y no puede realizar 6,6 viajes lo redondearemos a 7 viajes.

Debemos entonces recalcular el costo del transporte. Con estos datos nos quedaría:

$$x_1 = 5 \quad y \quad x_2 = 7 \;\Rightarrow\; z = 525 \cdot (5+7) = 525 \cdot 12 = 6.300$$

Se puede concluir entonces, que para transportar los plátanos y el pescado a un costo mínimo de $Bs.$ 6.300, se deben hacer 5 viajes con el camión tipo x y 7 viajes con el camión tipo y.

El modelo matemático que acabamos de aplicar se conoce como **programación lineal**.

La Panadería

Una panadería produce pan y tortas. Elaborar una torta de un kilogramo requiere 1 hora de horno y 2 horas de preparación/decoración. Para obtener un kilogramo de pan se necesita 0,5 horas de horno y 0,5 horas de preparación. En un día determinado se dispone de 12 horas de horno y 16 horas de preparación/decoración. Puesto que la panadería obtiene un beneficio de $Bs.$ 3 por cada kilogramo de pan, y el beneficio es de $Bs.$ 40 por cada torta de un kilogramo, ¿cuál debería ser la política de producción de esta panadería?

Para plantear las desigualdades requeridas es útil organizar la información en una tabla como la que sigue.

Tabla 2. Datos del problema sobre la producción en la Panadería.

Producto	Horas horno	Horas preparación/decoración	Beneficio ($Bs.$)
Kilogramo de pan	0,5	0,5	3
Kilogramo de torta	1	2	40
Disponibilidad	12	16	

Para formular un problema en términos de programación lineal es necesario definir las variables de decisión y la función objetivo (z). En este caso las variables son las siguientes:

x_1: cantidad de Kilogramos de pan.
x_2: cantidad de Kilogramos de torta.
z: ganancia de la venta de pan y de torta.

Entonces, x_1 y x_2 son las **variables de decisión** y el objetivo es escoger sus valores de forma tal que se maximice la ganancia (función a optimizar), que en nuestro caso es:

$$z = 3x_1 + 40x_2$$

Los datos del cuadro implican que cada kilogramo de pan producido usará $0{,}5$ horas de horno y $0{,}5$ horas de preparación, mientas que cada kilogramo de torta necesita 1 hora de horno y 2 horas de preparación/decoración.

Esto se puede expresar a través de las siguientes desigualdades:

- Asociada al **tiempo de horneado**:

$$0{,}5x_1 + x_2 \leq 12$$

- Relacionada con el **tiempo de decoración/preparación**:

$$0{,}5x_1 + 2x_2 \leq 16$$

Y como los kilogramos de producción no pueden ser negativos, es necesario restringir las variables de decisión x_1 y x_2 para que no sean negativas:

$$x_1 \geq 0 \;\; y \;\; x_2 \geq 0$$

A estas desigualdades se les llama restricciones de signo o de no negatividad. Resumiendo, el enunciado matemático del problema anterior será:

Encontrar los valores de x_1 y x_2 que maximizan $z = 3x_1 + 40x_2$, sujetos a las restricciones,

$$\begin{gathered} 0{,}5x_1 + x_2 \leq 12 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Este problema tiene solamente dos variables de decisión, x_1 y x_2, así que podemos resolverlo gráficamente.

Recordemos que las restricciones de no negatividad limitarán la región factible al primer cuadrante del plano (en el que ambas variables son positivas).

Ahora representaremos en el plano las regiones solución de las inecuaciones:

$$0,5x_1 + x_2 \leq 12$$
$$0,5x_1 + 2x_2 \leq 16$$

Para ello, representamos primero la recta que corresponde a la desigualdad:

$$0,5x_1 + x_2 \leq 12$$

Es decir,

$$0,5x_1 + x_2 = 12$$

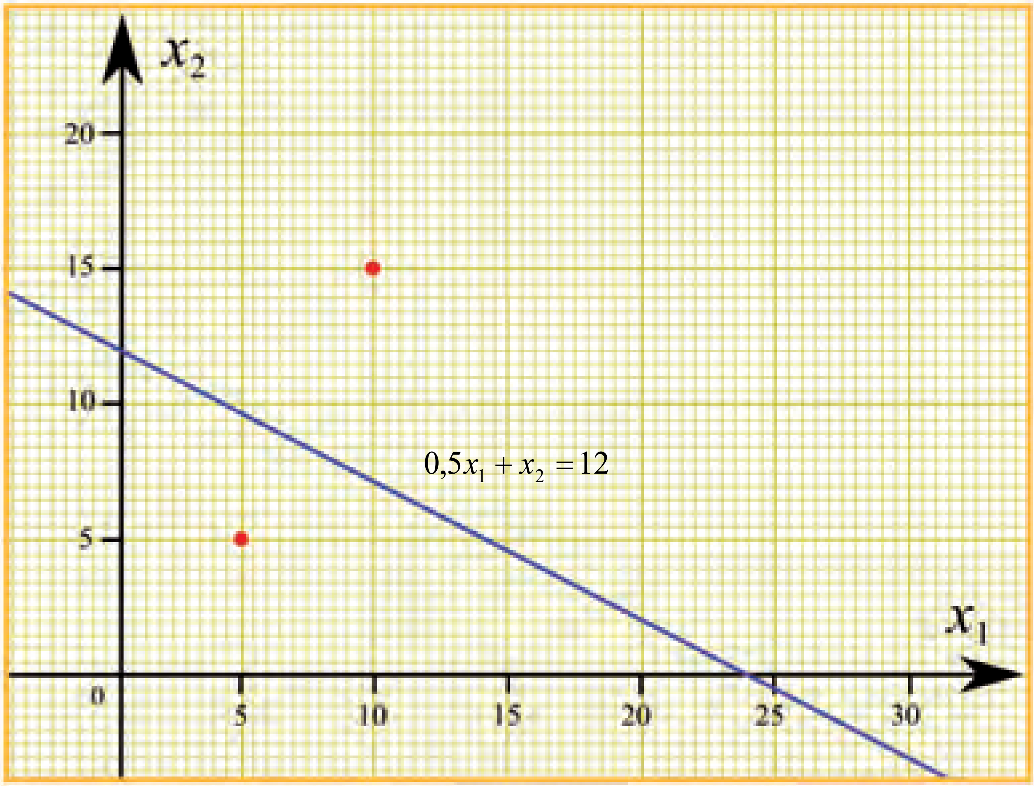


Gráfico 8. La recta $0,5x_1 + x_2 = 12$

Como vemos, el plano ha quedado dividido en dos regiones. Para determinar la región del plano asociada a nuestra desigualdad lineal, solo necesitamos dos puntos. Tomaremos el punto $(10,15)$, que se encuentra por encima de la recta, y el punto $(5,5)$, que se encuentra por debajo.

En estos casos:

- Para el punto $(10,15)$ nos queda,

$$0,5\cdot(10)+15\leq 12\Rightarrow 5+15\leq 12$$
$$20\leq 12$$

Pero **no es cierto** que 20 sea menor que 12. Por lo tanto, podemos generalizar y concluir que la región del plano que contiene este punto no cumple con la desigualdad.

- Al sustituir $(5,5)$ tenemos,

$$0,5\cdot(10)+2\cdot 10\leq 16\Rightarrow 5+20\leq 16$$
$$25\leq 16$$

Este punto **satisface la desigualdad**. Por lo tanto, la región del plano que se encuentra por debajo de la recta sí satisface la desigualdad.

Observen la gráfica que representa la región solución de la inecuación.

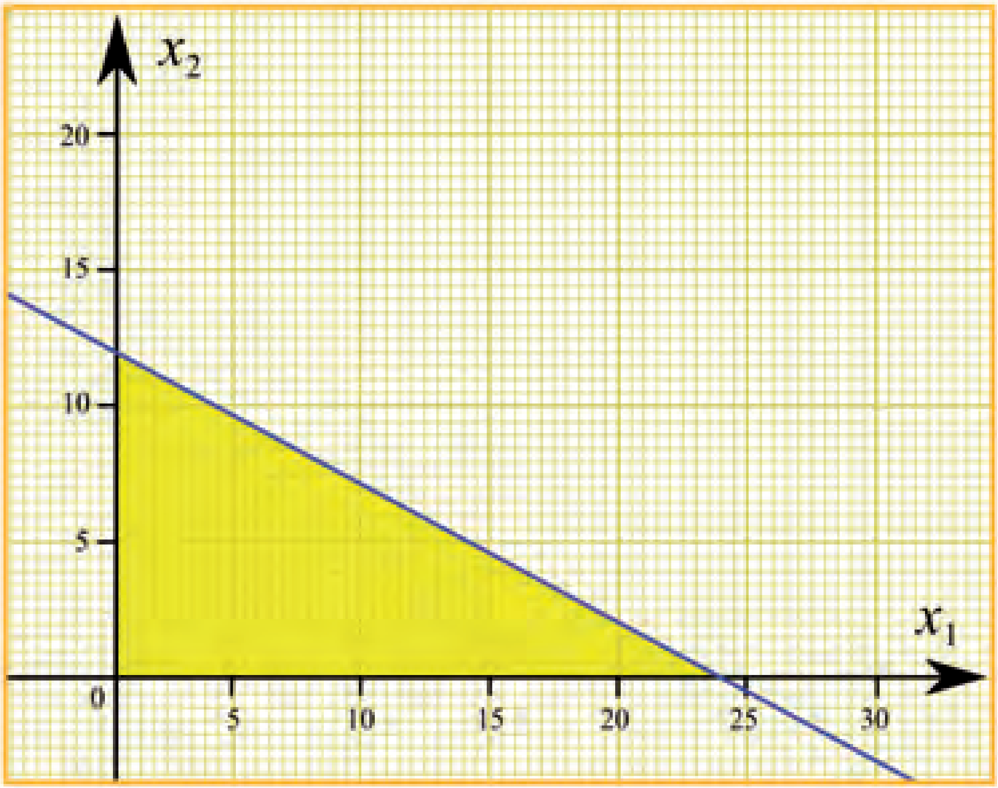


Gráfico 9. Región solución de la inecuación $0,5x_1+x_2\leq 12$

Ahora, en la misma gráfica, representemos la región solución de la inecuación $0{,}5x_1 + 2x_2 \leq 16$. Empecemos representando la recta $0,5x_1 + 2x_2 = 16$.

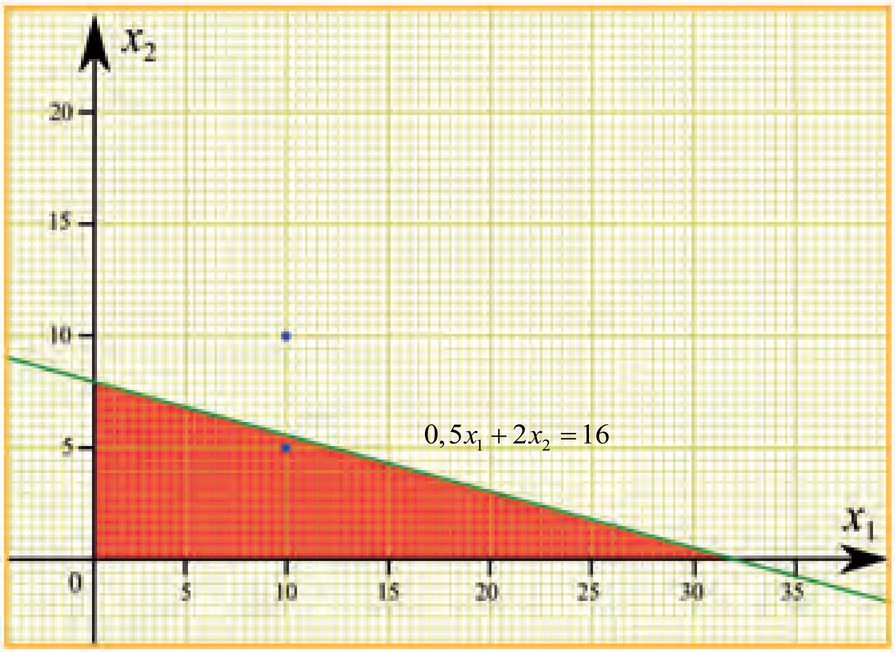


Gráfico 10. Región solución de la inecuación $0,5x_1 + 2x_2 \leq 16$

Si tomamos como referencia a la recta $0,5x_1 + 2x_2 = 16$, vemos que el plano ha quedado dividido en dos regiones. Seleccionaremos un punto de cada región para evaluarlo en la inecuación dada y determinaremos la región solución. Tomaremos el punto $(10{,}10)$, que se encuentra por encima de la recta, y el punto $(10,5)$, que se encuentra por debajo, tal como se observa en la *gráfica 10*. Veamos.

Con el punto $(10{,}10)$ nos queda:

$$0,5{\cdot}(10) + 2{\cdot}10 \leq 16 \Rightarrow 5 + 20 \leq 16$$
$$25 \leq 16$$

Pero **no es cierto que 25 sea menor que 16**. Entonces, en general, la región del plano que contiene este punto no cumple con la desigualdad.

Sustituyendo $(10,5)$ tenemos:

$$0,5.(10)+2.(5)\leq 16 \Rightarrow 5+10\leq 16$$
$$15\leq 16$$

Como este punto **satisface la desigualdad**, la región del plano que se encuentra por debajo de la recta es solución de la inecuación.

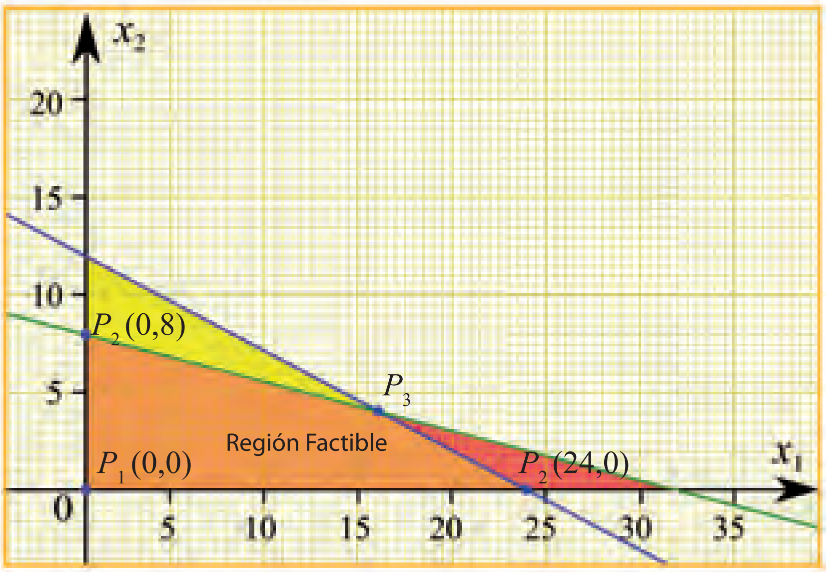


Gráfico 11. Las regiones solución de las inecuaciones $0,5x_1+x_2\leq 12$ ***y*** $0,5x_1+2x_2\leq 16$

La región factible se encuentra acotada inferiormente por el eje de las abscisas $(x_2=0)$ y por el eje de las ordenadas ($x_1=0$). Mientras que superiormente está acotada por las rectas $0,5x_1+x_2=12$ y $0,5x_1+2x_2=16$.

Vértices de la región factible

En la representación gráfica podemos identificar tres de los cuatro vértices de la región factible. Los vértices a los que nos referimos son los puntos donde las rectas cortan al *eje* x_1 y al *eje* x_2: $P_2(0,8)$, $P_4(24,0)$ y el origen $P_1(0,0)$. Las coordenadas del vértice restante se obtienen al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0,5x_1+x_2=12 & (\textit{ecuación } 1) \\ 0,5x_1+2x_2=16 & (\textit{ecuación } 2) \end{cases}$$

Solución del sistema de ecuaciones

Elegimos eliminar la variable x_1, así que multiplicamos la ecuación 2 por -1. Luego, sumamos las dos ecuaciones y determinamos el valor de x_2.

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + x_2 = 12 \\ -0{,}5x_1 - 2x_2 = -16 \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación 2 por -1

$$-x_2 = -4$$

Sumando las dos ecuaciones

$$x_2 = 4$$

Multiplicando por −1 cada miembro de la igualdad

$$0{,}5x_1 + 4 = 12$$

Sustituyendo $x_2 = 4$ en la ecuación 1

$$x_1 = 16$$

Despejando x_1

De esta manera llegamos al vértice que nos estaba faltando cuyas coordenadas son $P_3(16,4)$. En este caso los vértices que forman parte del conjunto solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + x_2 \le 12 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

son $P_1(0,0)$, $P_2(0,8)$, $P_3(16,4)$ y $P_4(24,0)$.

Ahora vamos a evaluar las coordenadas de los vértices de la región factible en la función a optimizar, recuerden que su ecuación es $z = 3x_1 + 40x_2$, para de esta manera conocer el punto que nos permite obtener el valor óptimo de este problema, es decir, la mayor ganancia.

Para $P_1(0,0)$ tenemos lo siguiente:

$$3x_1 + 40x_2 = 3 \cdot 0 + 40 \cdot 0$$
$$3x_1 + 40x_2 = 0$$

Entonces $z = 0$. Es decir, la ganancia diaria de la panadería al no producir pan ni torta será $Bs.\ 0$.

Sustituyendo $P_2(0,8)$ en la función a optimizar obtenemos:

$$3x_1 + 40x_2 = 3 \cdot 0 + 40 \cdot 8$$
$$3x_1 + 40x_2 = 320$$

En este caso se observa que si la panadería produce diariamente 8 kilogramos de torta y 0 kilogramos de pan la ganancia sería de $Bs.\ 320$, es decir, $z = 320$.

Al evaluar $P_3(16,4)$ en la función objetivo, nos queda:

$$3x_1 + 40x_2 = 3 \cdot 16 + 40 \cdot 4$$
$$= 208$$

En este caso $z = 208$. Entonces, la ganancia al producir 16 kilogramos de pan y 4 kilogramos de torta será de $Bs.\ 208$.

Para finalizar, analicemos qué sucede con $P_4(24,0)$:

$$3x_1 + 40x_2 = 3 \cdot 24 + 40 \cdot 0$$
$$= 72$$

La ganancia que obtendría la panadería al producir 24 kilogramos de pan y 0 kilogramos de torta sería de $Bs.\ 72$.

De acuerdo con los resultados que nos arroja el modelo que hemos construido, la panadería obtendrá la mayor ganancia produciendo 0 kilogramos de pan y 8 kilogramos de torta. Ahora bien, sabemos que no tendría sentido una panadería que no produzca pan pues hasta su nombre se debe a este alimento. Imaginen que todas las panaderías del país decidan dejar de producir pan y dedicarse solamente a la producción de torta; sin duda estarían incurriendo en un acto que solamente estaría mediado por el principio de la obtención de la mayor ganancia en detrimento de la satisfacción de las necesidades de la población. Además, de avanzar hacia la modificación de los patrones y costumbres alimenticias de los ciudadanos y ciudadanas de nuestro país.

En tiempos recientes, en Venezuela, ha ocurrido que algunas empresas han desaparecido las presentaciones tradicionales de arroz y harina de maíz para justificar la aparición de arroces y harinas saborizadas y de esta manera incrementar sus ganancias y zafarse de los controles legales para detener la especulación. En buena medida, este proceso especulativo se debe a que nuestro país está inmerso, aún, en un modelo económico que convierte en mercancía hasta la más sentida de las necesidades. Es importante conocer cuáles son las motivaciones que tienen algunas empresas a la hora de decidir sus políticas de producción dentro de un contexto histórico, político y cultural. Para ello, les recomendamos estudiar y discutir, entre otros, los escritos de Carlos Marx, István Mészáros y Luis "Ludovico" Silva.

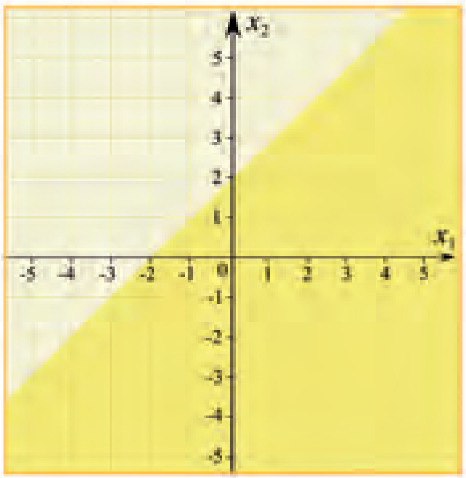
Considerando lo anterior y para que la panadería pueda satisfacer las necesidad de pan que pueda tener la comunidad en la que se encuentra ubicada, el mencionado establecimiento tendrá que tomar la decisión de producir 16 *kilogramos* de pan y 4 *kilogramos* de torta para obtener una ganancia de Bs. 208. Es decir, $x_1 = 16,\ x_2 = 4$ y el valor óptimo $z = 208$.

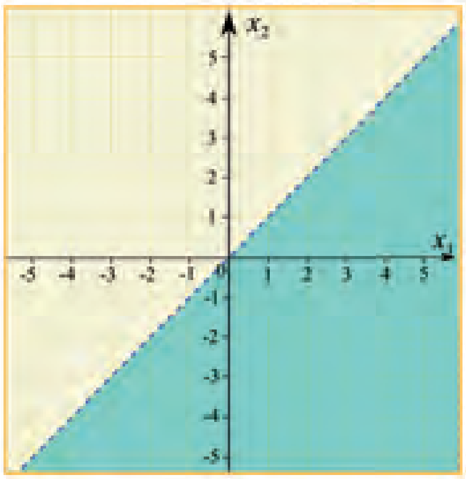
Actividades

1 Representen gráficamente la desigualdad.

- $x < 5$
- $y < -\dfrac{1}{2}$
- $4x - 2y \leq 8$
- $5x - 3y \geq 10$
- $3x + 4y + 12 > 0$
- $y < x + 3$

2 Para cada región del plano dada, planteen una desigualdad cuya solución sea la región sombreada.

- 

- 

3 Representen gráficamente la solución del sistema de inecuaciones. Además, determinen las coordenadas de los vértices y si el conjunto solución es acotado o no.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 10y \leq 30 \\ 3x + 2y \leq 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5 \\ y < 10 \\ x - y > 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 5 \\ 5x + y \leq 10 \end{cases}$$

Inecuaciones de segundo grado

Hasta el momento hemos estudiado problemas de programación matemática, en los que las restricciones y la función a optimizar son lineales. Este tipo de problemas son muy frecuentes y están vinculados con un amplio rango de aplicaciones, pero en ocasiones ocurre que en la vida se tienen que enfrentar problemas cuyos modelos no son lineales. Cuando la función objetivo, las restricciones, o ambas, no son lineales se dice que se trata de un problema de **programación no lineal.**

En este apartado de la lección estudiaremos las inecuaciones de segundo grado con dos variables, y de esta manera dejar "la mesa servida" para que se interesen por estudiar las diversas y medulares aplicaciones de la programación no lineal.

Iniciaremos nuestro recorrido analizando la gráfica de la desigualdad $y \leq x^2 + 1$. Al igual que en las inecuaciones lineales con dos variables, representamos primero la parábola $y = x^2 + 1$, que dividirá el plano en dos regiones.

Ahora tomamos un punto sobre la parábola y uno que se encuentre debajo de ella, para ver cuál de los dos cumple con la desigualdad planteada. Veamos:

$y = x^2 + 1$

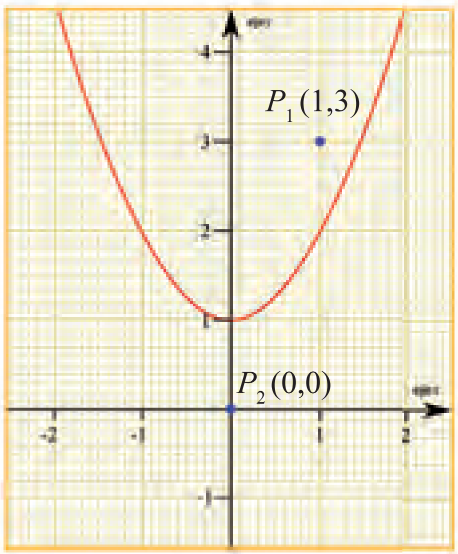


Gráfico 12. La parábola $y = x^2 + 1$

Tal como observan en la gráfica, el punto $P_1(1,3)$ se encuentra encima de la parábola. Al sustituir en la desigualdad tenemos:

$$3 \leq 1^2 + 1$$
$$3 \leq 2$$

Pero no es cierto que 3 sea menor o igual a 2. Por lo tanto, la región que se encuentra encima de la parábola **no es solución de la inecuación**. Ahora sustituimos $P_2(0,0)$, que se encuentra debajo de la parábola. Nos queda:

$$0 \leq 0^2 + 1$$
$$0 \leq 1$$

Este punto **sí cumple con la desigualdad**. Entonces, la región del plano que contiene a este punto **sí es solución de la inecuación**.

La *gráfica 13* muestra el conjunto solución de la inecuación $y \leq x^2 + 1$.

Con base en esta gráfica respondan a las siguientes preguntas:

¿El punto $(1,2)$ pertenece al conjunto solución de la inecuación? ¿Por qué?

¿Todos los puntos de la parábola $y = x^2 + 1$ están en el conjunto solución de la inecuación $y \leq x^2 + 1$?¿Por qué?

Una inecuación del tipo:

$ax^n + bx^m < c$ con $m, n \in Z^+ \cup \{0\}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$, en la que:

(i) Si $m = 2$ entonces $0 < \boldsymbol{n} < 2$, o bien,
(ii) Si $n = 2$ entonces $0 < \boldsymbol{m} < 2$.

o cualquier expresión de la forma anterior que, en lugar de la relación <, incluya a ≤, se conoce con el nombre de **inecuación de segundo grado de dos variables.**

Ahora, ¿cuál es el conjunto solución de la inecuación $y > x^2 + 1$? En esta inecuación y es mayor (estricto) que x, por lo que los puntos que satisfacen la igualdad $y = x^2 + 1$ no forman parte del conjunto solución de la inecuación.

Tomemos $P_1(1,3)$, por encima, y $P_2(0,0)$ por debajo de la parábola, para ver cuál de los dos cumple con la desigualdad, y determinar el conjunto solución:

Para $P_1(1,3)$ tenemos:

$$3 > 1^2 + 1$$
$$3 > 2$$

$P_1(1,3)$ **cumple con la desigualdad**. Por lo tanto, la región que contiene a este punto es **solución de la inecuación.**

Sustituyamos $P_2(0,0)$ nos queda:

$$0 > 0^2 + 1$$
$$0 > 1$$

Es obvio que 0 no es mayor que 1. Así que la región que se encuentra por debajo de la parábola **no es solución de la inecuación**.

La región del plano que representa el conjunto solución se expone en el *gráfico* 14.

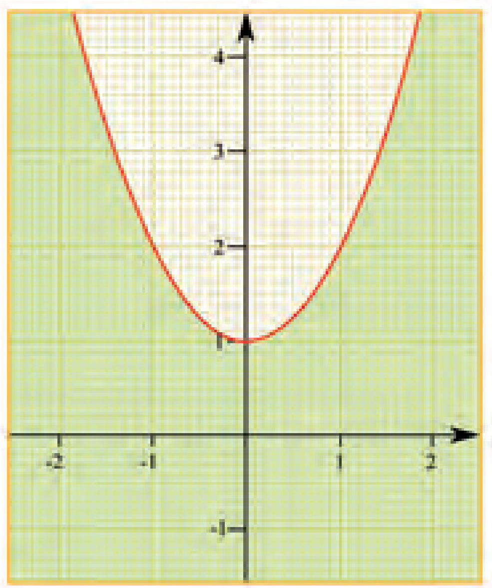


Gráfico 13. La región solución de $y \leq x^2 + 1$

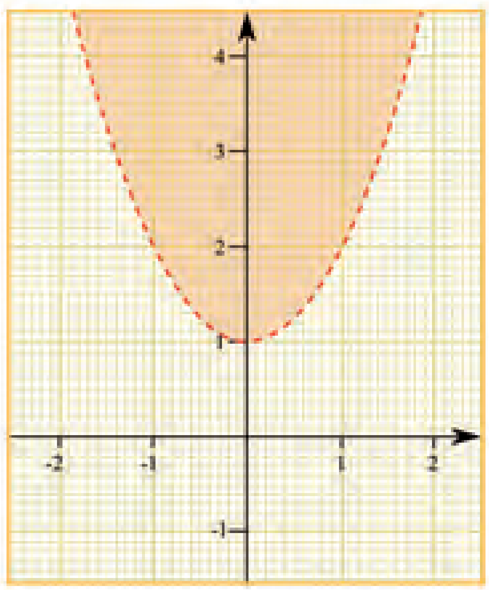
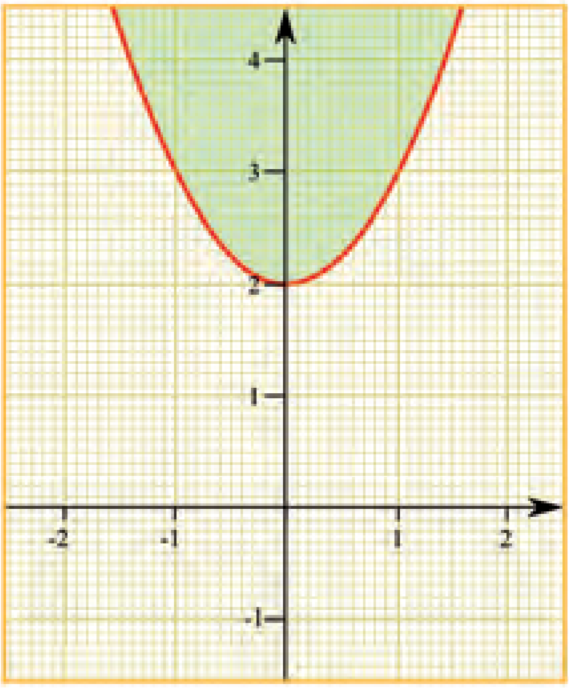


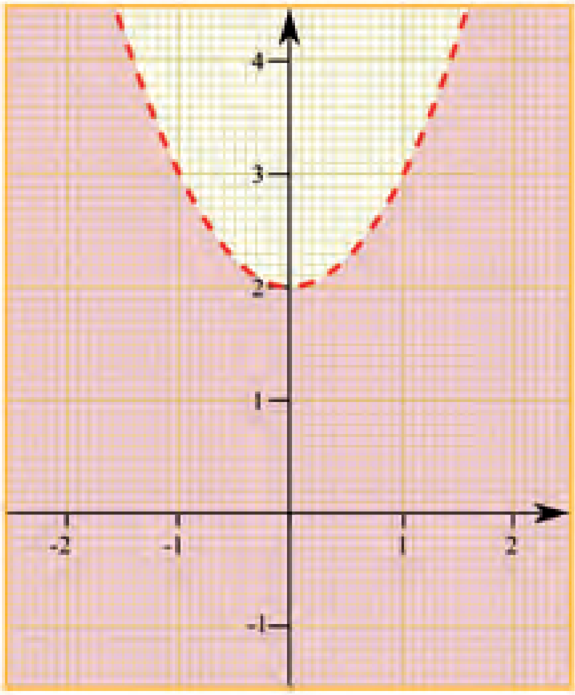
Gráfico 14. Región solución de la inecuación $y > x^2 + 1$

Con base en éste, respondan a las siguientes preguntas:

- ¿El punto $P_1(1,3)$ pertenece al conjunto solución de la inecuación?
- ¿La expresión $y > x^2 + 1$ define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? ¿Por qué?

A partir de las siguientes gráficas planteen, para cada caso, una desigualdad cuya solución sea la región sombreada:



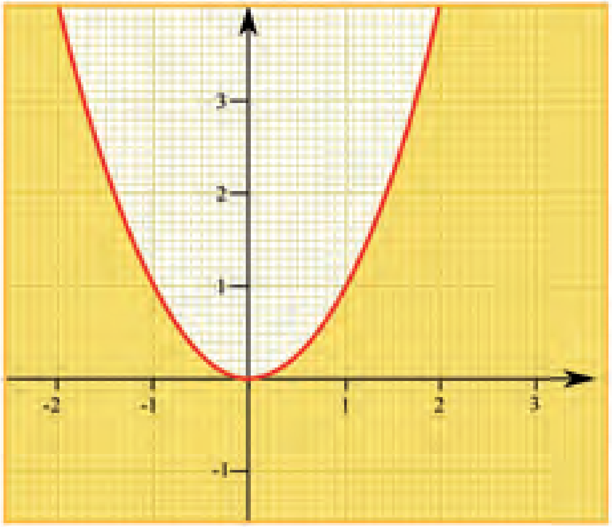


Sistema de inecuaciones

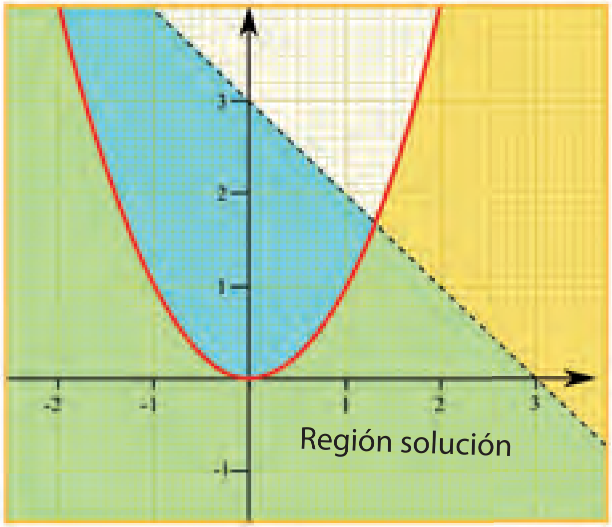
Ahora estudiaremos algunos sistemas de inecuaciones con dos variables, donde al menos una de las desigualdades es no lineal. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ x + y < 3 \end{cases}$$

Representaremos cada una de las desigualdades en el mismo plano para obtener el conjunto solución del sistema, que será la intersección de las regiones del plano que representan las inecuaciones dadas.



$x^2 - y \geq 0$



$\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ x + y < 3 \end{cases}$

Gráfico 15

La región solución del sistema de inecuaciones dado anteriormente es la intersección de las dos desigualdades.

¿El conjunto solución es acotado superiormente? En caso de ser afirmativa su respuesta indica la ecuación de la(s) curva(s) o recta(s) que lo acota(n).

Actividades

1 Representen gráficamente la solución del sistema de desigualdades e indiquen si el conjunto solución es acotado o no:

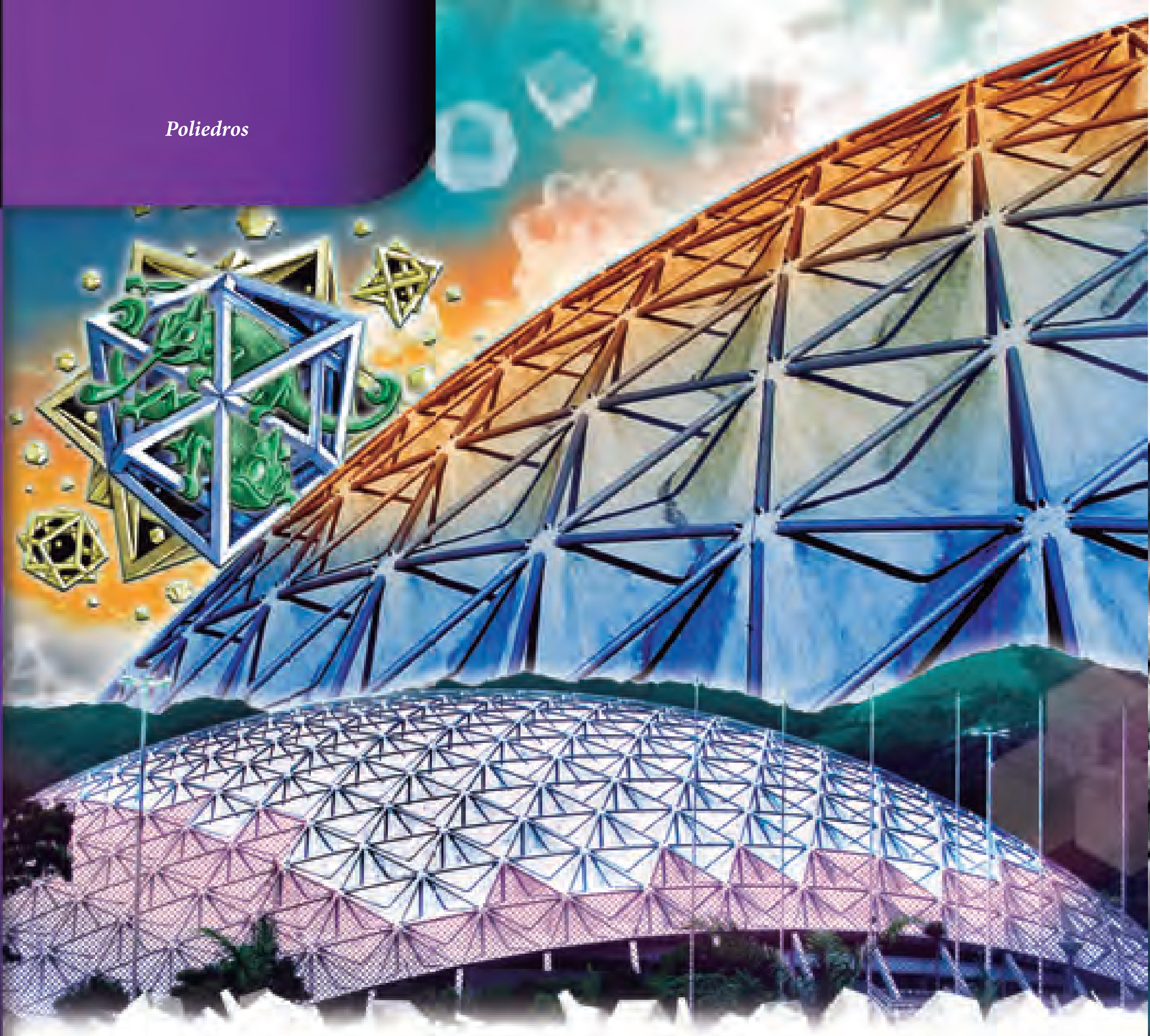
- $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y < 9 - x^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 - y - 1 \geq 0 \\ x - y \leq -5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ x^2 + \frac{1}{2}y \leq 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ y \leq 4 \\ x^2 + 2y \leq 14 \end{cases}$

2) Una embotelladora utiliza tres concentrados de mango, naranja y parchita para hacer dos jugos mezclados: mango-naranja y mango-parchita, que se venden en cartones de medio litro. El beneficio es de $Bs.\,3$ por cada cartón de mango-naranja y $Bs.\,2{,}50$ por cada medio litro de mango-parchita. Cada mezcla se hace colocando cantidades iguales de cada uno de los concentrados que la componen. La cantidad de concentrado disponible es de 100 medios litros de concentrado de mango, 70 medios litros de concentrado de parchita y 70 medios litros de concentrado de naranja. ¿Cuál será la política de producción que debe tener la embotelladora para aprovechar al máximo los recursos?

3) Una escuela prepara un trabajo de campo en el que participarán 350 personas (entre estudiantes, representantes, profesores y profesoras). La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 32 puestos y 10 autobuses de 54 puestos. El alquiler de un autobús grande cuesta $Bs.\,1.080$, y el de uno mediano $Bs.\,640$. ¿Cuántos autobuses de cada tipo se deben alquilar para que el costo de la excursión sea el mínimo? ¿Cuánto costaría el transporte para el trabajo de campo?

4) En una carpintería fabrican mesas y sillas. Cada mesa requiere $2{,}5$ horas para cortar las maderas, y una hora de ensamblaje. Cada silla requiere $1{,}5$ horas para el corte de las maderas y $1{,}5$ horas de ensamblaje. Se disponen de 12 horas para el corte de madera y 8 horas para el ensamblaje cada día. Formulen un sistema de desigualdades que describa todas las combinaciones posibles de mesas y sillas que se pueden fabricar cada día. Representen gráficamente el conjunto solución.

8 Poliedros: arte y filosofía



El poliedro de Caracas

Seguramente, ustedes habrán escuchado hablar de un lugar llamado el **Poliedro de Caracas**. Efectivamente es un lugar destinado para la presentación de diversos eventos culturales, de entretenimiento, e incluso, deportivos. Fue inaugurado en el año 1974 y actualmente en el año 2012, le hicieron importantes trabajos de modernización, siendo uno de los motivos fundamentales el desarrollo del torneo *Preolímpico de Básquet* que se jugó en julio de 2012. El techo o cúpula está formado por triángulos cuyos vértices se inscriben en una esfera, esto es lo que se conoce como **cúpula** o **domo geodésico**. Esa esfera geodésica es un **poliedro**, este nombre proviene del griego, polys (múltiples) y hedra (cara).

Los poliedros están presentes en diversas obras arquitectónicas. Una muestra importante de ello es la obra del arquitecto catalán Albert Gaudí. En una de sus creaciones más conocidas, tal es el caso de la Iglesia de la Sagrada Familia, ubicada en Barcelona, España (*gráfico 1*), se pueden observar diversos detalles que corroboran esta afirmación.

Los poliedros presentes en las torres de la Iglesia La Sagrada Familia, de Gaudí, así como algunas de sus intersecciones fueron el motivo del afiche que conmemoró, en el 2000, **Año Mundial de las Matemáticas** en Cataluña, España.

Para proseguir el estudio de estos objetos geométricos tridimensionales debemos estudiar algunas de sus características esenciales, las cuales son objeto de esta lección.

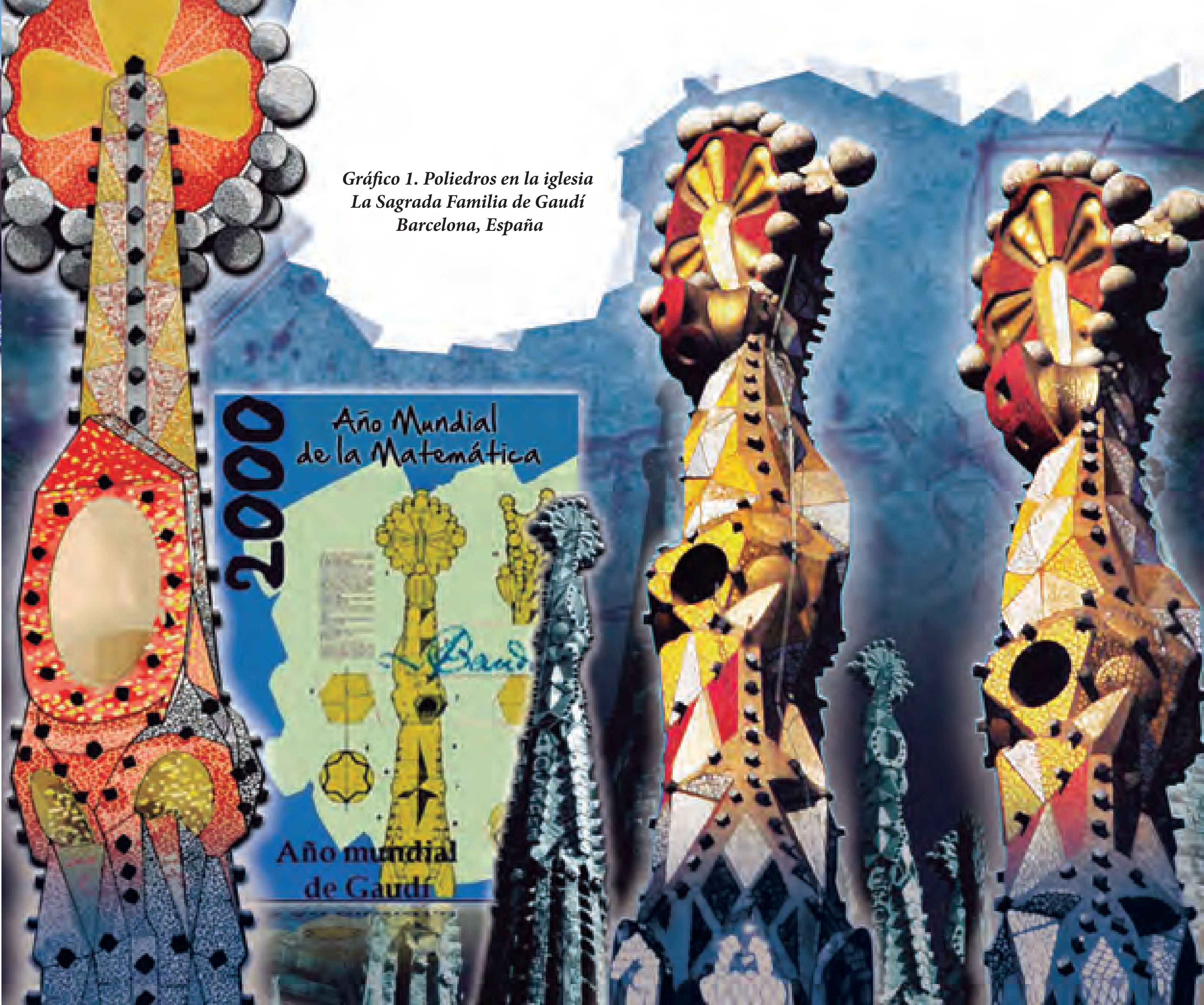


Gráfico 1. Poliedros en la iglesia La Sagrada Familia de Gaudí Barcelona, España

Los ángulos diedros

Si tenemos dos rectas en un plano y ellas se intersecan, se forman cuatro ángulos, tal como se muestra en el *gráfico* 2. Consideremos ahora dos planos en el espacio que se intersecan en una recta. Esto se puede representar a través de dos hojas de papel donde una de ellas pasa a través de la otra, como en el *gráfico* 3. La recta que resulta de la intersección de los dos planos divide a cada plano en dos **semiplanos** que tienen un borde común (en el *gráfico* 3 en color rojo). De este modo podemos visualizar cuatro figuras las cuales se forman entre dos caras planas de las hojas de papel, tal como se muestra en el *gráfico* 4. Cada una de esas figuras se denomina **ángulo diedro**. Por lo tanto, estamos en condiciones de exponer la siguiente definición:

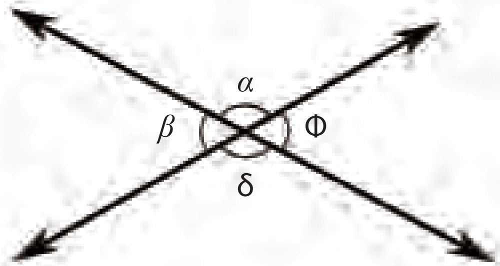


Gráfico 2. Ángulos determinados por dos rectas

Un **ángulo diedro** es una figura formada por la unión de dos semiplanos de borde común, no estando esos semiplanos sobre el mismo plano. El borde común recibe el nombre de arista y la unión del borde con cada uno de los semiplanos son llamadas caras o lados del ángulo diedro.

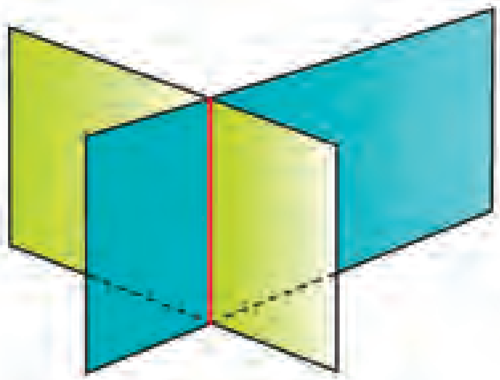
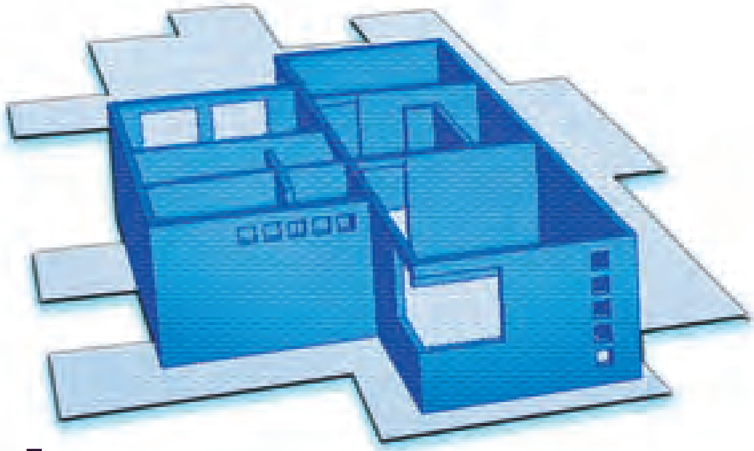


Gráfico 3. Uno de los casos de la intersección de dos planos

Identifiquen, por lo menos, tres ángulos diedros que observen en su entorno.



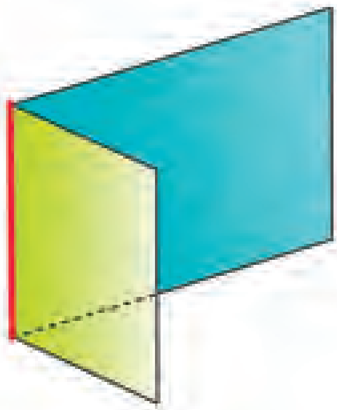


Gráfico 4. Ángulo diedro

Los ángulos poliedros

Tomen un cubo cualquiera y observen uno de sus vértices (como les mostramos en el *gráfico 5*). ¿Cuántas caras planas concurren en cada uno de sus vértices?, y, ¿cuántas aristas concurren en cada vértice? En efecto, se tienen tres caras planas concurriendo en un mismo vértice. Existe, entonces, una región del espacio que está limitada por esos tres planos; a esa región la denominaremos **ángulo poliedro**. En el caso particular que estamos estudiando lo denominaremos **ángulo triedro** o, simplemente, **triedro**. El punto de intersección de las tres caras planas del cubo donde concurren también tres aristas o semirrectas, lo denominaremos **vértice**. En consecuencia, decimos que:

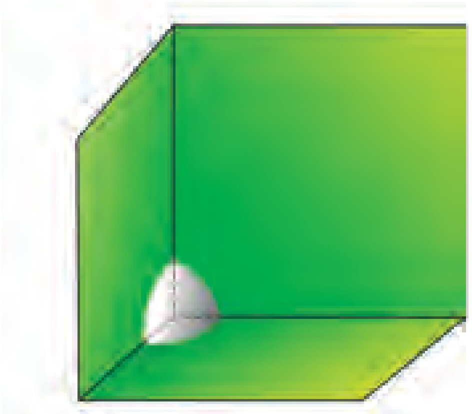


Gráfico 5. Ángulo triedro

> Un ángulo **poliedro** es la región del espacio limitada por tres o más planos que se cortan mediante semirrectas que concurren a un mismo punto denominado **vértice**.

Fíjense en el triedro y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Por cuántas caras está formado el triedro?
- ¿Cuántos ángulos diedros tiene?
- ¿De cuántas aristas está formado?

Tal como ustedes deben haber respondido, el triedro está formado por tres diedros, tres caras y tres aristas. Es decir, tiene el mismo número de caras y de diedros que de aristas. Esta es una propiedad extensible para todo ángulo poliedro. Por lo tanto, podemos decir que:

> Un **ángulo poliedro** tiene el mismo número de caras y de ángulos diedros que de aristas.

Otra propiedad importante de los poliedros es que la suma de los ángulos interiores de las caras que se encuentran en cada vértice, en cualquier ángulo poliedro, debe ser menor que $360°$, de manera que la figura "se cierre", es decir que no sea plana.

- Den varios ejemplos de ángulos poliedros que observen en su entorno.

Avancemos hacia los poliedros

Nosotros podemos observar objetos como los que mostramos en el *gráfico 6*. Cada uno de ellos puede ser asociado con distintos cuerpos geométricos o sólidos. ¿Podemos afirmar que la superficie de todos ellos está limitada por **caras**? De acuerdo con su respuesta debemos descartar el balón de fútbol. De los objetos restantes, debemos preguntarnos ¿la superficie de los mismos está limitada por **polígonos**, es decir todas sus caras son poligonales? Así, descartamos la lata, pues no verifica la propiedad anterior. Entonces, los ladrillos y la pirámide de las figuras son sólidos cuya superficie está formada por cierto número de caras poligonales. Estas figuras reciben el nombre de **poliedros**.

Gráfico 6

Un **poliedro** es un sólido cuya superficie está limitada por cierto número de caras poligonales.

Elementos de un poliedro

Las caras, aristas, vértices, diagonales, ángulo diedro y ángulo poliédrico son los elementos que se distinguen en un poliedro (veamos el *gráfico* 7).

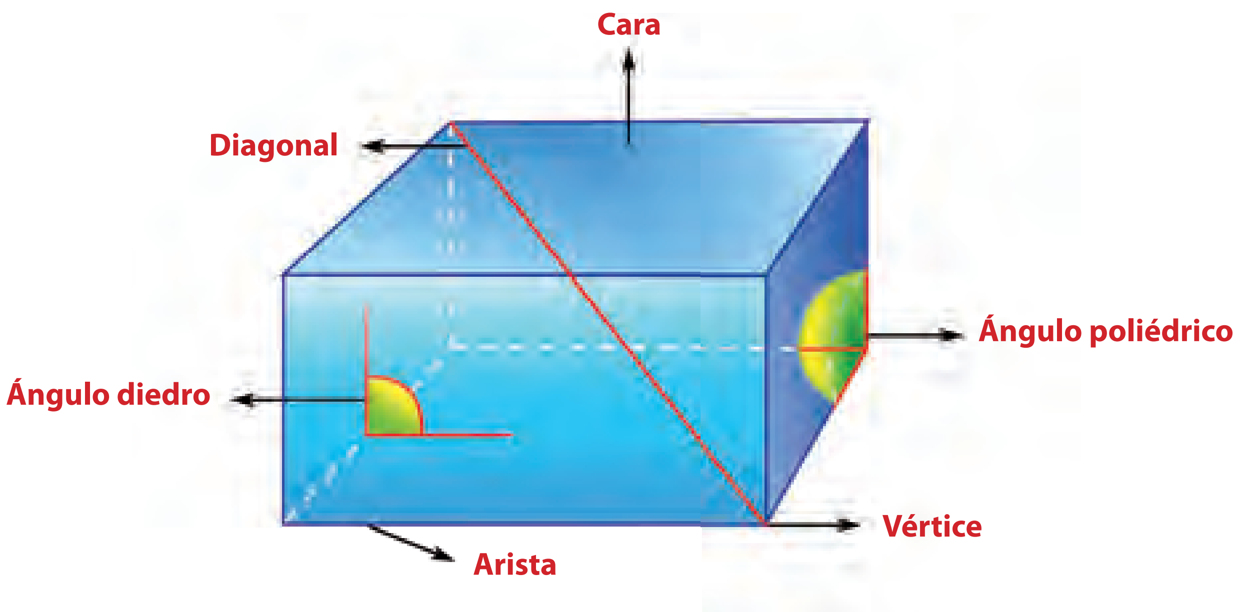


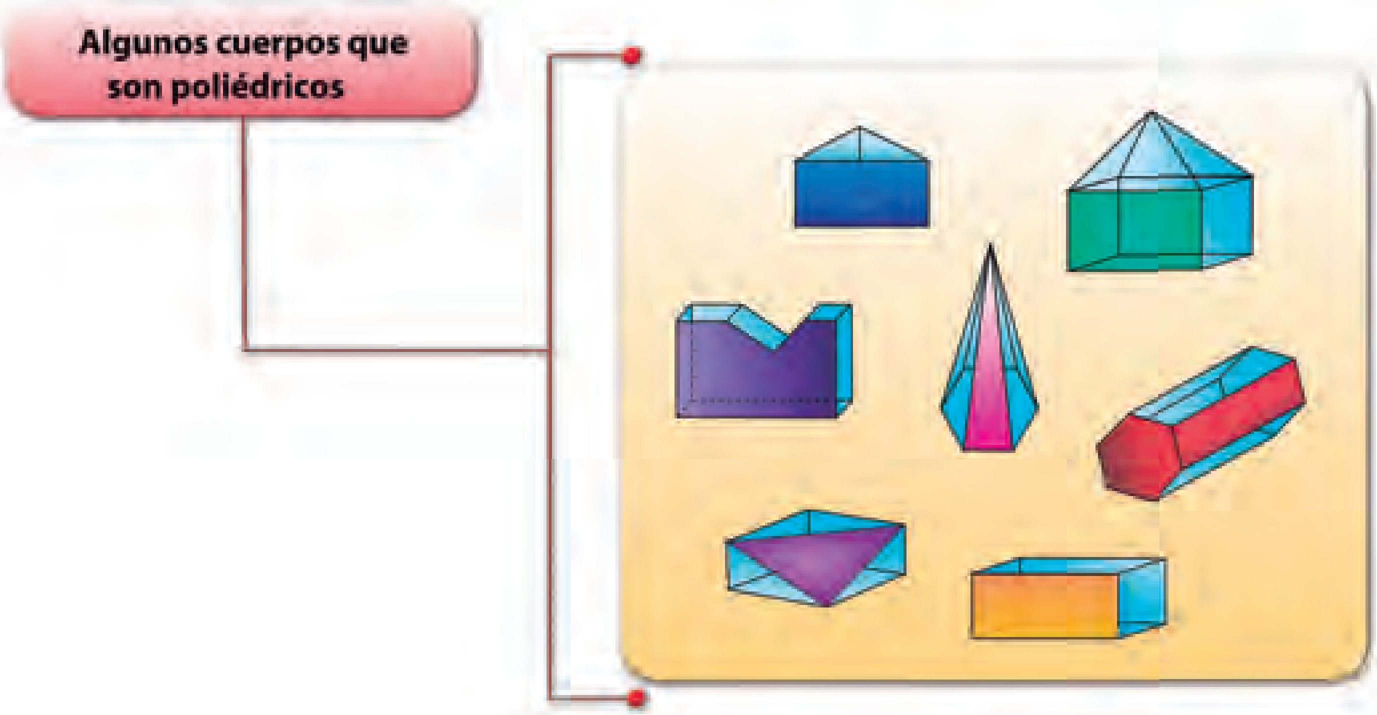
Gráfico 7. Elementos de un poliedro

A lo largo de esta lección ya hemos definido los términos de: *ángulo diedro*, *caras*, *arista*, *ángulo poliedro* y *vértice*. ¿Recuerdan la definición de diagonal de un polígono? Vamos a extender esa idea de diagonal de un polígono para el caso de los poliedros, lo cual haremos por medio de la definición que sigue.

La **diagonal de un poliedro** es un segmento que une dos vértices que no pertenecen a la misma cara.

Actividades

1. ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en el poliedro de la figura anterior?
2. Represéntenlas gráficamente y conversen sobre ello con sus compañeras y compañeros.



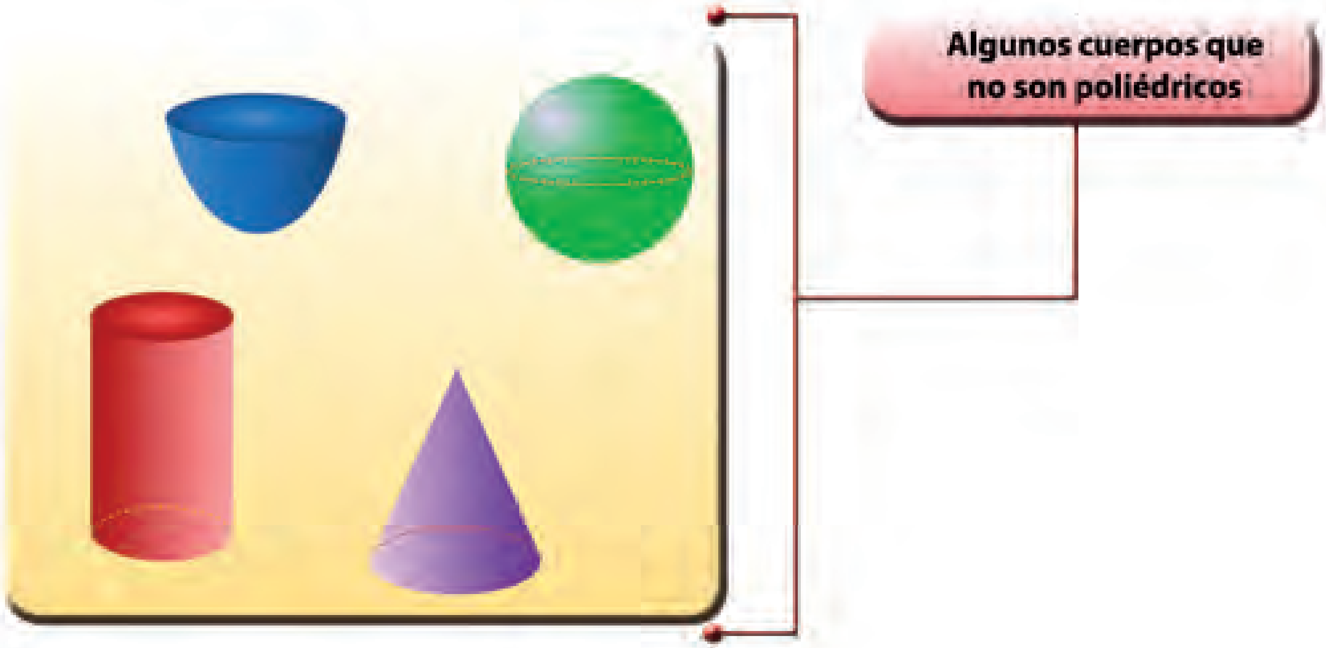


Gráfico 8. Ejemplos de cuerpos poliédricos y no poliédricos

- ¿Qué característica diferencia a los cuerpos del diagrama anterior?
- Consideren ahora los poliedros presentados en el *gráfico* 9, ¿cuáles de ellos pueden "apoyar" cada una de sus caras sobre el plano?

A los que cumplan con esa condición los llamaremos **poliedros convexos**. A aquellos que presenten alguna cara que no puede ser apoyada, totalmente sobre el plano, los llamaremos **poliedros cóncavos**. Observamos también que para todo poliedro convexo el segmento que une dos puntos cualesquiera del interior del poliedro está totalmente contenido en el interior del poliedro. Por el contrario, para un poliedro cóncavo, un segmento que une dos puntos del interior del poliedro puede no estar totalmente contenido en su interior. Verifiquen esta última condición, trazando para los poliedros cóncavos de la figura, un segmento que ilustre esa situación.

El resto de nuestra lección se dedica a los poliedros convexos.

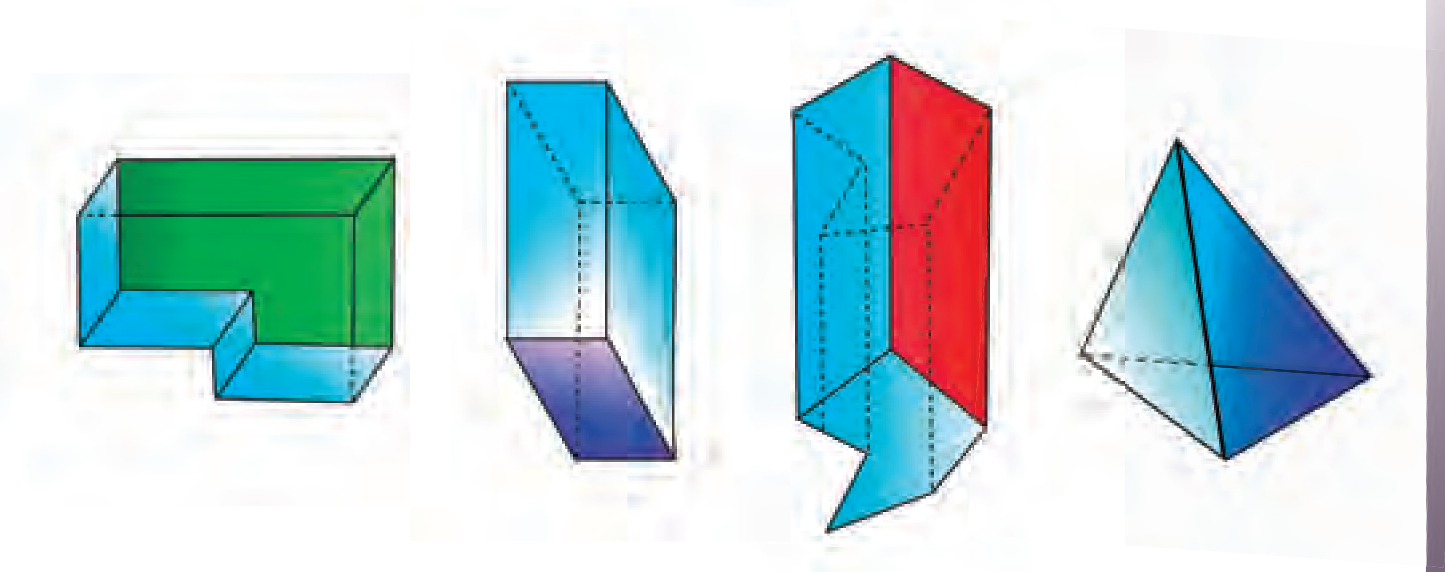


Gráfico 9. Poliedros convexos y cóncavos

Los interesantes poliedros regulares

Existen unos poliedros muy especiales que han ocupado la atención de matemáticos, científicos, filósofos y artistas a lo largo de gran parte de la historia de la humanidad. Estos son los llamados **poliedros regulares**: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Se les conoce también por el nombre de **sólidos platónicos**, en honor al filósofo griego **Platón** (*siglo* IV *a.C.*). Platón los cita en su obra *Timeo*. Algunos historiadores afirman que tres de esos sólidos (cubo, tetraedro y dodecaedro) fueron identificados por la escuela pitagórica (siglo V a.C.), y los otros dos (octaedro e icosaedro) por discípulos de Platón, quienes asignaron un significado místico a los cinco poliedros regulares con los que se consideraban los cuatro elementos naturales primarios: fuego, tierra, aire y agua. Se relacionó el *tetraedro* con el *fuego*, el *cubo* con la *tierra*, el *octaedro* con el *aire* y el *icosaedro* con el *agua*. El *dodecaedro* lo relacionó con un *quinto elemento*: el *Universo*. Observen que este último poliedro tiene caras *pentagonales*, el cual fue muy importante para los griegos desde el surgimiento de la *escuela pitagórica*.

Pero, ¿qué es un **poliedro regular**?

Les invitamos a realizar la siguiente actividad con un tetraedro como el que les mostramos en el *gráfico* 10.

- ¿Cuántas caras tiene ese poliedro?
- ¿Cómo son las caras del poliedro?
- ¿Cómo se llama el polígono que constituye a dichas caras?
- ¿Podemos afirmar que las caras son polígonos regulares congruentes? ¿Por qué?
- ¿Cuántas **aristas** concurren en cada uno de los **vértices**?

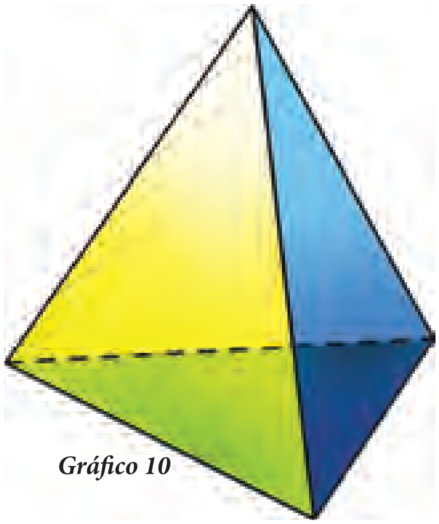


Gráfico 10

Con base en sus respuestas debemos haber obtenido que el **tetraedro** está formado por cuatro caras, donde cada una de ellas es un triángulo equilátero, es decir, sus **caras son cuatro polígonos regulares congruentes** y en cada uno de los vértices concurren tres aristas, es decir **para cada vértice concurre el mismo número de aristas**.

Investigación

Indaguen junto con sus compañeras y compañeros si esas dos características se verifican en los otros cuatro poliedros regulares.

Intenten elaborar una conjetura, es decir un enunciado que se cumpla para los cinco poliedros regulares.

En consecuencia, afirmamos que:

> Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de aristas.

Actividades

1 ¿Cuántos poliedros regulares existirán? Para realizar esta actividad vamos a requerir cartulina, tijeras y goma de pegar.

2 Organícense en grupos pequeños de tres o cuatro estudiantes.

Usemos triángulos equiláteros

Respondamos a la pregunta, comenzando con el polígono regular de menor número de lados, es decir el triángulo equilátero. Vamos a dibujar en una cartulina varios triángulos equiláteros, al menos 32, todos iguales, tal como se muestra en el *gráfico* 11. Procedamos a cortar los triángulos equiláteros y doblamos las pestañas, que usaremos para pegar. Vamos entonces a construir un poliedro regular cuyas caras son triángulos equiláteros. Ya conocemos que en cada vértice del poliedro deben concurrir el mismo número de aristas, y en consecuencia el mismo número de caras. ¿Cuántos y cuáles casos pueden darse? Recuerden que la suma de las medidas de cualquier ángulo poliedro debe ser menor que $360°$.

Gráfico 11

En función de lo anterior tendremos tres casos para la concurrencia de las caras: tres, cuatro y cinco triángulos equiláteros. ¿Qué ocurriría si concurriesen seis triángulos o más? Tendríamos que como cada ángulo del triángulo equilátero mide 60°, la suma de los ángulos de ese ángulo poliedro sería, como mínimo, $6 \cdot 60° = 360°$. Ya conocemos que esto no es posible por la propiedad de que esa suma siempre es menor que $360°$, porque si fuese mayor la figura "no cerraría".

Veamos qué ocurre *si en cada vértice concurren tres triángulos equiláteros*: tomen tres triángulos de cartulina de los que ustedes han cortado y procedan a pegarlos utilizando las pestañas construidas para tal fin. ¿Cuántos triángulos necesitan para terminar de armar el poliedro? Para ello necesitan un triángulo equilátero más. Han formado un poliedro regular de cuatro caras, han construido el **Tetraedro**.

Ahora, qué ocurrirá *si en lugar de tres triángulos en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros*. Tomen cuatro triángulos de cartulina de los que ustedes han cortado y procedan a pegarlos utilizando las pestañas construidas para tal fin. ¿Cuántos triángulos más necesitan para terminar de armar el poliedro? Así, se requieren cuatro triángulos equiláteros más. Han formado entonces un poliedro regular de ocho caras, han construido el **Octaedro** (*gráfico* 12).

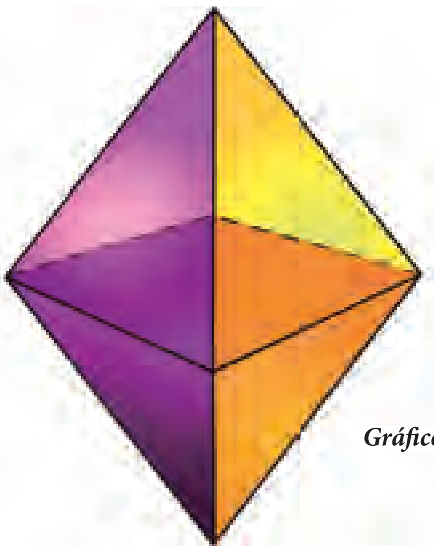


Gráfico 12

Al hacer la actividad para la concurrencia en cada vértice de *cinco triángulos equiláteros*, deben haber construido un poliedro regular de 20 caras, conocido como **Icosaedro** (ver *gráfico* 13).

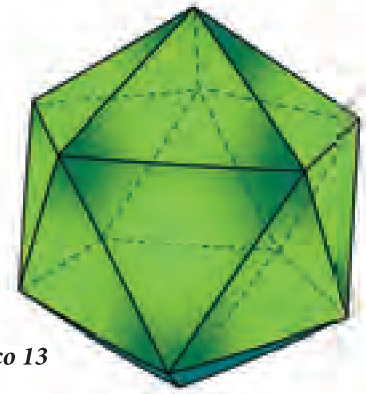


Gráfico 13

Usemos cuadrados

Vamos a basarnos en el polígono regular de 4 lados: el cuadrado. Dibujemos seis cuadrados en la cartulina, todos congruentes, tal como se muestra en el *gráfico* 14.

Gráfico 14

¿Cuánto mide cada ángulo interior del cuadrado? ¿Cuál es el máximo número de cuadrados que pueden concurrir para construir un poliedro regular? Tendríamos que como cada ángulo del cuadrado mide 90°, pueden concurrir tres cuadrados ya que si fuesen cuatro la suma de los ángulos de ese ángulo poliedro sería 360°, lo cual sabemos que no es posible. No pueden ser dos cuadrados ya que no tendríamos formado un ángulo poliedro. Por tanto existe un caso y solamente uno. Al hacer la construcción tendrán el **Cubo** o **Hexaedro**, polígono regular de seis caras, como mostramos en el *gráfico* 15.

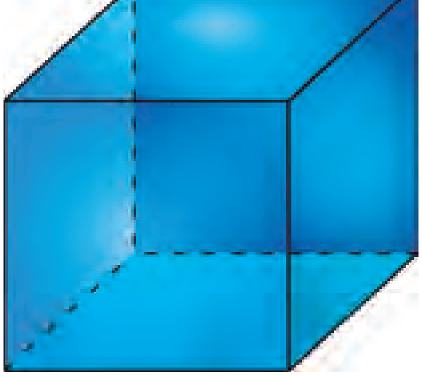


Gráfico 15

Usemos pentágonos

Para la construcción siguiente utilizaremos polígonos de cinco lados: **pentágonos regulares**. Vamos a dibujar en la cartulina doce pentágonos, todos congruentes, con pestañas iguales que en el *gráfico* 16.

Gráfico 16

¿Cuánto mide cada ángulo interior del pentágono regular? ¿Cuál es el máximo número de pentágonos que pueden concurrir para construir un poliedro regular?

Actividades

1. Tracen un pentágono regular, divídanlo en el menor número de triángulos que puedan y con sus conocimientos sobre la medida de los ángulos internos de un triángulo, deduzcan cuál es la medida de los ángulos internos de un pentágono, en nuestro caso, un pentágono regular.

2. Socialicen sus deducciones con sus compañeras y compañeros y determinen si su conjetura se cumple para cualquier pentágono.

Veamos ahora cómo se puede llegar a una conjetura que permita saber cuánto mide cada ángulo interno de un pentágono regular. Recordemos que un pentágono regular tiene cinco lados y cinco ángulos de igual medida, y se puede dividir en tres triángulos. Como ya sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, entonces $3 \cdot 180° = 540°$. Es decir, que la suma de los ángulos internos de un pentágono será igual a $540°$, como en este caso estamos hablando de un pentágono regular y sabemos que todos sus ángulos tienen igual medida, entonces:

$$540° \div 5 = 108°$$

Por lo tanto, cada ángulo del pentágono regular medirá $108°$, como observamos en el *gráfico* 17.

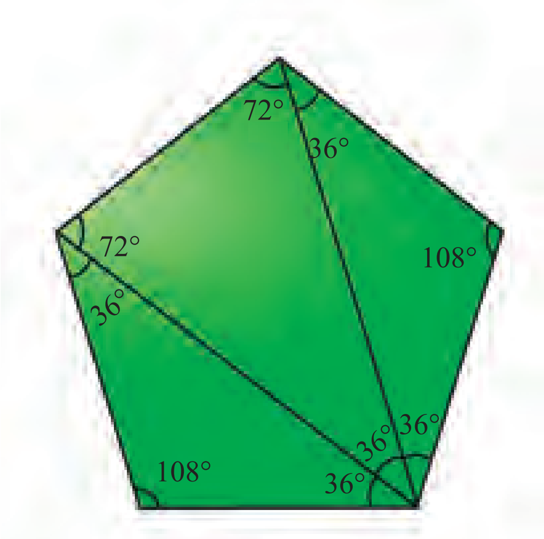


Gráfico 17

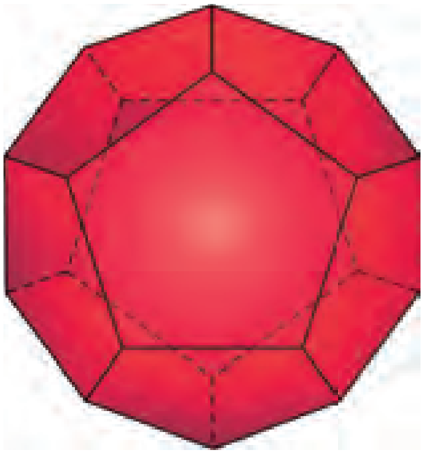


Gráfico 18

Entonces, si cada ángulo del pentágono mide 108°, en cada vértice del poliedro pueden concurrir un máximo de tres pentágonos ya que si fuesen cuatro, la suma de los ángulos de ese ángulo poliedro sería, $4 \cdot 108° = 432°$, lo cual sabemos que no es posible. Al hacer la construcción tendremos que la concurrencia se verifica con tres pentágonos y tendrán el **Dodecaedro**, polígono regular de doce caras, como observamos en el *gráfico* 18.

Investigación

- Si la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, la de los ángulos internos de un cuadrado $360°$ y la de un pentágono es $540°$. ¿Cuánto es la suma de los ángulos internos de un **Hexágono regular**?

- ¿Pueden elaborar una conjetura que nos permita saber cuánto es la suma de los ángulos internos de un polígono de n número de lados?

En un hexágono regular los ángulos internos miden $120°$, ¿por qué? Como en un vértice deben concurrir al menos tres caras, tendríamos un ángulo poliedro de $3 \cdot 120° = 360°$, lo que resulta imposible como ya sabemos. Por lo tanto, para cualquier otro polígono regular con seis lados o más, como sus ángulos internos miden $120°$ o más, tenemos la imposibilidad de su construcción. Concluimos entonces que **existen solamente cinco poliedros regulares convexos**.

Platón (Πλάτων) (428 a.C./427 a.C. – 347 a.C.) fue uno de los más grandes filósofos, estudió con Sócrates y fue maestro de Aristóteles. De hecho, la filosofía adquirió otra dimensión a partir de sus trabajos.

La República está dedicada a la filosofía política de un estado ideal, el Fedro, que trata sobre teoría psicológica, el Timeo, sobre cosmogonía, cosmología física y escatología y el Teeteto, sobre filosofía de la ciencia, son algunas de sus obras más importantes.

Los poliedros regulares juegan un papel preponderante en el famoso *Diálogo de Platón sobre la naturaleza,* ***en donde expone la asociación de los cuatro primeros poliedros regulares con la constitución de toda la materia: tierra, fuego, agua y aire. Considera Platón al dodecaedro como el quinto elemento, el Cosmos.***

Los modelos mostrados también pueden usarse para construir los cinco sólidos platónicos. De hecho, un proyecto interesante en su Liceo puede ser construir modelos a cierta escala de estos cuerpos y exponerlos a toda la comunidad. Actividad que se basa en conceptos geométricos elementales.

Actividades

1 **La fórmula de Euler para poliedros**. En los poliedros que se dan en el *gráfico* 19, cuenten el número de caras, vértices y aristas, y escriban los resultados en sus cuadernos (en una tabla similar a la N° 1).

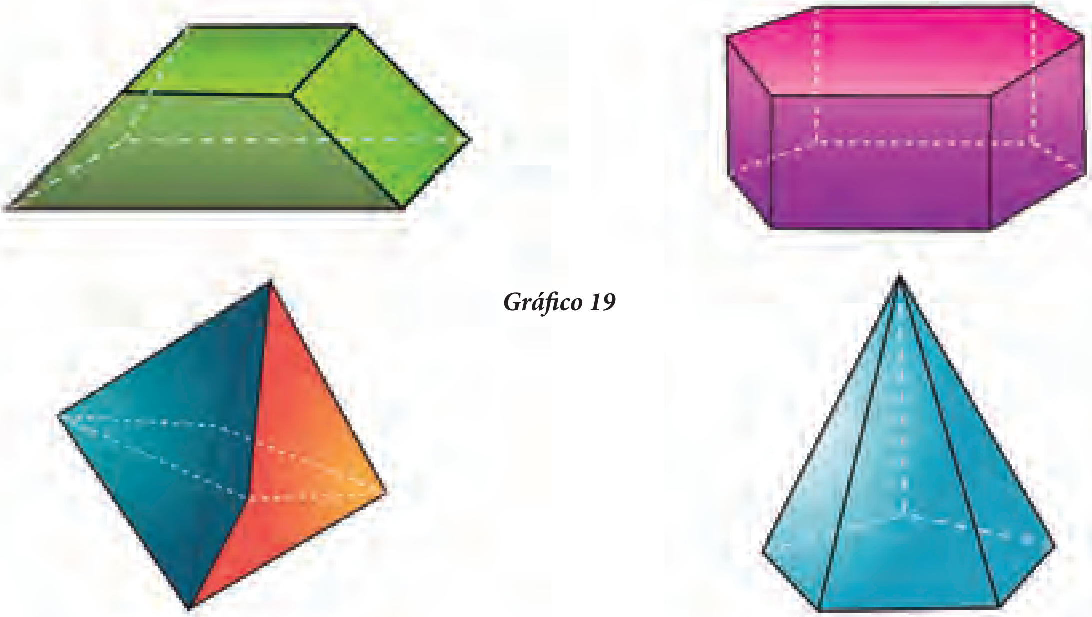


Gráfico 19

Ahora, procedan a realizar las siguientes operaciones para cada poliedro y anoten los resultados en la *tabla* 1:

- Sumen el número de vértices (V) más el número de caras (C).
- Sumen dos unidades al número de aristas (A).

Tabla 1. Fórmula de Euler para poliedros.

Poliedro	N° de caras C	N° de aristas A	N° de vértices V	$V+C$	$2+A$
1					
2					
3					
4					

¿Qué relación pueden establecer entre esos dos resultados? Podemos observar que para cada uno de esos poliedros convexos, se cumple que:

$$V + C = 2 + A$$

Esta relación se conoce como la **Fórmula de Euler** en honor al matemático suizo Leonhard Euler. Esta igualdad es cierta para todos los poliedros convexos y por tanto es un **Teorema**.

2 Euler y los poliedros regulares. En una actividad anterior, lograron demostrar que solo existen cinco poliedros regulares. Ahora queremos invitarles a demostrar esa afirmación, desde un punto de vista algebraico. Para ello, haremos uso de la fórmula de Euler que enunciamos en la actividad inmediatamente anterior.

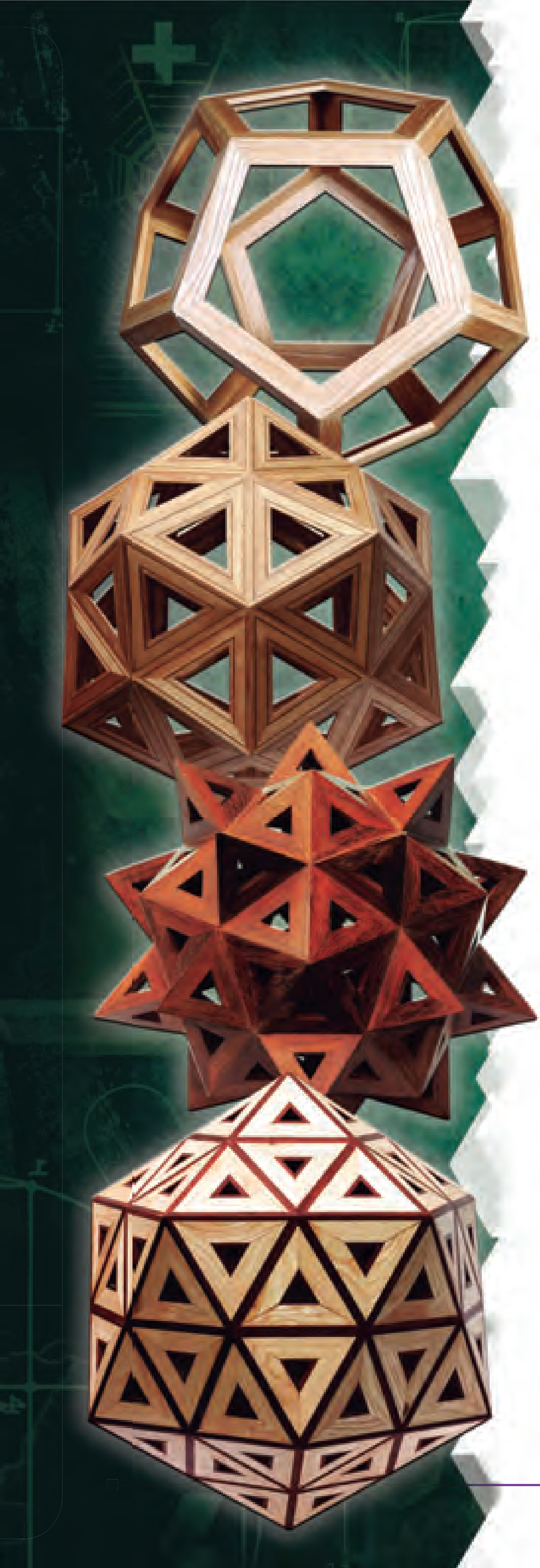
Consideremos un poliedro regular. Acordemos las siguientes identificaciones en el mismo:

C: número de caras
V: número de vértices
A: número de aristas
n: número de lados de cada cara
m: número de aristas concurrentes en un mismo vértice

Utilizando los cinco poliedros regulares, y las identificaciones dadas, copien y completen (en sus cuadernos) la *tabla* 2.

Tabla 2. Fórmula de Euler y los poliedros regulares.

Poliedro	C	A	V	n	m	$n \cdot C$	$m \cdot V$	$2 \cdot A$
Tetraedo								
Cubo								
Octaedro								
Dodecaedro								
Icosaedro								



¿Qué relación hay entre $n\,C$ y $2A$, en cada caso? ¿Y entre $m\ V$ y $2A$ en cada caso? Veamos:

$$n\,C = 2A \qquad (1)$$
$$m\,V = 2A \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que:

$$n\,C = m\,V$$

Si despejamos A de la ecuación (1) obtenemos que:

$$A = \frac{n\,C}{2}$$

Despejando V de la ecuación (2) y sustituyendo $2A$ según (1) nos queda:

$$V = \frac{2A}{m} = \frac{n\,C}{m}$$

Tenemos que la Fórmula de Euler es:

$$C + V = A + 2$$

Sustituyan en la Fórmula las expresiones para A y V que se han obtenido. Debe quedar:

$$C + \frac{n\,C}{m} = \frac{n\,C}{2} + 2$$

Si multiplicamos por $2m$ ambos miembros de la igualdad, obtendremos:

$$2m\,C + 2n\,C = mn\,C + 4m$$

Aplicando propiedades de la adición y sacando factor común, tendremos:

$$2m\,C + 2n\,C - mn\,C = 4m$$
$$C\big(2(m+n) - mn\big) = 4m$$

Despejando C de la igualdad anterior:

$$C = \frac{4m}{2(m+n) - mn}$$

Reflexionen por unos momentos y respondan junto a sus compañeras y compañeros las siguientes interrogantes:

- ¿Cuál es el menor número de lados de un polígono regular?
- ¿Cuál es el menor número de aristas que concurren en un vértice de un poliedro?

La respuesta es 3 en cada caso.

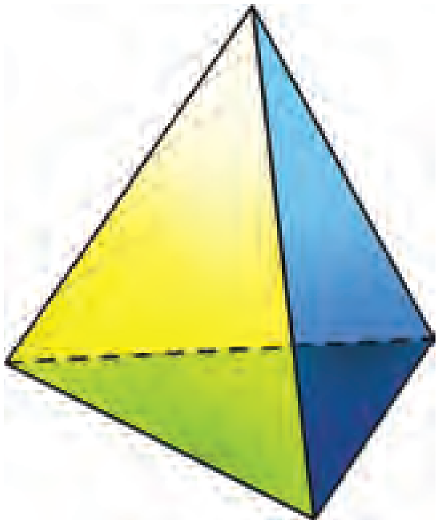
Actividades

Utilizando la expresión obtenida, consideremos cuántas caras tenemos si:

1. $n = 3, m = 3$

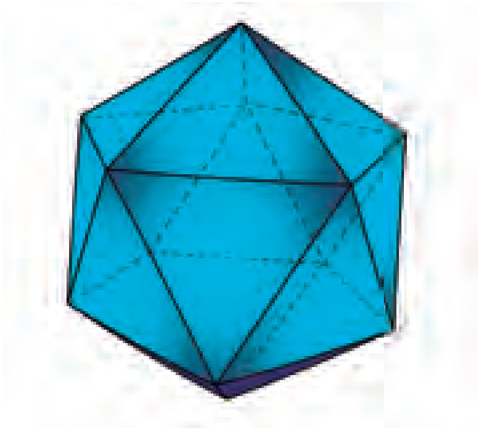
Si sustituyen los valores de m y n en la expresión que obtuvimos para C, tendremos que $C = 4$.

¿Qué poliedro se obtiene en este caso? Éste es el Tetraedro.



2. $n = 3$ y $m = 4$.

Se obtiene $C = 8$ y estaremos en presencia del Octaedro.

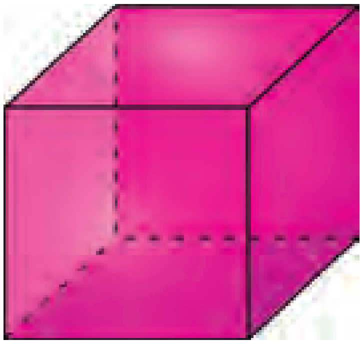


3 $n = 3$ y $m = 5$.

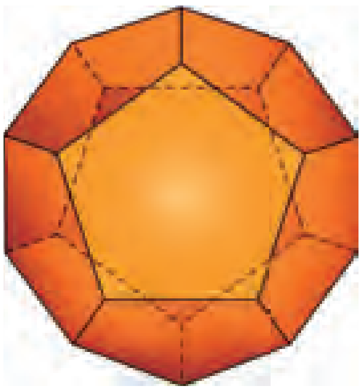
Obtenemos $C = 20$ y estaremos en presencia del Icosaedro.

4 ¿Qué sucederá si $n = 3$ y $m = 6$? ¿Obtendremos algún poliedro regular? Justifiquen la respuesta.

5 Consideremos ahora que el número de lados de la cara del poliedro sea un polígono regular de cuatro lados (cuadrado). Utilicemos el menor número de aristas que pueden concurrir en un vértice de un poliedro. ¿Qué ocurre si $n = 4$ y $m = 3$? El valor de C será igual a 6 y estaremos en presencia del Cubo o Hexaedro.



6 ¿Qué sucederá si $n = 4$ y $m = 4$? ¿Obtendremos algún poliedro regular? Justifiquen su respuesta.



7 Consideremos ahora que el número de lados de la cara del poliedro sea un polígono regular de cinco lados (pentágono). Utilicemos el menor número de aristas que pueden concurrir en un vértice de un poliedro. ¿Qué ocurre si $n = 5$ y $m = 3$? El valor de C será igual a 12 y estaremos en presencia del Dodecaedro.

8 ¿Será posible que el número de lados de la cara de un poliedro regular sea de seis lados (hexágono)? Prueben con $n = 6$ y $m = 3$. ¿Qué obtienen? ¿Qué concluyen? Han demostrado, entonces, algebraicamente, que solamente existen cinco poliedros regulares.

Los poliedros en el Neolítico

Tierra, fuego, universo, agua y aire. Sólidos regulares neolíticos de Escocia (Ashmolean Museum de Oxford).

Los sólidos Platónicos

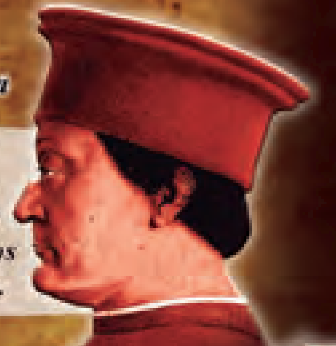
Platón

La cosmogonía poliédrica Pitagórica

Pitágoras dice que la tierra está hecha del cubo, el fuego de la pirámide (tetraedro), el aire del octaedro, el agua del icosaedro y del dedocaedro está compuesta la esfera del todo. (Aecio, citado en Guthrie, 1984).

Los poliedros de Piero della Francesca

Experto en relacionar los diversos poliedros; della Francesca obtuvo unos a partir de otros y los inscribió sucesivamente.



Los poliedros en el arte del siglo XX

Representados principalmente en las obras de Escher, Gaudí y Dalí.

della Francesca

Escher

Gaudí

Dalí

9 Radio comunitaria y soberanía

La radio, alcance máximo de transmisión y cobertura

La radio es un medio comunicacional que permite la transmisión, emisión y/o recepción de datos, signos o sonidos. La palabra *radio* proviene del latín *radius*, cuyo significado es *rayo de luz*. El nombre del aparato electrónico que se usa para escuchar música y/o noticias es un apócope de radiorreceptor (aparato que recibe rayos eléctricos y lleva información acústica). Es importante señalar que los radiorreceptores reciben rayos eléctricos desde otro aparato llamado radiotransmisor. Ese radiotransmisor es un punto de conexión electrónico que, con el apoyo de una antena o torre detransmisión, propaga ondas electromagnéticas de corto o largo alcance con información acústica.

El Estado venezolano, con el objetivo de **consolidar el proceso comunicacional independentista y soberano de nuestro país**, ha lanzado al espacio exterior el satélite artificial VENESAT-1, también conocido como Satélite Simón Bolívar, y ha recuperado la Compañía Anónima Nacional Teléfonos de Venezuela (CANTV), dos acciones sociopolíticas importantes para el apoyo e impulso a medios comunicacionales alternativos, tales como las radios y las televisoras comunitarias.

La Ley de Responsabilidad de Radio y Televisión, promulgada el año 2004, señala que estos medios deben difundir mensajes "dirigidos a contribuir con el desarrollo, la educación para la percepción crítica de los mensajes, el bienestar y la solución de problemas de la comunidad de la cual formen parte". Las Radios Comunitarias se convierten así en los dispositivos irradiadores de información útil e importante con los que cuenta la sociedad venezolana para contrarrestar y minimizar los procesos de alienación ideológica con la que se pretende privatizar la humanidad y la naturaleza en general, y así contribuir a la consolidación de la hegemonía popular mediante procesos educativos que liberen al oprimido de ideas antidialógicas, mediante el auge de la conciencia crítica y reflexiva.

En abril de 2012 el Ministerio del Poder Popular Para la Comunicación y la Información, entregó a representantes de 35 emisoras comunitarias, igual número de *kits* radiofónicos especiales para activar el sistema de interconexión nacional y 12 *kits* de equipos diversos para colectivos radiales. Con la entrega de estos equipos radiofónicos las radios comunitarias aumentan su alcance o radio de acción de $2\ km$ a $10\ km$ aproximadamente.

Los habitantes que se encuentran a una distancia menor o igual a $10\ km$ de una *Radio Comunitaria* podrán oír sus trasmisiones (ver *gráfico* 1). Quienes se encuentran a $10\ km$ de distancia están justo en la frontera del alcance de la radio, esta frontera se asocia a un concepto matemático muy importante: la **circunferencia**.

Pasemos a revisar este concepto, conocido por ustedes desde la Educación Primaria:

Gráfico 1. Alcance de una radio comunitaria en Petare

La circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano cuya distancia r a un punto C llamado centro es constante.

Si $P, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ son puntos de la circunferencia y si C es el centro de la misma, entonces:

$$CP = CP_1 = CP_2 = CP_3 = \cdots = CP_n = \cdots = r$$

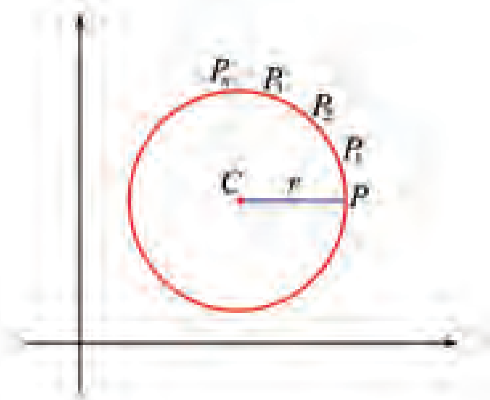


Gráfico 2. La circunferencia de centro **C** *y radio* **r**

Veamos ahora algunos teoremas que nos permitirán comprender a mayor profundidad tal lugar geométrico:

Teorema 1. Ecuación Ordinaria de la Circunferencia. La ecuación de la circunferencia de radio r, centro $C(h,k)$ y que contiene al punto $P(x,y)$, es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Demostración.

Sabiendo que, $C(h,k)$ es el centro y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia (ver *gráfico* 2), la distancia de C a P es:

$$CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras

Con lo cual:

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Por ser $CP = r$

Así:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad

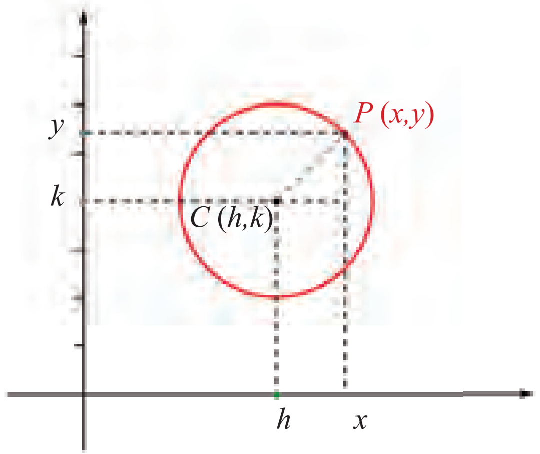
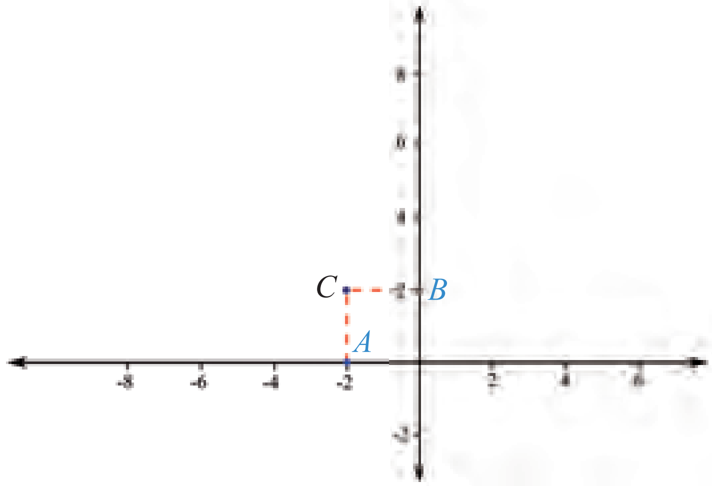


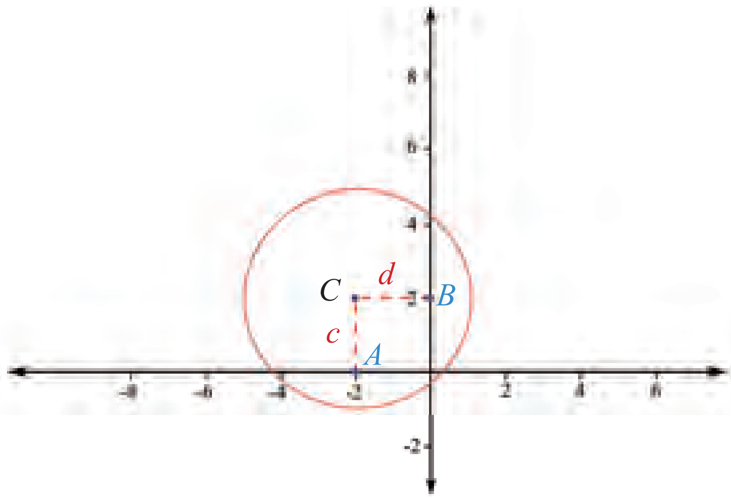
Gráfico 3. Punto P(x,y) de la circunferencia de centro C(h,k)

Veamos en los *gráficos* 4 y 5, un ejemplo de cómo graficar una circunferencia de radio r y centro $C(h,k)$. Consideremos la circunferencia en la que la medida de su radio es 3 y el centro es el punto de coordenadas $C(-2,3)$.



En un sistema de coordenadas ubicamos el punto $C(-2,3)$.

Gráfico 4



Con el compás hacemos centro en C con una abertura de radio 3 unidades y trazamos la circunferencia.

Gráfico 5

La ecuación ordinaria de la circunferencia que acabamos de representar se obtiene sustituyendo $r=3$ y $C(-2,3)$ en $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$:

$$3^2=(x-(-2))^2+(y-3)^2$$

De la expresión anterior se tiene que:

$$9=(x+2)^2+(y-3)^2$$

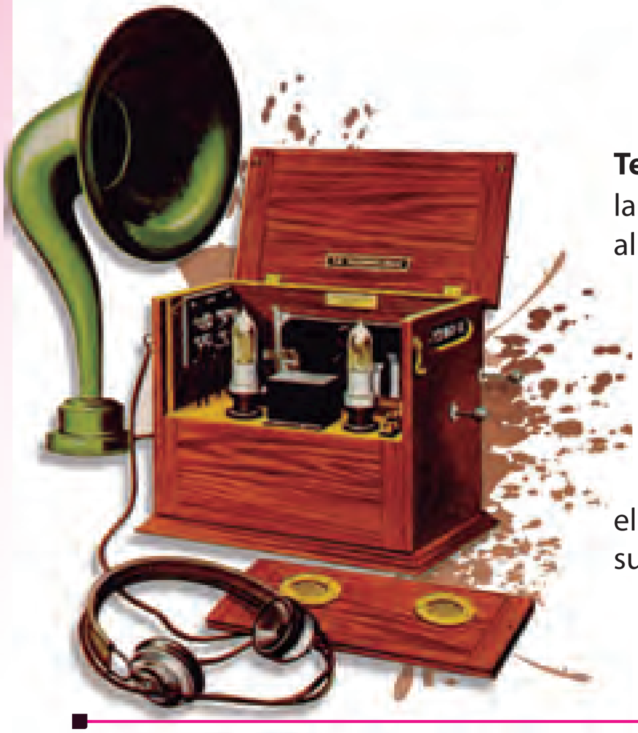
Grafiquen y hallen la ecuación ordinaria en cada uno de los casos que se presentan a continuación.

$r=5$, $C(2,1)$	$r=6$, $C(-3,-4)$	$r=6$, $C(0,-2)$	$r=1$, $C(0,0)$
$r=$ [illegible], $C(-7,5)$	$r=$ [illegible], $C(3,0)$	$r=$ [illegible], $C(1,-8)$	$r=\frac{1}{3}$, $C(4,-4)$
$r=\sqrt{5}$, $C(-1,2)$	$r=\sqrt{3}$, $C(0,-5)$	$r=\sqrt{9}$, $C(2,6)$	$r=\sqrt{7}$, $C(10,9)$

Teorema 2. Ecuación Canónica de la Circunferencia: la circunferencia de radio r, centro en el origen $O(0,0)$ y que pasa por el punto $P(x,y)$, tiene por ecuación:

$$r^2=x^2+y^2$$

Demostración: resulta sencillo sabiendo que $C(h,k)=O(0,0)$ y sustituyendo esos valores en $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, de acuerdo con el teorema 1.



Teorema 3. Ecuación General de la Circunferencia: la circunferencia de radio r, centro $C(h,k)$ y que contiene al punto $P(x,y)$, tiene por ecuación:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \text{ donde } \begin{cases} D=-2h \\ E=-2k \\ F=h^2+k^2-r^2 \end{cases}$$

La demostración la pueden realizar si desarrollan el teorema 1 de la circunferencia. Háganla con ayuda de sus compañeras y compañeros.

Ecuación General de una circunferencia conociendo su centro y su radio

Hallemos ahora la ecuación general de la circunferencia de centro $C(-2,3)$ y cuyo radio es $r=3$.

En el último ejercicio resuelto vimos que: $(x+2)^2+(y-3)^2=9$.

Ahora calculamos los cuadrados indicados: $x^2+4x+4+y^2-6y+9=9$.

Restamos 9 a ambos miembros de la ecuación, ordenamos y agrupamos los términos semejantes: $x^2+y^2+4x-6y+4+9-9=9-9$.

Obtendremos así la ecuación general de la circunferencia de centro $C(-2,3)$ y radio $r=3$: $x^2+y^2+4x-6y+4=0$.

Actividades

1 ¿Cómo harían para determinar la ecuación de la circunferencia si solamente tienen como información el centro y un punto de ésta? Discútanlo con sus compañeras y compañeros.

2 Hallen la ecuación general de las siguientes circunferencias de las cuales se da su centro C y un punto P:

$C(0,1), P(3,-1)$	$C(-2,-1), P(0,4)$	$C(-5,2), P(0,0)$	$C(4,-2), P(1,3)$

3 En el *gráfico* 6 los puntos A, B y C representan los lugares desde donde trasmiten tres radios comunitarias; si sus coordenadas en el plano cartesiano son las que muestra el *gráfico* 6 y si las líneas verticales y horizontales contiguas tienen una separación de 1 unidad, calculen el alcance y la ecuación general de la circunferencia que se corresponde con el alcance máximo de cada emisora radial. Además, investiguen qué sucede cuando las señales de dos emisoras que están en la misma frecuencia se cruzan.

Gráfico 6. Alcance de tres radios comunitarias

4) Determinen el centro y radio de la circunferencia a partir de su ecuación general.

Ahora tenemos un nuevo problema, debemos hallar el centro y radio de una circunferencia cuya ecuación general es $x^2+y^2+2x+10y+10=0$. Veamos.

$$\left(x^2+2x\right)+\left(y^2+10y\right)+10-10=0-10$$

Agrupamos los términos con la misma variable y restamos el término independiente a ambos miembros de la igualdad

$$\left(x^2+2x\right)+\left(y^2+10y\right)=-10$$

Operamos en $\mathbb{R}$

$$h=\frac{2}{2}=1 \text{ con lo cual } (1)^2=1$$

Ahora completamos cuadrados. Esto se hace dividiendo entre dos el coeficiente que acompaña a la x y elevándolo al cuadrado

$$k=\frac{10}{2}=5 \text{ y ahora } (5)^2=25$$

Hacemos algo similar con el coeficiente de y

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2+10y+25\right)=-10+25+1$$

Sumamos los valores dentro de los paréntesis al igual que al otro lado de la igualdad

$$(x+1)^2+(y+5)^2=4^2$$

Factorizamos y operamos del otro lado de la igualdad

Con todo lo anterior hemos determinado que la circunferencia tiene centro: $C(-1,-5)$ y $r=4$.

A partir de las ecuaciones generales de las circunferencias dadas, hallen la ecuación ordinaria y determinen su centro y longitud del radio.

$x^2+y^2+4x+9y-15=0$	$x^2+y^2+16x+y-6=0$	$x^2+y^2-6x-2y+8=0$
$x^2+y^2+x+y-23=0$	$x^2+y^2+2x-2y+2=0$	$x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{3}y+4=0$

Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales

Debemos ahora deducir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,-1)$, $B(5,0)$ y $D(3,2)$ no colineales, es decir, que los tres puntos no están sobre una misma recta.

Primero debemos desarrollar las ecuaciones generales utilizando cada punto:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-4x+2y+5=r^2 \quad (a)$$
$$(x-5)^2+(y-0)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-10x+25=r^2 \quad (b)$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-4y+13=r^2 \quad (c)$$

Restamos la ecuación (*c*) a las ecuaciones (*a*) y (*b*), obtenemos así las ecuaciones marcadas con (*d*) y (*e*).

$$\begin{array}{rr} \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4x+2y+5=\cancel{r^2} & (a) \\ \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x-4y+13=\cancel{r^2} & (c) \\ \hline 2x+6y-8=0 & (d) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-10x+25=\cancel{r^2} & (b) \\ \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x-4y+13=\cancel{r^2} & (c) \\ \hline -4x+4y+12=0 & (e) \end{array}$$

Con esto formamos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x+6y-8=0 & (d) \\ -4x+4y+12=0 & (e) \end{cases}$$

El cual es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x+6y=8 \\ -4x+4y=-12 \end{cases}$$

Para obtener sus soluciones podemos multiplicar la ecuación (d) por 2:

$$2(2x+6y)=2(8)$$

y la sumamos a la ecuación (e). Con esto se cancela la variable x.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4x+12y=16 \\ -4x+\ \ 4y=-12 \end{cases} \\ \hline 16\,y=\ 4 \end{array}$$

Así obtenemos el valor de y, $y=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. Finalmente, sustituimos este valor en las ecuaciones (d) o (e) y obtenemos que $x=\frac{13}{4}$. Por tanto, el punto de coordenadas $C\left(\frac{13}{4},\frac{1}{4}\right)$ es el centro de la circunferencia dada.

Para determinar el radio solamente hallamos la distancia de C a cualquiera de los tres puntos. En nuestro caso lo haremos con respecto al punto $A(2,-1)$, para ello nos basaremos en el teorema 1.

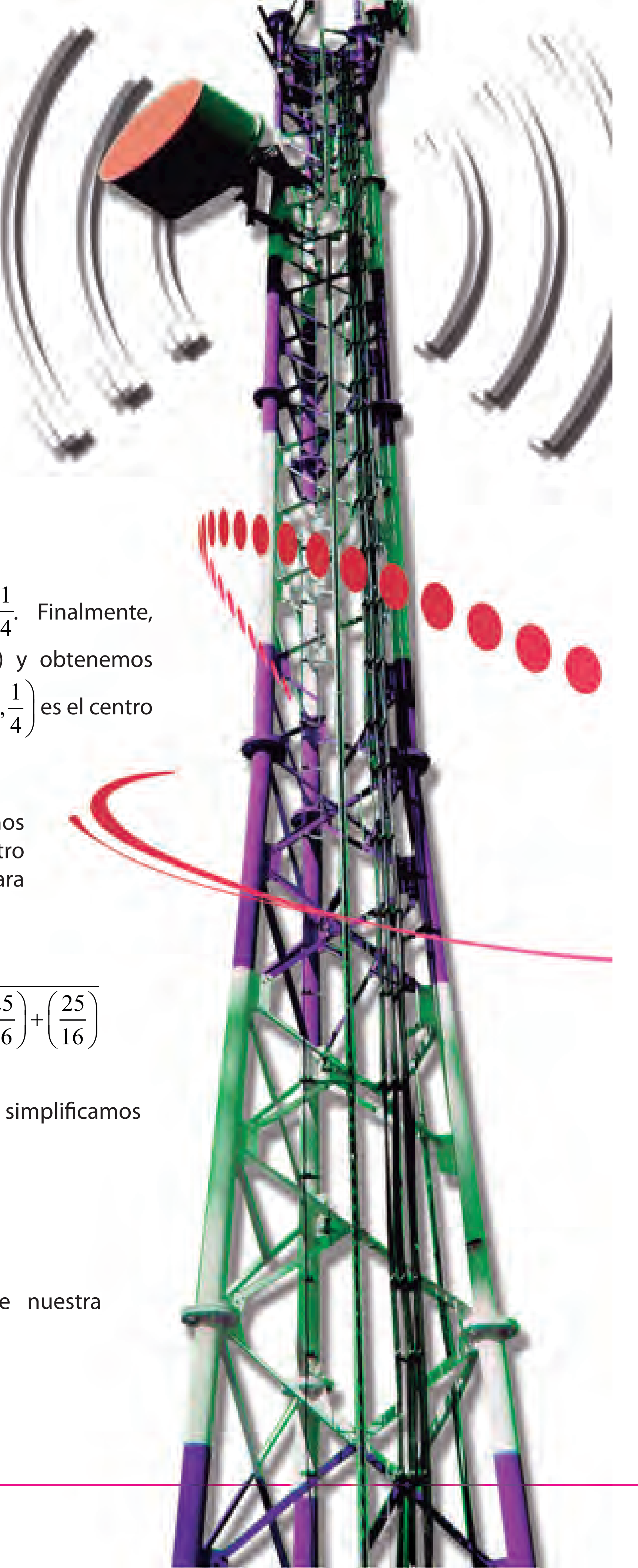
$$r=\sqrt{\left(\frac{13}{4}-2\right)^2+\left(\frac{1}{4}+1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{25}{16}\right)}$$

Operamos en la cantidad subradical y simplificamos aplicando las propiedades de los radicales:

$$r=\sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{25}{16}\right)}=\sqrt{\left(\frac{50}{16}\right)}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{16}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Así, hemos determinado que el radio de nuestra circunferencia es:

$$r=\frac{5\sqrt{2}}{4}\Rightarrow r\approx 1,7677.$$



Actividades

1 A la fotografía que se muestra en el *gráfico* 7 se superpuso un sistema de coordenadas. Ésta representa una parte de los Valles del Tuy en el Estado Miranda. Supongamos que los consejos comunales de la zona se han organizado para construir una radio comunitaria de manera que los puntos $A(0,30), B(40,-30)$ y $C(-50,20)$ se encuentren en el límite de alcance de la radio. Con estos datos, determinen el alcance máximo (radio) que necesitará dicha emisora y la ubicación de la misma.

Gráfico 7. Una imagen satelital de Los Valles del Tuy (Estado Miranda)

2 ¿Qué otros métodos existen para hallar la solución que obtuvieron antes?

3 En el *gráfico* 8 se muestra la entrada de una fachada cuyos arcos tienen forma de semicircunferencia. Las circunferencias que contienen a los arcos izquierdo y derecho son tangentes a la que contiene al arco central. Si se toma como origen del sistema coordenado el punto P y los datos que aporta la figura obtengan la ecuación de cada una de las circunferencias.

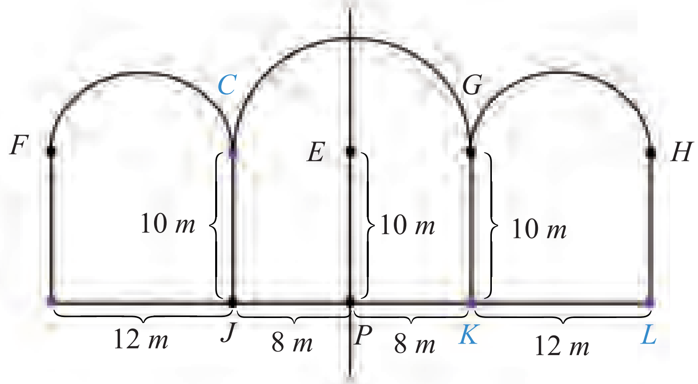


Gráfico 8. Modelo de una fachada

4 Hallen la ecuación ordinaria de la circunferencia si los extremos de uno de sus diámetros tienen coordenadas $P\,(5,4)$ y $T\,(-1,2)$.

Investigación

En su parroquia, ¿existen Radios Comunitarias? En tal caso, indaguen el alcance de las mismas y representen esta información con apoyo de un mapa o imagen satelital.

¿Cuál es el significado de las siglas AM, FM, UHF y VHF?

Discutan, además, las ventajas de que su comunidad cuente con una radio. Por ejemplo, sus proyectos en Matemática, e incluso, en otras áreas, pueden divulgarse en medios como éste.

La Parábola

En Venezuela existen emisoras con alcance nacional tales como: *Radio Nacional de Venezuela* (RNV), *YVKE Mundial*, entre otras. Estas emisoras realizan sus trasmisiones emitiendo señales a través antenas repetidoras; en algunos casos hacen uso de los satélites, como nuestro *Satélite Simón Bolívar* el cual emite la señal a otra antena repetidora.

Las antenas repetidoras poseen forma parabólica, debido a que las parábolas tienen la extraordinaria propiedad de permitir la concentración de las señales de onda en un punto llamado **foco**.

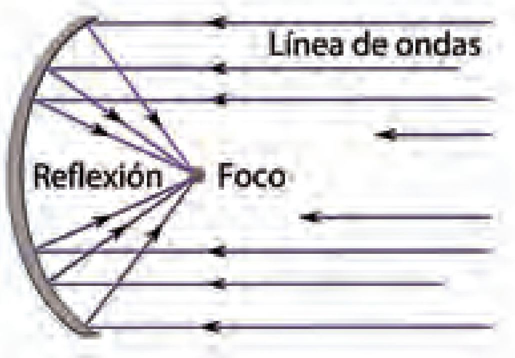


Gráfico 9. Antenas repetidoras (izquierda) y superficie parábolica (derecha)

La **Parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano cuyas distancias a una recta l llamada directriz y un punto F llamado foco que no pertenece a la recta l, son iguales.

Sean los puntos $P, P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ de una parábola y sean los puntos $E, E_1, E_2, E_3, ..., E_n, ...$ pertenecientes a la directriz tales que:

$$FP = PE,\ FP_1 = P_1E_1,\ FP_2 = P_2E_2,\ FP_3 = P_3E_3 = ... = FP_n = P_nE_n,\ ...,\ F... = ...\ ...$$

Entonces, la recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje focal**. El segmento $\overline{DP}$ cuyos extremos son dos puntos de la parábola, contiene al foco y es perpendicular al eje focal se llama **lado recto**. El punto V, donde el eje focal corta a la parábola, se llama **vértice de la parábola** (ver *gráfico* 10).

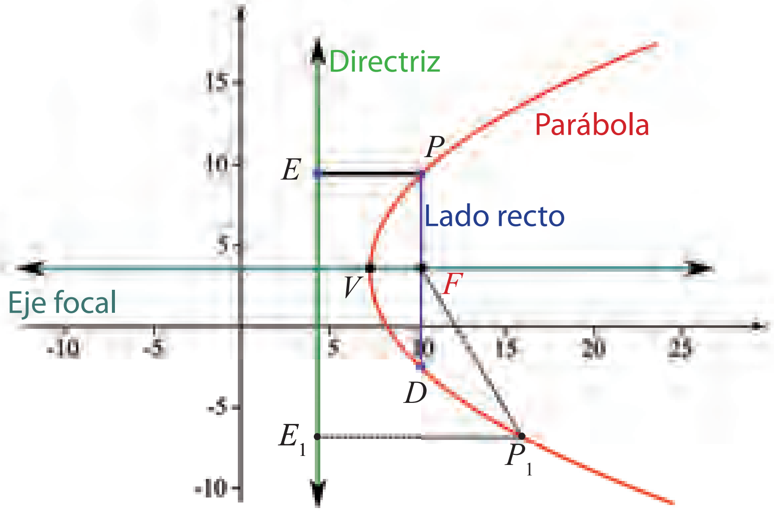


Gráfico 10. La parábola

Las propiedades de la parábola no solamente se aprovechan en el ámbito de la radiodifusión sino en todo tipo de telecomunicaciones, como las televisoras, la internet, la telefonía móvil y fija, en la construcción de lentes para telescopios, lupas, reflectores, faros, entre otras.

De seguidas exponemos algunas propiedades fundamentales de la parábola (Teoremas 4, 5, 6 y 7).

Teoremas: Ecuación Ordinaria de la Parábola

Teorema 4. La parábola de vértice $V(h,k)$ que contiene al punto $P(x,y)$ y cuyo *eje focal* es paralelo al *eje y* tiene por ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (ver *gráfico* 11).

Su foco es $F(h,f)$.

La directriz es la recta $y = 2k - f$.

$p = f - k$

- Si $p > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba.
- Si $p < 0$, entonces la parábola abre hacia abajo.
- $|p|$ es la longitud entre el foco y el vértice.

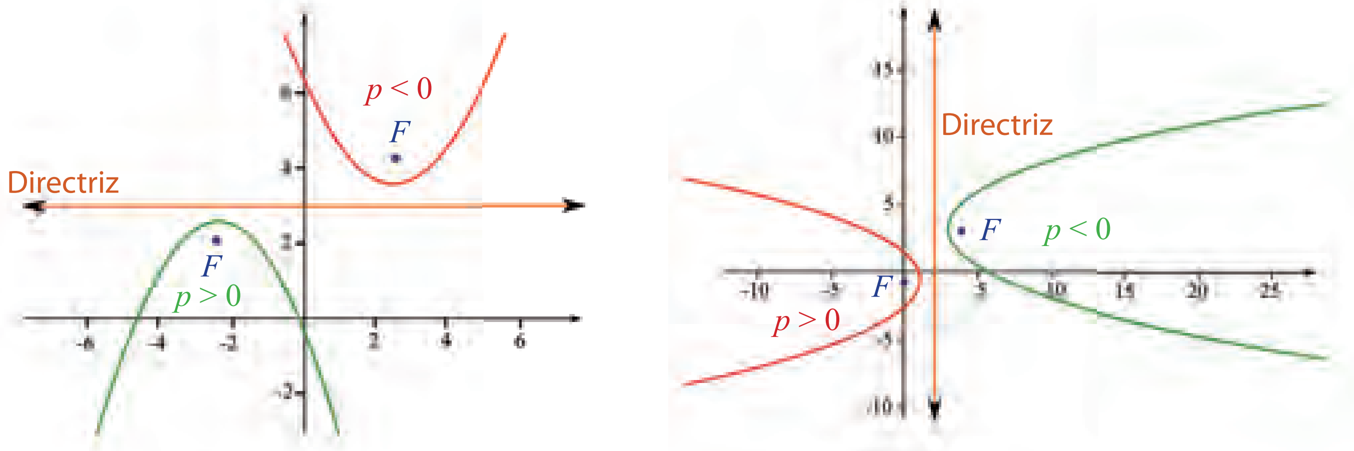


Gráfico 11. Parábola con directriz horizontal (izquierda) y directriz vertical (derecha)

Teorema 5. La parábola de vértice $V(h,k)$ que contiene al punto $P(x,y)$ y cuyo *eje focal* es paralelo al *eje x* tiene por ecuación: $(y-k)^2=4p(x-h)$.

Su foco es $F(f,k)$.

La directriz es la recta $x=2h-f$.

$p=f-h$

- Si $p>0$, entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p<0$, entonces la parábola abre hacia la izquierda.
- $|p|$ es la longitud entre el foco y el vértice.

Investiguen junto a sus compañeras y compañeros cómo se realiza la demostración correspondiente a la *ecuación ordinaria de la parábola*. Para ello se debe tomar en cuenta la definición de parábola y el teorema de distancia entre dos puntos.

La ecuación ordinaria de la parábola, foco y ecuación de la directriz conociendo su vértice y un punto de ella

Veamos un ejemplo. Necesitamos hallar la ecuación ordinaria de la parábola sabiendo que su eje focal es paralelo al *eje y*, contiene al punto $M(0,3)$ y su vértice es $V(2,1)$.

Como su *eje focal* es paralelo al *eje y*, se hace uso del primer teorema sobre parábolas

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación obtenemos el valor de p

$$(0-2)^2 = 4p(3-1) \Rightarrow (-2)^2 = 4p(2) \Rightarrow 4 = 8p$$

Como $p > 0$, entonces esta parábola abre hacia arriba

$$p = \frac{1}{2}$$

Apoyándonos en el Teorema 4 obtenemos la Ecuación Ordinaria de la Parábola

$$(x-2)^2 = 4\frac{1}{2}(y-1)$$
$$(x-2)^2 = 2(y-1)$$

El foco tiene la forma $F(h,f)$. Por tanto, hallamos f a partir de la ecuación $p = f - k$

$$f = p + k \Rightarrow f = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow f = \frac{3}{2}$$

El foco tiene por coordenadas

$$F\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

Ahora obtenemos la ecuación de la directriz utilizando la ecuación $y = 2k - f$

$$y = 2(1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = \frac{1}{2}$$

Actividad

Determinen, en cada caso que sigue, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la ecuación ordinaria de las parábolas.

- Vértice $V(-5,0)$, contiene al punto $B(1,1)$, *eje paralelo* al *eje y*.
- Vértice $V(-2,4)$, contiene al punto $K(-3,1)$, *eje paralelo* al *eje x*.
- Vértice $V(2,-1)$, contiene al punto $A(4,-5)$, *eje paralelo* al *eje y*.
- Vértice $V(0,0)$, contiene al punto $S(3,2)$, *eje paralelo* al *eje y*.

Otros teoremas sobre la Parábola

Teorema 6. Ecuación Canónica de la Parábola: La parábola que contiene al punto $P(x,y)$, de vértice en el origen $O(0,0)$ y:

i) Su eje es paralelo al *eje* y tiene por ecuación: $x^2 = 4py$. Además,

- Su foco es $F(0,p)$, su directriz es la recta $y = -p$. Si $p > 0$, abre hacia arriba, y si $p < 0$ abre hacia abajo.

ii) Su eje es paralelo al *eje* x tiene por ecuación: $y^2 = 4px$. Además,

- Su foco es $F(p,0)$, su directriz es la recta $x = -p$. Si $p > 0$, abre hacia la derecha, y si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

En ambos casos $|p|$ es la longitud entre el foco y el vértice.

Realiza la demostración de ambos teoremas haciendo la sustitución de los valores del vértice en los teoremas (4) y (5) sobre parábolas.

Teorema 7. **Ecuación General de la Parábola**. La ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde:

- $A = 0, \quad C \neq 0 \quad y \quad D \neq 0$, es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente al *eje* x.
- $A \neq 0, \quad C = 0 \quad y \quad E \neq 0$, es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente al *eje* y.

Esta demostración se puede realizar sin gran dificultad si se desarrolla el producto notable en cada uno de los teoremas de las ecuaciones ordinarias, les invitamos a realizarla y a discutirla con sus compañeras, compañeros, docentes u otras personas con conocimientos del tema.

Ecuación General de la Parábola conociendo su vértice y un punto de ella

Expongamos otro ejemplo. En esta ocasión debemos hallar la ecuación general de la parábola sabiendo que su eje focal es paralelo al *eje y*, contiene al punto $M(0,3)$ y su vértice es $V(2,1)$. En tal caso, debemos:

Escribir la ecuación ordinaria de la misma: $(x-2)^2 = 2(y-1)$

Desarrollar los productos notables $x^2 - 4x + 4 = 2y - 2$

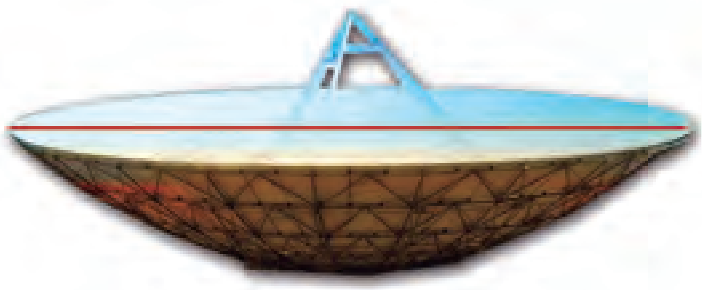
Hacer que uno de los miembros de la igualdad sea 0 $x^2 - 4x - 2y + 4 + 2 = 0$

Con esto, la ecuación general de la parábola es: $x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$

Actividades

1 Deduzcan la ecuación general de cada parábola en las actividades planteadas en la página 219.

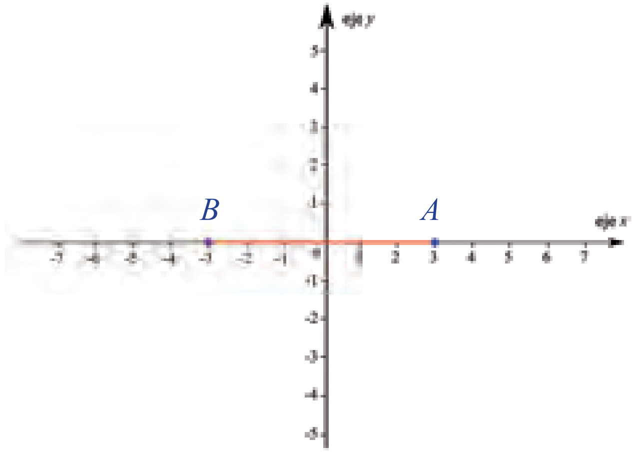
2 Para determinar la ecuación general de una parábola asociada a un paraboloide podemos seguir los pasos que mostramos a continuación, –el paraboloide es una superficie que se obtiene al rotar una parábola sobre su eje focal. Por ejemplo, una antena parabólica tiene esta forma.



Suponemos que el vértice está en el origen del sistema coordenado.

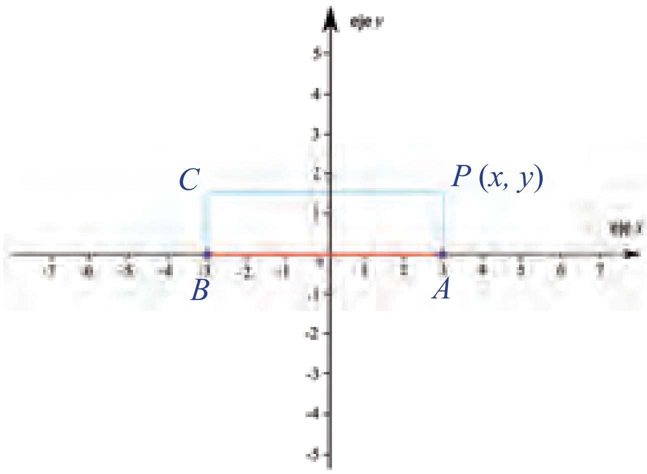
Luego medimos el “ancho” de la antena.

Esa medida la dividimos entre dos y ubicamos los puntos A y B a la derecha e izquierda del origen O separados de éste por una distancia igual al cociente obtenido.



Luego medimos la altura del paraboloide, colocando el vértice de ésta sobre una superficie plana y midiendo la altura que hay desde tal superficie hasta el borde de la antena.

La altura que obtuvimos es la ordenada de dos puntos de la parábola.



De esta manera tenemos el vértice y un punto por donde pasa la parábola. Solamente resta aplicar el teorema 5 para determinar p y la *ecuación general de la parábola*.

$$x^2 = 4py$$
$$y^2 = 4px$$

Ecuación Ordinaria de una parábola, las coordenadas de su vértice y foco a partir de su *ecuación general*

Veamos un ejemplo. Dada la ecuación $y^2-8x-2y=-17$.

Como el término que le da el grado a esta ecuación es y^2, entonces el *eje focal* es paralelo al *eje* x.

Ahora,

Agrupamos los términos semejantes y escribimos la ecuación como sigue	$\left(y^2-2y\right)=-17+8x$
Completamos el cuadrado (revisen el ejemplo dado en la sección sobre la circunferencia)	$\left(y^2-2y+1\right)=-17+8x+1$
Factorizamos y operamos. Ésta es la Ecuación Ordinaria de la parábola	$\left(y-1\right)^2=8x-16=8\left(x-2\right)$
Nuestro vértice es entonces	$V\left(2,1\right)$
Como $p>0$ la parábola abre hacia la derecha	$4p=8 \quad \Rightarrow \quad p=2>0$
Como el eje focal es paralelo al *eje* x, aplicamos la fórmula del teorema 5 para hallar el valor de f despejando dicho término	$p=f-h \quad \Rightarrow \quad f=p+h$ $f=2+2=4 \quad \Rightarrow \quad f=4$
Nuestro foco tiene por coordenadas	$F\left(4,1\right)$
De acuerdo con el teorema 5, la ecuación de la directriz es:	$x=2h-f$ $x=2\left(2\right)-4 \Rightarrow x=0$
Por tanto, la directriz es la recta	$x=0$

Veamos un ejemplo en el cual graficaremos la parábola a partir de su ecuación general. Consideremos que $y^2 - 8x - 2y = -17$.

Se debe encontrar la ecuación ordinaria de dicha parábola, buscar su vértice, foco y directriz, lo cual ya hicimos en el ejemplo anterior

E.O. $(y-1)^2 = 8(x-2)$

Vértice: $V(2,1)$

Foco: $F(4,1)$

Directriz: $x = 0$

Despejamos y

$$y = \pm\sqrt{8x-16} + 1$$

Se deben graficar en el sistema de coordenadas cartesianas los puntos F y V, al igual que la directriz (ver *gráfico* 12).

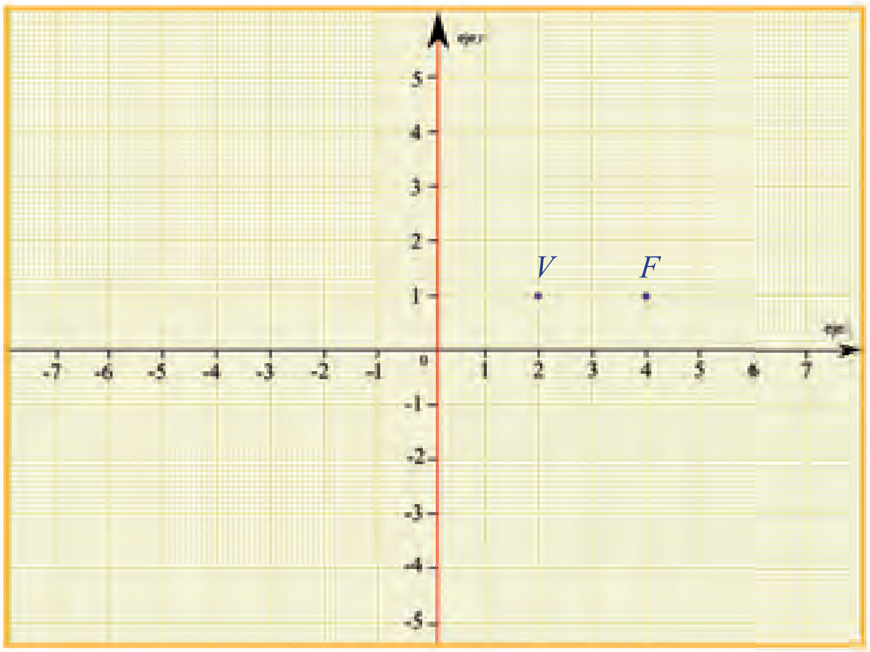


Gráfico 12. Foco y vértice

Tabla 1 cuando se toma el signo **positivo** de la raiz $y = \sqrt{8x-16} + 1$	
x	y
3	3,83
4	5
5	5,9

Tabla 2 cuando se toma el signo **negativo** de la raiz $y = -\sqrt{8x-16} + 1$	
x	y
3	-1,83
4	-3
5	-3,9

Como p es mayor que cero, entonces la parábola abre hacia la derecha. Debemos construir dos tablas (1 y 2), ya que la raíz adopta tanto el signo positivo como negativo. El menor valor de la parábola en el *eje x* está determinado por la abscisa del vértice.

Ahora, en el *gráfico* 11 ubicamos dichos puntos en el sistema.

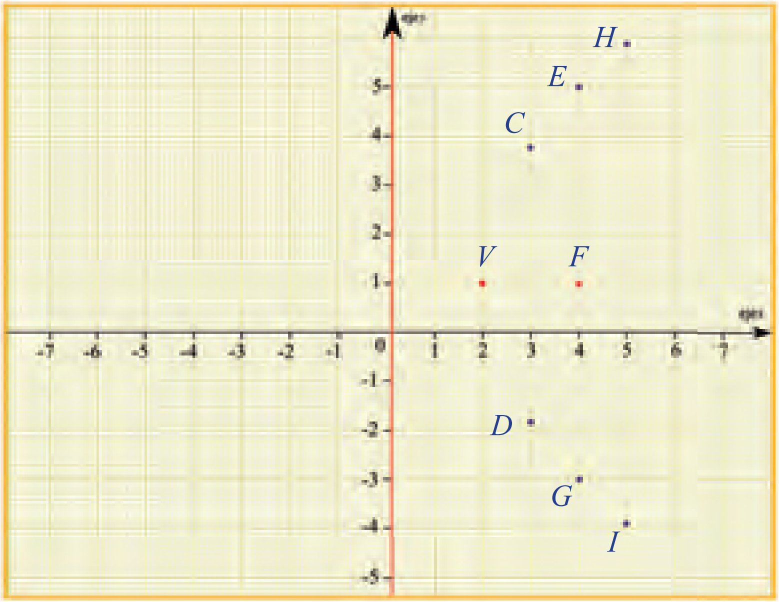


Gráfico 13

Unimos los puntos y obtenemos la gráfica de la parábola.

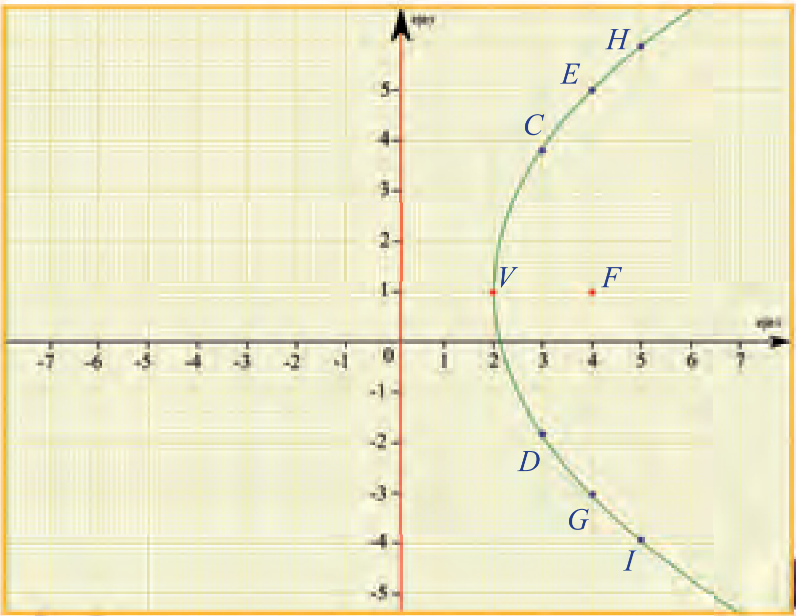


Gráfico 14

Emisora comunitaria La Griteña 97.3 FM

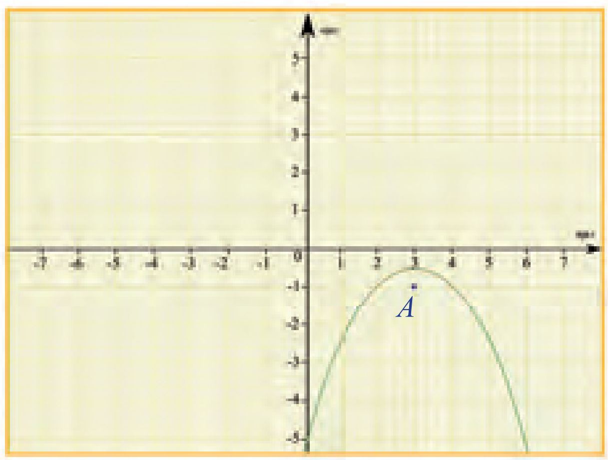
Actividades

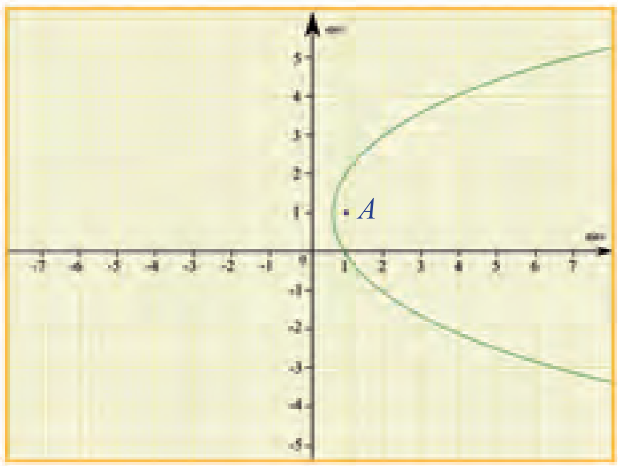
1 Tracen las gráficas de las cónicas trabajadas anteriormente.

2 Un faro posee un reflector parabólico de $10\ cm$ de diámetro y una profundidad de $6\ cm$, ¿cuál es la ecuación de una parábola asociada? Además, determinen en qué punto se debe colocar la bombilla.

3 ¿Cuál es la ecuación general de una parábola de vértice en el origen y cuya directriz es la recta $y-4=0$?

4 ¿Cuál es la ecuación general de las parábolas que se muestran a continuación?





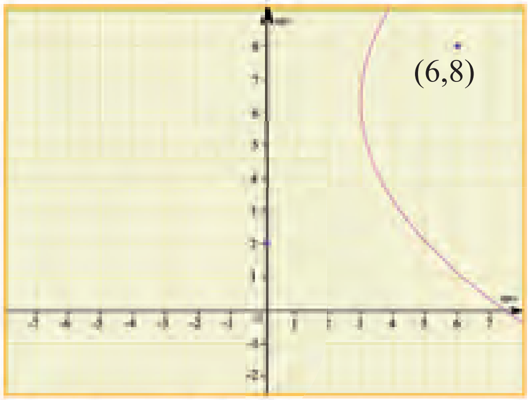
5 Dadas las siguientes ecuaciones generales de las parábolas, hallen su ecuación ordinaria, coordenadas de su foco, vértice y ecuación de su directriz. Además, grafiquen cada una de las parábolas.

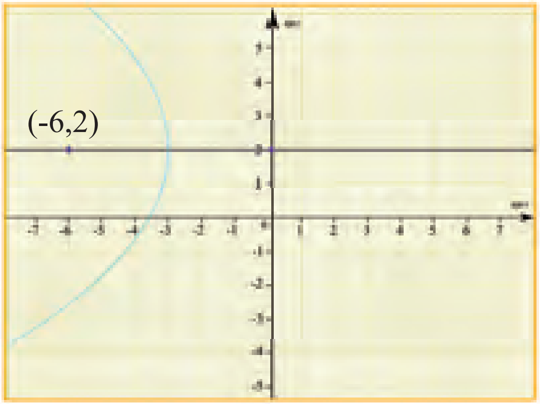
$x^2+2x-y+5=0$	$x^2-5x-y+20=0$
$x^2+6x-4y+17=0$	$y^2+2y-2x-5=0$
$y^2-6y-x+11=0$	$y^2-4y-4x+10=0$
$x^2-x-4y-\frac{5}{4}=0$	$y^2+6y-8x-7=0$
$x^2+2x-4y-6=0$	$x^2+\frac{2}{3}x-2y+\frac{2}{9}=0$

6) Tracen las gráficas de las parábolas $y = Ax^2 + 6x + 9$, donde el parámetro A toma los valores $-3, -2, -1, 1, 2, 3$. Discutan con sus compañeras y compañeros el comportamiento de las distintas gráficas. ¿A qué conclusión llegan sobre la influencia que ejerce el parámetro A en la forma de la parábola?

7) Tracen las gráficas de las parábolas $y = x^2 + 6x + T$ donde el parámetro T toma los valores $-9, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Discutan con sus compañeras y compañeros el comportamiento de las distintas gráficas. ¿A qué conclusión llegan sobre la influencia que ejerce el parámetro T en la forma de la parábola?

8) Hallen las ecuaciones generales y ordinarias de las siguientes gráficas de las parábolas:





10 Trayectoria de cuerpos celestes

La elipse y la descripción de la trayectoria de los planetas de nuestro Sistema Solar

La idea que hoy tenemos del Universo ha sido variante, en especial sobre la "posición" de *La Tierra* en el *Sistema Solar*. Por ejemplo, **Claudio Ptolomeo**, matemático, astrónomo y geógrafo griego (siglo *II* antes de Cristo), generó un modelo del Universo que se conoció como *Modelo Geocéntrico del Universo*. En él, La Tierra permanece en posición estacionaria, mientras que la Luna, los Planetas y el Sol describen órbitas circulares a su alrededor. **Galileo Galilei** (1564-1642), matemático, físico y astrónomo nacido en Italia, avaló teóricamente el sistema copernicano del Universo publicado en siglo *XVI* por *Nicolás Copérnico* en su obra *Revolutionibus Orbium Caelestrum*; allí se declara que el Sol, y no *La Tierra*, estaba ubicado en el centro de nuestro actual Sistema Solar, en contraposición al modelo Geocéntrico.

En el año 1609, el astrónomo alemán **Johannes Kepler**, demostró que el Sol no se encontraba en el centro del Sistema, sino que se ubicaba en uno de los focos de la figura geométrica conocida como **elipse**, sustentado en observaciones del astrónomo danés **Tycho Brahe**, sobre la posición de **Marte**. De su descubrimiento, **Johannes Kepler** formuló tres leyes, la primera de ellas expresa que: "*Los planetas se mueven alrededor del Sol en elipses, estando el Sol en uno de sus focos*".

Para comprender el movimiento de los planetas en torno al Sol es importante conocer la elipse, uno de los conceptos a tratar en esta lección.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos F y F' distintos, llamados focos, es constante. Esto es, si $P, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ son puntos pertenecientes a la elipse, entonces:

$$PF + PF' = P_1F + P_1F' = P_2F + P_2F' = P_3F + P_3F' = \cdots = P_nF + P_nF' = 2a$$

Los puntos: V y V' se denominan vértices de la elipse, el punto C se llama centro de la elipse.

Los segmentos: $\overline{DE}$, $\overline{VV'}$ y $\overline{GH}$ tienen por nombre: **lado recto, eje mayor y eje menor** respectivamente (*gráfico* 1).

La recta que contiene a los focos se llama *eje focal*. Y la recta que contiene al eje menor se denomina *eje normal*, por ser perpendicular a la primera. Además: $FF' = 2c$, $VV' = 2a$, $HG = 2b$ y $DE = \frac{2b^2}{a}$.

La **excentricidad** está dada por $e = \frac{c}{a}$ tal que $0 < e < 1$.

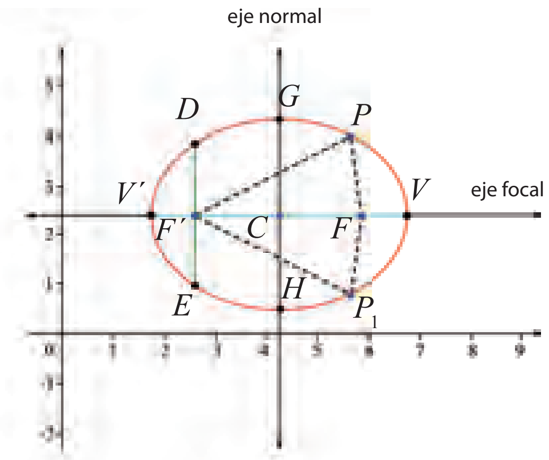


Gráfico 1. La elipse de centro C y vértices V y V´

Consideremos una elipse de centro $C(h,k)$ en la que las coordenadas de los focos son: $F'(h-c,k)$ y $F\ (h+c,k)$. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse (veamos el *gráfico* 2).

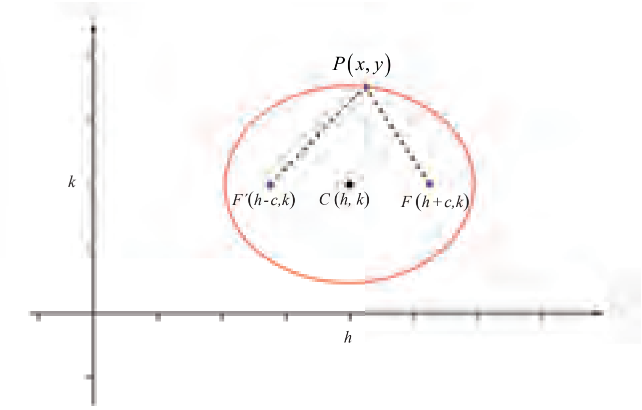


Gráfico 2. Una elipse de centro $C(h,k)$ y focos $F\ (h+c,k)$ y $F'\ (h\text{-}c,k)$

Por la definición de elipse tenemos que:

$$F'P + FP = 2a \qquad (1)$$

Por el teorema de distancia entre dos puntos, establecemos la distancia de P a los focos

$$\begin{aligned} F'P &= \sqrt{\left(x-(h-c)\right)^2 + (y-k)^2} \\ FP &= \sqrt{\left(x-(h+c)\right)^2 + (y-k)^2} \end{aligned} \qquad (2)$$

Sustituimos en (1) lo obtenido en (2)

$$\sqrt{\left(x-(h-c)\right)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{\left(x-(h+c)\right)^2 + (y-k)^2} = 2a \qquad (3)$$

Reordenamos en (3) el paréntesis de la primera raíz y la despejamos

$$\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{\left((x-h)-c\right)^2 + (y-k)^2}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\left[\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2 + (y-k)^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{\left((x-h)-c\right)^2 + (y-k)^2}\right]^2$$

Desarrollamos los cuadrados y cancelamos en ambos miembros los términos iguales

$$((x-h)+c)^2+\cancel{(y-k)^2}=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}+((x-h)-c)^2+\cancel{(y-k)^2} \quad (4)$$

La expresión (4) queda de la forma:

$$((x-h)+c)^2-((x-h)-c)^2=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2} \quad (5)$$

Desarrollando el primer miembro de la igualdad nos queda que:

$$((x-h)+c)^2-((x-h)-c)^2=\cancel{(x-h)^2}+2c(x-h)+\cancel{c^2}-\cancel{(x-h)^2}+2c(x-h)-\cancel{c^2}$$

Por tanto

$$((x-h)+c)^2-((x-h)-c)^2=4c(x-h) \quad (6)$$

Sustituimos (6) en (5) y nos queda la expresión:

$$4c(x-h)=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

Lo cual es equivalente a:

$$4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}=4a^2-4c(x-h)$$

Ahora, dividimos ambos miembros entre $4a$ y elevamos al cuadrado

$$\left[\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}\right]^2=\left[a-\frac{c(x-h)}{a}\right]^2$$

Desarrollamos ambos miembros de la igualdad

$$((x-h)-c)^2+(y-k)^2=a^2-2c(x-h)+\frac{c^2(x-h)^2}{a^2}$$

Desarrollamos los cuadrados del primer miembro y simplificamos la expresión

$$(x-h)^2 - \cancel{2c(x-h)} + c^2 + (y-k)^2 = a^2 - \cancel{2c(x-h)} + \frac{c^2(x-h)^2}{a^2}$$

Reordenamos convenientemente: $$(x-h)^2 - \frac{c^2(x-h)^2}{a^2} + (y-k)^2 = a^2 - c^2$$

Realizamos adición de fracciones: $$\frac{(a^2-c^2)(x-h)^2}{a^2} + (y-k)^2 = a^2 - c^2$$

Dividimos ambas expresiones entre b^2 sabiendo que $b^2 = a^2 - c^2$ $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Esto que terminamos de realizar nos permite enunciar el siguiente Teorema.

Teorema 1. Ecuación Ordinaria de la Elipse: La elipse que contiene al punto $P(x,y)$, de centro $C(h,k)$ y *eje focal*:

i) Paralelo al *eje* x, tiene por ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Las coordenadas de los vértices son: $V(h+a,k)$; $V'(h-a,k)$

Las de sus focos son: $F(h+c,k)$; $F'(h-c,k)$

Y sus extremos del eje menor son: $A(h,k+b)$; $A'(h,k-b)$

ii) Paralelo al *eje* y, tiene por ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Las coordenadas de sus vértices son: $V(h,k+a)$; $V'(h,k-a)$

Las de sus focos son: $F(h,k+c)$; $F'(h,k-c)$

Y sus extremos del eje menor son: $A(h+b,k)$; $A'(h-b,k)$

En ellas, las variables a, b y c están relacionadas por la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$.

La ecuación ordinaria de una elipse

En una elipse las coordenadas de sus vértices son $V(4,4)$ y $V'(-3,4)$, y las de sus focos son $F(3,4)$ y $F'(-1,4)$. Determinemos su centro, la longitud de su eje menor, las coordenadas de los extremos de su eje menor, su excentricidad, y la ecuación ordinaria. Además, construiremos una representación gráfica.

Primero debemos fijarnos en las coordenadas x e y de los vértices o los focos, ya que si las coordenadas de x son iguales, entonces el eje focal es paralelo o está en el *eje* y. En cambio, si las coordenadas de y son iguales, entonces el eje focal es paralelo o está en el *eje* x.

Al comparar las coordenadas de V y V' notamos que las coordenadas iguales son las de y, por tanto, el eje focal está o es paralelo al *eje* x.

$$V(4,4) \text{ y } V'(-3,4)$$

Ahora hallamos las coordenadas del centro C. Como C equidista de V y V', y, además, C equidista de F y F', entonces C es el punto medio de los mismos.

$$C(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$C(h,k)=\left(\frac{4-3}{2},\frac{4+4}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{1}{2},4\right)$$

Como $CV=CV'=a$, aplicamos la fórmula correspondiente:

$$a=CV=\sqrt{\left(4-\frac{1}{2}\right)^2+(4-4)^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

Con lo cual:

$$a=\frac{7}{2}$$

Como la distancia de $CF=CF'=c$ aplicamos la fórmula correspondiente:

$$c=CF=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+(4-4)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

Quedando que:

$$c=\frac{3}{2}$$

Por el teorema anterior sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$. Así que solo resta obtener el valor de b.

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}$$

Así:

$$b = \sqrt{10}$$

La longitud del eje menor es:

$$AA' = 2\sqrt{10}$$

Las coordenadas de los extremos del eje menor están dadas por $A(h, k+b)$ y $A'(h, k-b)$, por tanto al sustituir obtenemos las expresiones:

$$A\left(\frac{1}{2}, 4+\sqrt{10}\right) \;\; y \;\; A'\left(\frac{1}{2}, 4-\sqrt{10}\right)$$

Tenemos que la excentricidad de la parábola está dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{7} \Rightarrow e \approx 0,428$$

Como el eje focal está o es paralelo al *eje* x tenemos por el teorema 1 que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sustituyendo los valores correspondientes y resolviendo, nos queda que la ecuación ordinaria de nuestra elipse es:

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y-4)^2}{10} = 1$$

Para graficar esta elipse en un sistema de coordenadas cartesiano podemos hacer lo que sigue.

De la ecuación ordinaria obtenida antes, "despejaremos" a y:

(1) Ecuación ordinaria obtenida

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}}+\frac{(y-4)^2}{10}=1$$

(2) Restamos $\frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49}$ a ambos miembros de la ecuación

$$\frac{(y-4)^2}{10}=1-\frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49}$$

(3) Multiplicamos ambos miembros por diez

$$(y-4)^2=10\left[\frac{49-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49}\right]$$

(4) Calculamos la raíz cuadrada a ambos miembros

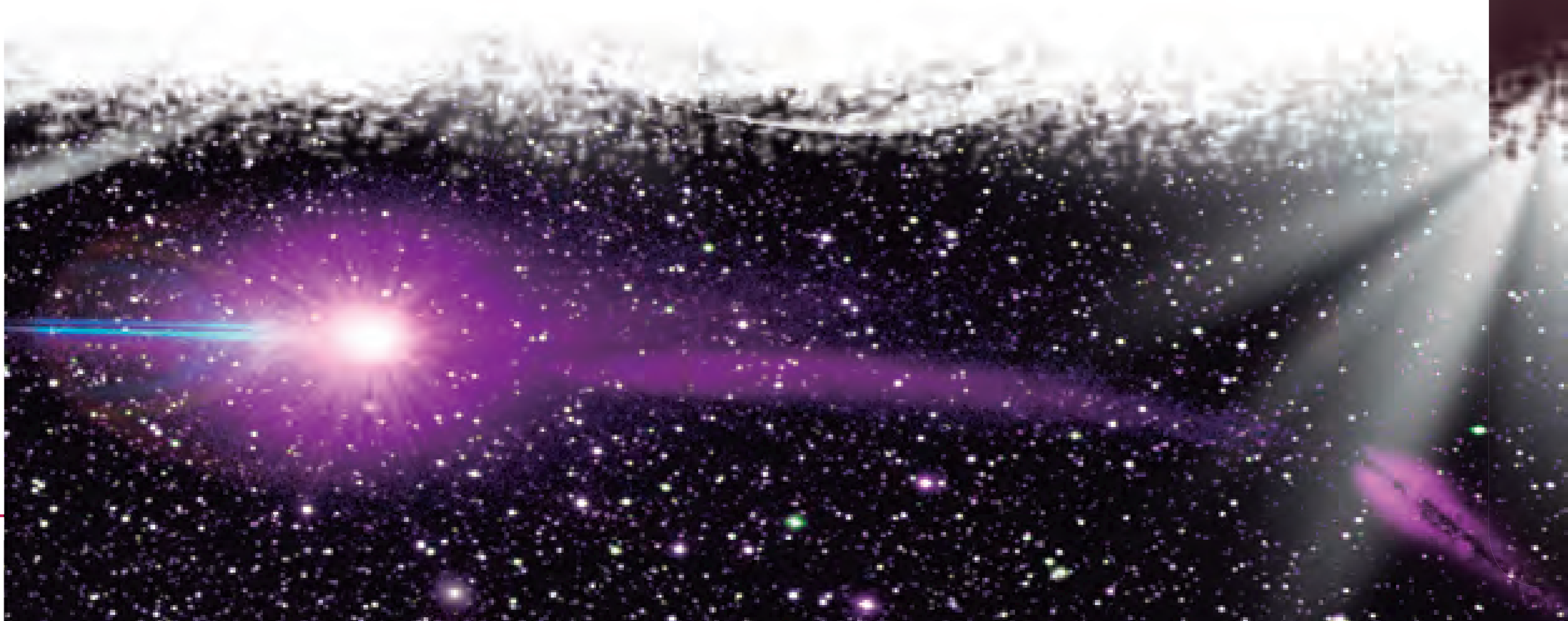
$$y-4=\pm\sqrt{10\left[\frac{49-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49}\right]}$$

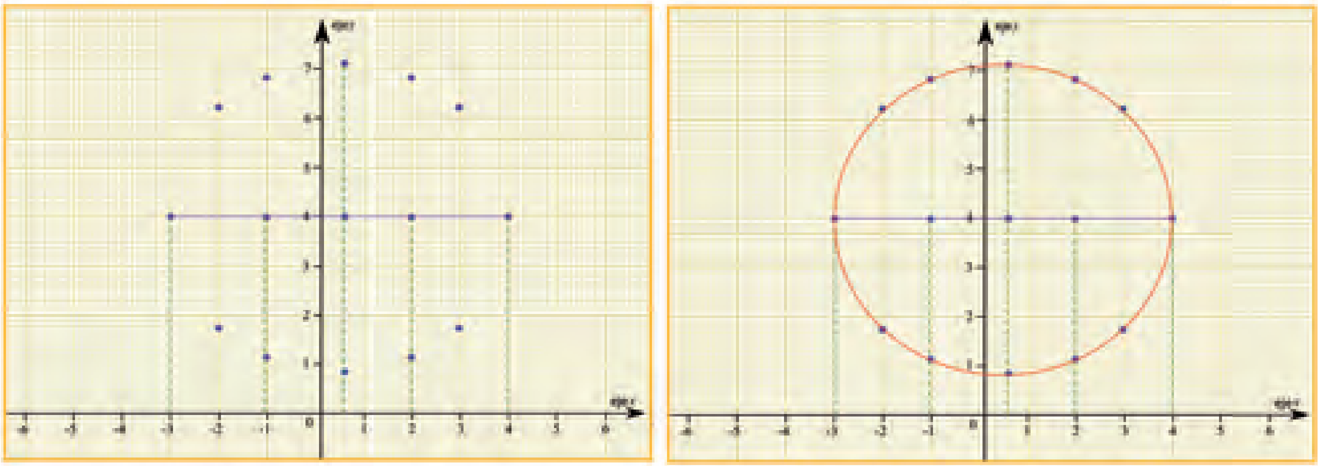
(5) Y sumamos cuatro a ambos miembros

$$y=\pm\sqrt{10\left[\frac{49-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49}\right]}+4$$

Por las coordenadas de los vértices se puede deducir qué valores de x podemos tomar, por ello sabemos que $-3<x<4$.

Finalmente, representamos los puntos de la tabla.





x	-2	-1	0	1	2	3
y (valores positivos de la raíz)	6,21	6,86	7,1	7,1	6,86	6,21
y (valores negativos de la raíz)	1,79	1,14	0,87	0,87	1,14	1,79

Gráfico 3. Representación de la elipse $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}}+\frac{\left(y-4\right)^2}{10}=1$ *. Puntos obtenidos (izquierda) y elipse (derecha)*

A continuación les mostramos las coordenadas de los vértices y focos de ocho elipses, determinen en cada uno de los casos, su centro, excentricidad, longitud de sus ejes, coordenadas de los extremos de su eje menor, su ecuación ordinaria y gráfica.

$V(1,3),\ V'(1,-1)$ y $F(1,2),\ F'(1,0)$	$V(3,5),\ V'(3,-2)$ y $F(3,4),\ F'(3,1)$
$V(0,3),\ V'(-\frac{3}{2},3)$ y $F(-\frac{1}{2},3),\ F'(-1,3)$	$V(5,0),\ V'(1,0)$ y $F(3,0),\ F'(2,0)$
$F(-2,2),\ F'(-\frac{3}{2},2)$ y $V(-\frac{1}{2},2),\ V'(-3,2)$	$V(0,7),\ V'(0,4)$ y $F(0,\frac{13}{2}),\ F'(0,\frac{9}{2})$
$V(7,0),\ V'(4,0)$ y $F(\frac{13}{2},0),\ F'(\frac{9}{2},0)$	$V(7,0),\ V'(-7,0)$ y $F(3,0),\ F'(-3,0)$

Conversen sus soluciones con sus compañeras y compañeros.

Teorema 2. Ecuación Canónica de la Elipse:

La elipse que contiene al punto $P(x,y)$, centro en el origen $O(0,0)$ y eje focal:

- Paralelo al *eje x*, tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- Paralelo al *eje y*, tiene por ecuación: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Movimiento de Traslación de La Tierra

El movimiento que realiza La Tierra alrededor del Sol se denomina movimiento de traslación, según datos del Centro de Investigación y Desarrollo Astronómico de Venezuela, CIDA (*http://www.cida.gob.ve*), cuenta con algunas características tales como: es el único planeta con vida en el Sistema Solar, su diámetro es de 12.756 *kilómetros*. Se traslada alrededor del Sol a una distancia media de 150 millones de *km* (lo cual es conocido como la unidad astronómica). Además, completa una vuelta alrededor del Sol en 365 días y 6 horas, y su período de rotación es de 23 horas 56 minutos. Si se fijan en la imagen que les presentamos, notarán que la mayor y menor distancia de la Tierra al Sol "no son muy distintas".

Gráfico 4. La trayectoria de la tierra alrededor del Sol (arriba) y el cometa C/1996 B2 (abajo)

Hallen la ecuación ordinaria de la elipse que describe La Tierra en su movimiento de traslación, si el centro de dicha elipse está en el origen del sistema coordenado y los vértices se encuentran a una distancia igual a la mostrada en la imagen. Incluso, determinen las coordenadas del Sol, de los extremos del eje menor y la longitud de los distintos ejes.

En el año de 1996, el japonés Yuji Hyakutake descubrió un nuevo cometa, designado como cometa C/1996 B2 (Hyakutake). Este cometa se pudo observar desde el mes de marzo hasta el mes de mayo de 1996. Su trayectoria es elíptica: la longitud de su semieje mayor es de **2349,02 UA** y su excentricidad es igual a **0,995086**. Si consideramos al Sol en uno de los focos de la elipse que describe, determinen la ecuación ordinaria, las coordenadas del Sol, las coordenadas de los vértices y la longitud del eje menor.

Otro teorema importante sobre las elipses es el siguiente:

Teorema 3. Ecuación General de la Elipse: Sea la ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si los coeficientes A y C son del mismo signo, entonces, dicha ecuación representa: (a) una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, (b) un punto o (c) ningún lugar geométrico.

Este teorema se puede demostrar desarrollando los cuadrados y ordenando de manera conveniente. Les invitamos a realizar esta demostración junto a sus compañeras y compañeros.

La ecuación general de una elipse

A modo de ejemplo, hallaremos la ecuación general de la elipse que trabajamos anteriormente. Recordemos que su ecuación ordinaria es:

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y-4)^2}{10} = 1$$

En primer lugar, operamos con el primer sumando

$$\frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{10} = 1$$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, $mcm\,(49,10) = 490$ y lo multiplicamos por ambos miembros de la igualdad

$$490 \cdot \frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{49} + 490 \cdot \frac{(y-4)^2}{10} = 490 \cdot 1$$

Simplificando nos queda que:

$$40\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 49(y-4)^2 = 490$$

Desarrollamos los cuadrados:

$$40\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 49\left(y^2 - 8y + 16\right) = 490$$

Operamos

$$40x^2-40x+10+49y^2-392y+784=490$$

Reordenamos y agrupamos los términos semejantes

$$40x^2+49y^2-40x-392y+(10+784-490)=0$$

Por tanto, nuestra ecuación general es:

$$40x^2+49y^2-40x-392y+304=0$$

En los siguientes ejercicios, determinen las coordenadas de los vértices, focos, centro, coordenadas de los extremos del eje menor, la excentricidad, la longitud de los distintos *ejes y* la ecuación general de la elipse; además, construyan su gráfica.

$\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$	$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{2}=1$	$(x+7)^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$
$\frac{(x+4)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$	$\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{(y-5)^2}{5}=1$	$\frac{(x+3)^2}{8}+\frac{(y-5)^2}{3}=1$
$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$	$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$	$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$

A partir de los datos presentados en la siguiente tabla hallen la longitud del eje menor, calculen la ecuación general de la elipse descrita por la trayectoria de los planetas suponiendo que el centro del sistema coordenado es el centro de la elipse.

Planeta	Semieje Mayor expresado en Millones de kilómetros	Excentricidad
Mercurio	57,9	0,2056
Venus	108,2	0,0068
La Tierra	149,6	0,0167
Marte	227,9	0,0934
Júpiter	778,3	0,0484
Saturno	1427	0,0560
Urano	2869	0,0461
Neptuno	4497,1	0.0100

Fuente: Riddle, D. (1997). Geometría Analítica, México, International Thomson Editores, S.A de C.V.

La Hipérbola

No solo los planetas describen un movimiento elíptico alrededor del Sol sino que existe una gran cantidad de cometas cuya órbita es elíptica. El cometa Halley, por ejemplo, será visible desde La Tierra en el año 2061, de acuerdo a los datos suministrados por el CIDA. Pero existen otros cometas cuya trayectoria no es elíptica sino más bien parabólica o hiperbólica. Un cometa de trayectoria hiperbólica es definido por Radpath (2004) como un cometa “cuya órbita alrededor del Sol tiene una excentricidad mayor que $1{,}0$”. Este mismo autor señala que los cometas pueden ser puestos en órbitas hiperbólicas después de su paso por Júpiter, tal como sucedió con el cometa Lexell en el año de 1779.

Ahondemos entonces en el conocimiento sobre la hipérbola.

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tal que el valor absoluto de las diferencias de sus distancias con respecto a dos puntos F y F', llamados focos, es constante. Esto es, si $P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ son puntos de la hipérbola, entonces:

$$\left|PF - PF'\right| = \left|P_1F - P_1F'\right| = \left|P_2F - P_2F'\right| = \cdots = \left|P_nF - P_nF'\right| = \cdots = 2a$$

La recta que contiene a los focos se llama **eje focal**, las intersecciones del eje focal con la hipérbola se llaman **vértices** y se denotan por V y V'. El segmento $\overline{VV'}$ se denomina **eje transverso**. El punto medio de $\overline{VV'}$ se llama **centro** C. La mediatriz de $\overline{VV'}$ se llama **eje normal**. El segmento $\overline{PG}$ perpendicular al eje focal en F se llama **lado recto**. El segmento $\overline{AA'}$ se llama **eje conjugado**. Además:

$VV' = 2a$, $FF' = 2c$ y $AA' = 2b$. La excentricidad está dada por $e = \dfrac{c}{a}$ tal que $e > 1$.

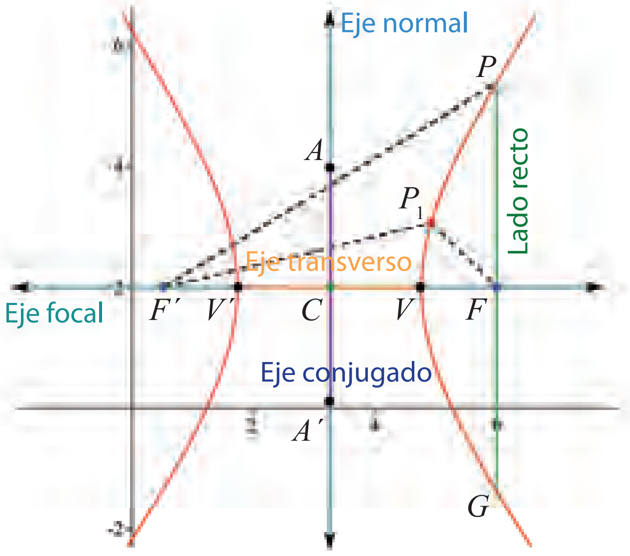


Gráfico 5. La hipérbola

Teorema 4. Ecuación Ordinaria de la Hipérbola:

La hipérbola que contiene al punto $P(x,y)$, tiene centro $C(h,k)$ y eje focal:

i) Paralelo al *eje* x, tiene por ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

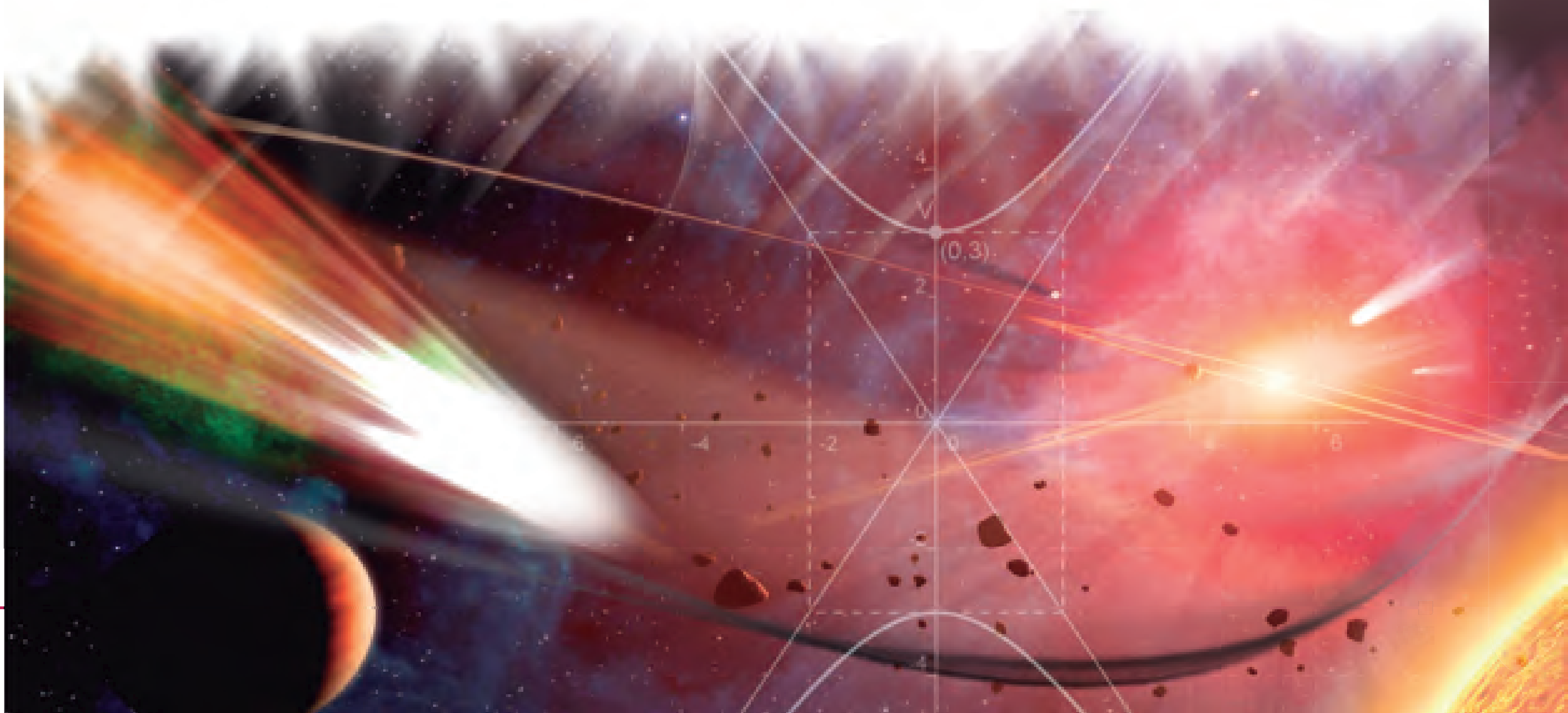
- Las coordenadas de sus vértices son: $V(h+a,k)$ y $V'(h-a,k)$
- Las de sus focos son: $F(h+c,k)$ y $F'(h-c,k)$
- Y las de los extremos del eje conjugado: $A(h,k+b)$ y $A'(h,k-b)$

ii) Paralelos al *eje* y, tiene por ecuación: $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

- Las coordenadas de sus vértices son: $V(h,k+a)$ y $V'(h,k-a)$
- Las de sus focos son: $F(h,k+c)$ y $F'(h,k-c)$
- Y las de los extremos del eje conjugado $A(h+b,k)$ y $A'(h-b,k)$

En ellas, las variables a, b y c están relacionadas por la ecuación $c^2=b^2+a^2$.

La demostración de este teorema se puede realizar de forma similar que el teorema anterior, los invitamos a realizarla y discutirla con sus compañeras y compañeros.



La ecuación ordinaria de una hipérbola

Veamos un ejemplo: en una hipérbola las coordenadas de sus vértices son $V(3,2)$ y $V'(2,2)$, las de sus focos son $F(4,2)$ y $F'(1,2)$. Deduzcamos las coordenadas de su centro, su excentricidad, las coordenadas de los extremos de su eje conjugado y su eje transverso, su ecuación ordinaria y gráfica.

Primero que nada debemos fijarnos en las coordenadas x e y de los vértices o los focos, ya que si las coordenadas de x son iguales, entonces el eje focal es paralelo o está en el *eje* y. En cambio, si las coordenadas de y son iguales, entonces el eje focal es paralelo o está en el *eje* x.

Como las coordenadas y de los vértices son iguales, entonces el eje focal está o es paralelo al *eje* x.

$$V(3,2) \text{ y } V'(2,2)$$

Ahora buscamos las coordenadas del centro C. Como C equidista de V y V', así como de F y F', entonces C es el punto medio de los mismos

$$C(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$C(h,k)=\left(\frac{1+4}{2},\frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{5}{2},2\right)$$

Como la distancia de $CV=CV'=a$ aplicamos la fórmula correspondiente.

$$a=CV=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+(2-2)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Por tanto

$$a=\frac{1}{2}$$

Como la distancia de $CF=CF'=c$ aplicamos la fórmula correspondiente

$$c=CF=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+(2-2)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

Quedando que:

$$c=\frac{5}{2}$$

La excentricidad está dada por:

$$e=\frac{c}{a}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5\ \Rightarrow\ e=5$$

Como $c^2=a^2+b^2$, hallamos el valor de b.

$$b=\sqrt{c^2-a^2}\ \Rightarrow\ b=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{24}{4}}=\sqrt{6}$$

Así:

$$b=\sqrt{6}$$

La longitud del eje conjugado es:

$$AA'=2\sqrt{6}$$

Las coordenadas de los extremos del eje conjugado están dadas por $A(h,k+b)$ y $A'(h,k-b)$, por tanto, al sustituir tenemos que:

$$A\left(\frac{5}{2}\ ,\ 2+\sqrt{6}\right)\ y\ A'\left(\frac{5}{2}\ ,\ 2-\sqrt{6}\right)$$

Como el eje conjugado es paralelo al *eje y*, tiene por ecuación:

$$x=\frac{5}{2}$$

Como el eje focal está o es paralelo al *eje x*, tenemos, por el teorema 4, que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Sustituyendo los valores correspondientes y resolviendo nos queda que la ecuación ordinaria de nuestra hipérbola es:

$$\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-2)^2}{6}=1$$

Para representar la hipérbola se desarrolla un procedimiento análogo al que mostramos para la elipse (veamos el *gráfico* 6).

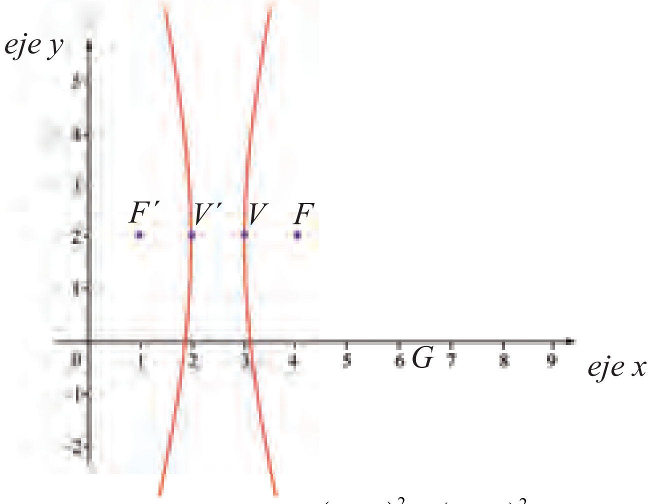


Gráfico 6. La hipérbola $\dfrac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{(y-2)^2}{6}=1$

A continuación se muestran las coordenadas de los vértices y focos de 8 hipérbolas, determinen en cada uno de los casos su centro, la excentricidad, la longitud de sus ejes, las coordenadas de los extremos de su eje conjugado, la ecuación ordinaria y su gráfica.

$F(-1,7)$, $F'(-1,4)$ y $V(-1,$[illegible]$)$, $V'(-1,$[illegible]$)$	$V(8,4)$, $V'(8,1)$ y $F(8,5)$, $F'(8,-2)$
$V(-\frac{1}{2},2)$, $V'(-1,2)$ y $F(0,2)$, $F'(-\frac{3}{2},2)$	$V(3,$[illegible]$)$, $V'(2,$[illegible]$)$ y $F(5,$[illegible]$)$, $F'(1,$[illegible]$)$
$V(-2,6)$, $V'($[illegible]$,6)$ y $F($[illegible]$,6)$, $F'(-3,6)$	$V(0,2)$, $V'(0,0)$ y $F(0,3)$, $F'(0,-1)$
$V($[illegible]$,3)$, $V'($[illegible]$,3)$ y $F(7,3)$, $F'(4,3)$	$V(4,9)$, $V'(-4,9)$ y $F(5,9)$, $F'(-5,9)$

Otros teoremas importantes sobre la hipérbola son los siguientes.

Teorema 5. Ecuación Canónica de la Hipérbola: la hipérbola que contiene al punto $P(x,y)$, centro en el origen $O(0,0)$ y ejes focales:

i) Paralelos al *eje x*, tiene por ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

ii) Paralelos al *eje y*, tiene por ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

Esta demostración resulta muy sencilla, solamente se deben sustituir las coordenadas del centro en el teorema 4 de esta lección.

Teorema 6. Ecuación General de la Hipérbola:

En la ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

si los coeficientes A y C son de distinto signo, entonces dicha ecuación representa (a) una hipérbola de ejes paralelos a los ejes coordenados, o (b) dos rectas secantes.

Esta demostración resulta muy sencilla, solamente se deben realizar los productos notables del teorema 4 de esta lección.

La ecuación general de la hipérbola

En nuestro caso hallaremos la ecuación general de la hipérbola que trabajamos anteriormente, cuya ecuación ordinaria es:

$$\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

Operando en el primer sumando tenemos que

$$4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por él. $mcm(1,6) = 6$

$$24\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - (y-2)^2 = 6$$

Desarrollamos los cuadrados

$$24\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \left(y^2 - 4y + 4\right) = 6$$

Operamos

$$24x^2 - 120x + 150 - y^2 + 4y - 4 - 6 = 0$$

Reordenamos y agrupamos los términos semejantes

$$24x^2 - y^2 - 120x + 4y + (150 - 4 - 6) = 0$$

Así, nuestra ecuación general es:

$$24x^2 - y^2 - 120x + 4y + 140 = 0$$

Las cónicas

Las ecuaciones desarrolladas desde la lección anterior hasta ésta: **circunferencia, parábola, elipse e hipérbola,** son denominadas **secciones cónicas**. Su nombre se debe a que las mismas pueden obtenerse a través de la intersección de un plano con un cono "circular recto doble" (observen los *gráficos* 7 y 8).

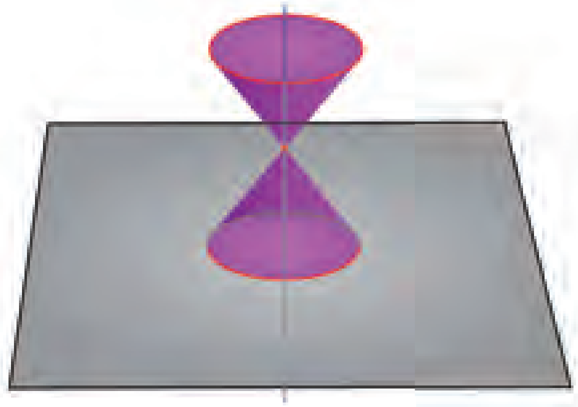


Gráfico 7

Gráfico 8. Secciones cónicas

El uso de las cónicas ha estado ligado a diferentes fenómenos físicos, en especial han sido abordado por los astrónomos para describir los movimientos de los planetas y diversos astros. Por ello han estado íntimamente relacionados con el desarrollo de los modelos del Universo.

Menecmo de Proconeso (350 a.C.) trabajó con la elipse, la parábola y la hipérbola al tratar de solucionar problemas clásicos como la "duplicación del cubo". Estos nombres se le deben a otro matemático griego llamado *Apolonio de Perga* (260-190 a.C) en su trabajo sobre las secciones cónicas. Elipse significa *defecto*; Hipérbola es *exceso*, y Parábola es *comparar*.

El matemático griego *Pappus de Alejandría* (290-350) realizó un trabajo exhaustivo con las cónicas desarrollando un criterio unificador entre ellas basados en el estudio de la excentricidad.

Actividades

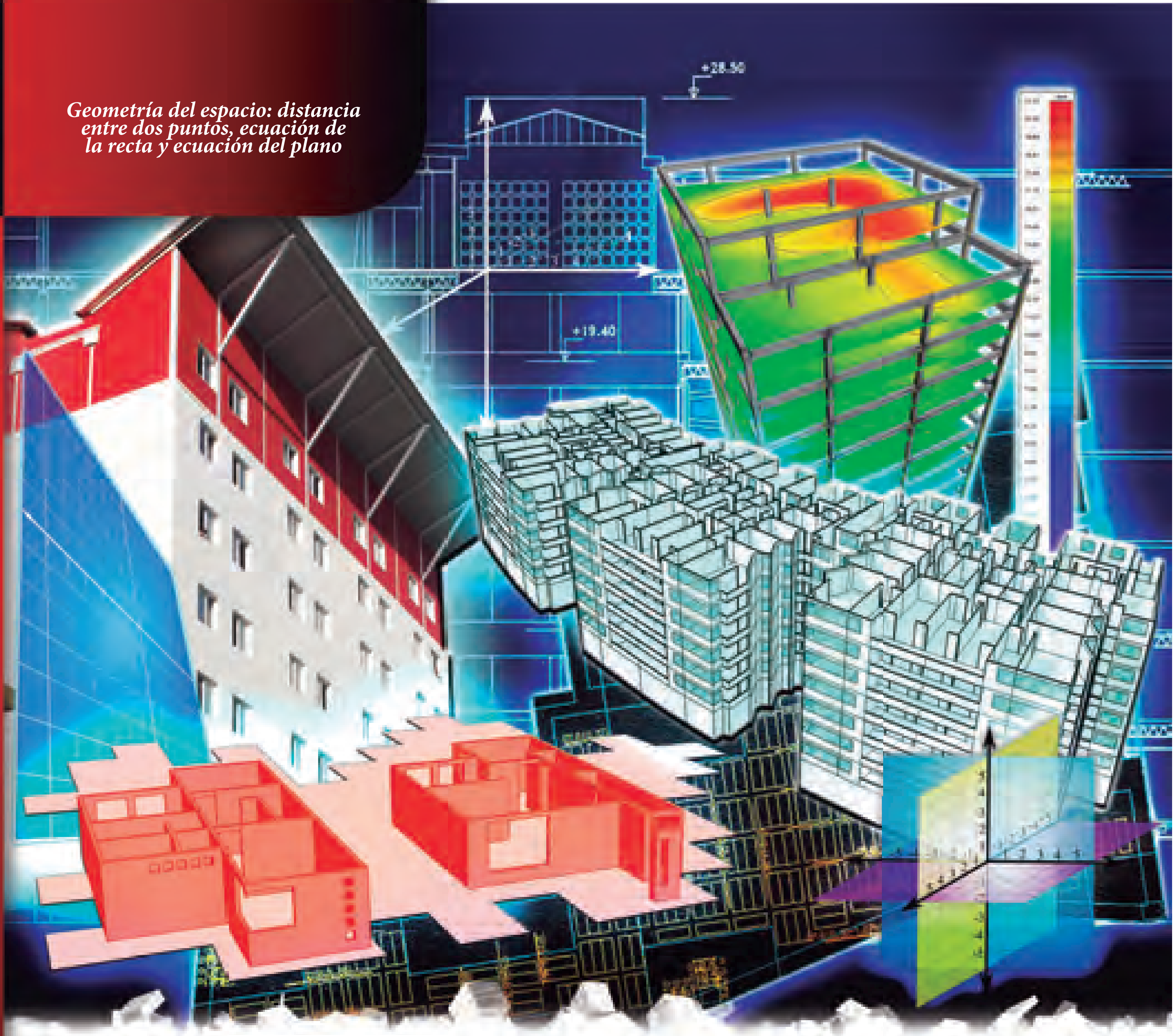
En los siguientes ejercicios determinen las coordenadas de los vértices, de los focos, el centro, las coordenadas de los extremos del eje conjugado, la excentricidad, la longitud de los distintos ejes, la ecuación general de la hipérbola y su gráfica.

$\frac{(x-5)^2}{5}-\frac{(y+4)^2}{3}=1$	$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$	$(x+3)^2-\frac{(y-5)^2}{2}=1$
$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+4)^2}{6}=1$	$\frac{(y-5)^2}{5}-\frac{(x+2)^2}{3}=1$	$\frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y-3)^2}{3}=1$
$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$	$\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{3}=1$

11

Geometría del espacio: distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y ecuación del plano

El diseño de viviendas



La Geometría y el diseño de viviendas

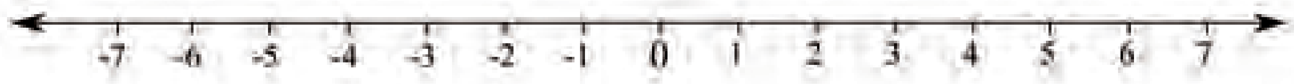
El tema de la vivienda es sumamente amplio e interesante, en especial por sus múltiples relaciones con áreas como la ingeniería, la geología, la arquitectura, la política pública, el trabajo, la historia nacional, la tecnología, la matemática, las necesidades de nuestras comunidades, la industria y la ética. En un artículo sobre la historia de la vivienda venezolana, nuestro gran arquitecto **Fruto Vivas**[1] nos dice, de una manera hermosamente poética, que "en la vivienda se incluye el aire que respiramos, la comida, las flores, los huertos, las aves domésticas, los atardeceres, los días de lluvia, las alegrías y las tristezas". En suma, es pues un tema que amerita un análisis profundo por parte de todas y todos.

1: Disponible en: http://analitica.com/archivo/vam1997.10/soc02.htm

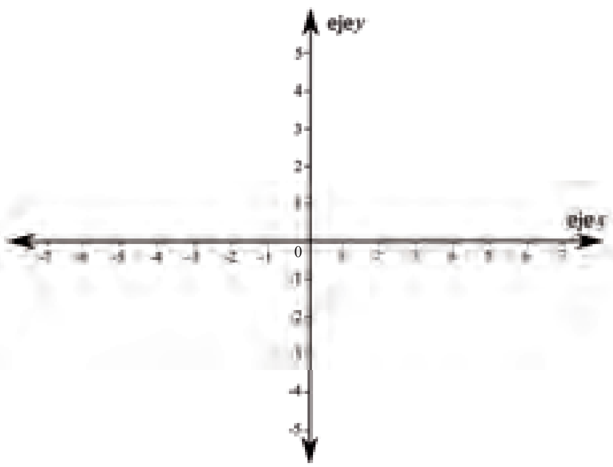
El diseño de las viviendas y de los complejos habitacionales y urbanísticos se apoya hoy en día de las ventajas que ofrecen los programas de diseño en 3 dimensiones. **La geometría del espacio** es precisamente parte de la base lógica de programación de estos "software $3D$", muchos de ellos están disponibles gratuitamente en Internet. Por ejemplo, la idea de caracterizar una recta o un plano en el espacio tridimensional con su ecuación, o bien, la distancia entre dos puntos o de un punto a un plano. Tales ecuaciones permiten describir con exactitud los diversos elementos que conforman un diseño $3D$.

Ya en el libro de tercer año de Matemática de la Colección Bicentenario, en la lección 12, estudiamos el sistema de coordenadas en 3 dimensiones, también denominado sistema de representación en el espacio, así como la manera de representar puntos y vectores en éste.

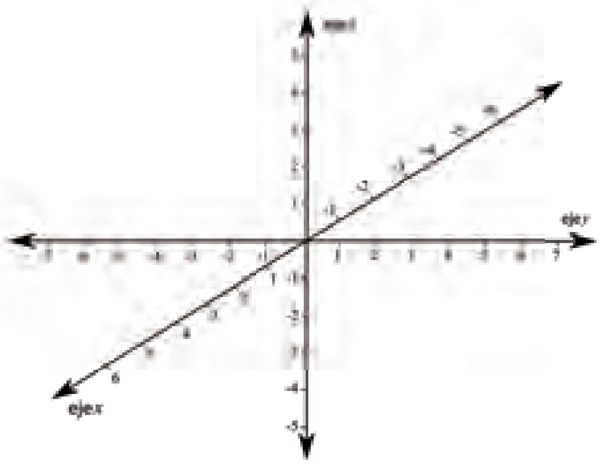
En esta lección estudiaremos algunos elementos de la geometría del espacio, así que les invitamos a incursionar en este fascinante mundo.



Unidimensional



Cartesiano o bidimensional



Tridimensional

Gráfico 1. La recta real (arriba), el plano cartesiano (izquierda) y el sistema de coordenadas en R_3 (derecha)

Los sistemas de coordenadas

Existen distintos sistemas de coordenadas, los cuales dependen de la dimensión y tipo de coordenadas que los integren.

Los sistemas unidimensional y bidimensional los estudiamos y empleamos en cada uno de los años de la *Educación Media*.

En programas de construcción de viviendas de tan alta envergadura como la Gran Misión Vivienda Venezuela, existe la necesidad de que arquitectos e ingenieros diseñen las estructuras con apoyo en el computador, para luego hacer los cálculos y planes correspondientes. Esas estructuras pueden describirse a través de la Matemática, específicamente con ecuaciones, pues, los cimientos pueden asociarse con segmentos de rectas, la intersección de los cimientos con las vigas corona o con las riostras se pueden asociar con un punto, y los pisos y paredes con secciones planas –observen el *gráfico* 2.

Comencemos entonces caracterizando la distancia entre dos puntos, no en el Plano (que ya conocemos), sino en el espacio tridimensional.

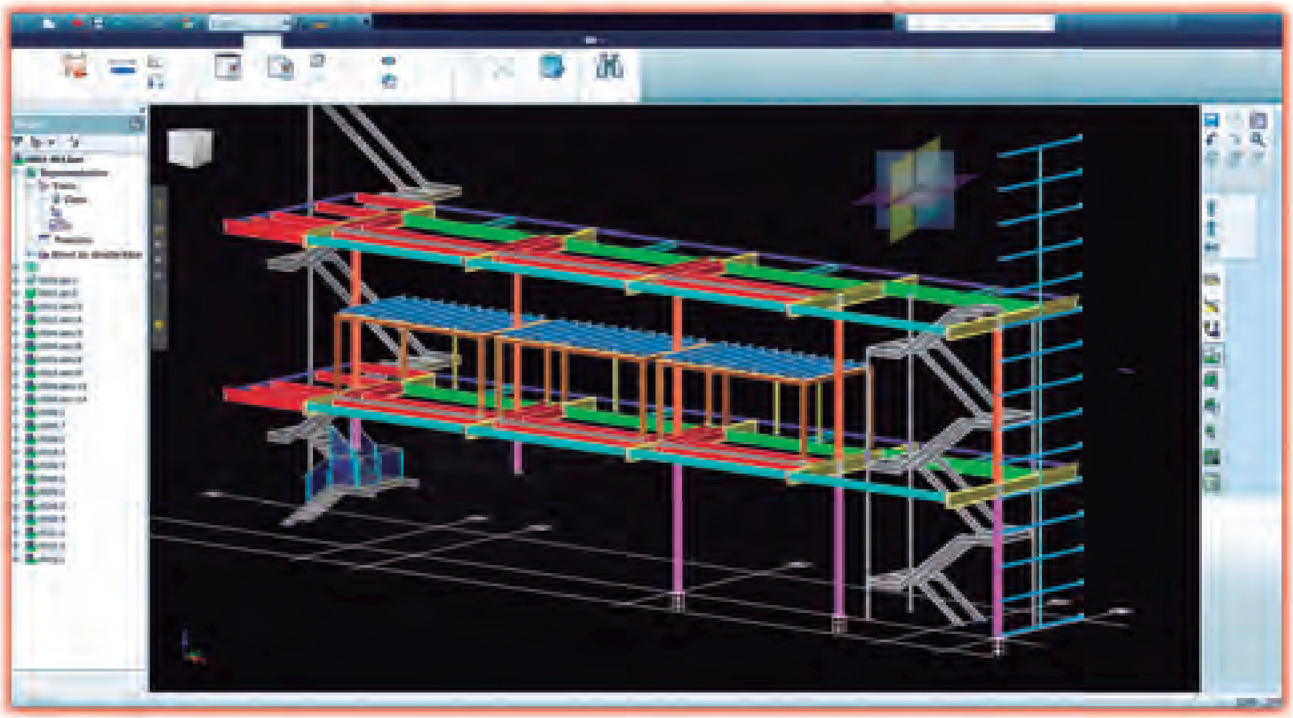
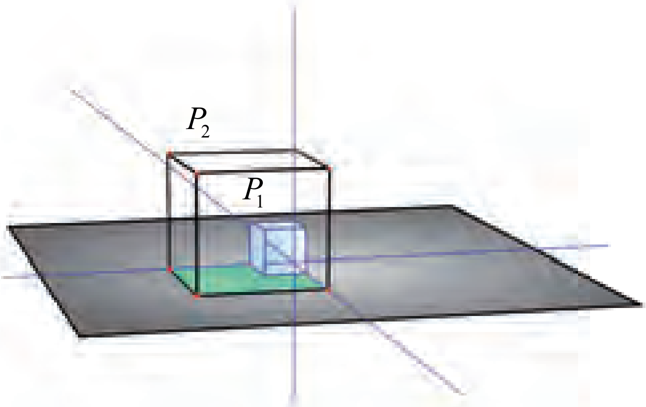
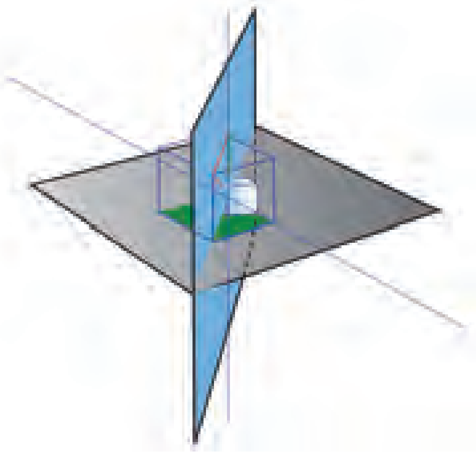


Gráfico 2. Un diseño en 3D

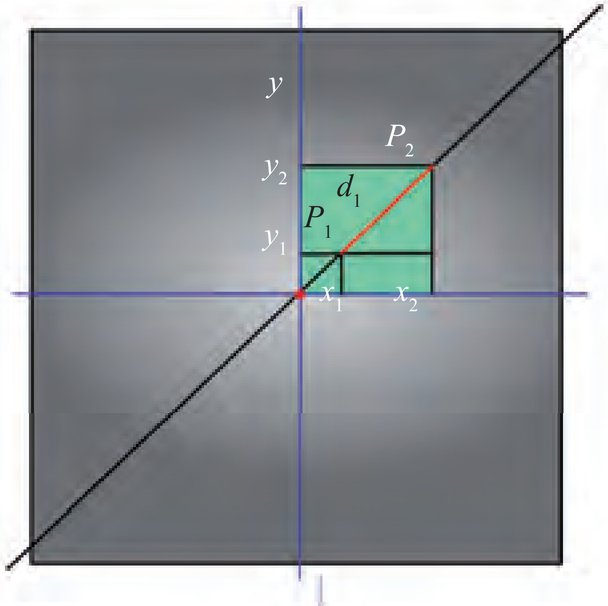
Distancia entre dos puntos en el espacio

Consideremos los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio. Éstos pueden asociarse con dos de los vértices de los paralelepípedos que mostramos en la figura.



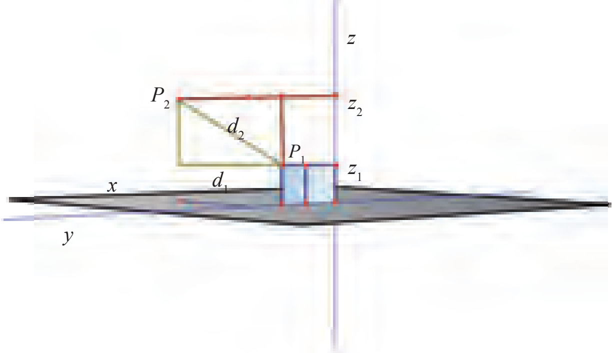


Tracemos un plano que contenga a los puntos P_1 y P_2 y al *eje* z.



En las proyecciones en el plano xy de estos paralelepípedos y del plano que los corta por una de sus diagonales, se puede apreciar que las coordenadas (en el plano xy) de los puntos P_1 y P_2 son $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y la distancia etiquetada como d_1 está dada por:

$$d_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ahora en una vista del corte transversal del plano con los paralelepípedos rectangulares, tenemos que las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 en el *eje* z son z_1 y z_2, respectivamente. Sabemos que se forma un triángulo rectángulo. Aquí se tiene que:

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Al sustituir d_1 en la nueva ecuación nos queda que:

$$d_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

donde $d_2 = P_1P_2$. Estas ideas nos permiten enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1. Distancia entre dos puntos:

Sean los puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ en el espacio. La distancia $d=P_1P_2$ está dada por $P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Les proponemos entonces hallar la distancia entre los siguientes pares de puntos.

$R(1,0,0)$ y $T(1,1,1)$	$Q\left(-4,\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$ y $S\left(5,\frac{1}{4},6\right)$	$J(1,0,0)$ y $K(1,0,0)$
$P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ y $C\left(-1,-\frac{1}{3},-1\right)$	$U(-2,-1,3)$ y $B\left(2,-3,\frac{1}{2}\right)$	$R\left(\sqrt{5},-8,-1\right)$ y $H(0,0,1)$
$E(6,0,-4)$ y $V(0,8,0)$	$U(7,6,-3)$ y $B\left(-1,0,\frac{2}{3}\right)$	$M(9,10,5)$ y $W\left(4,8,\sqrt{2}\right)$

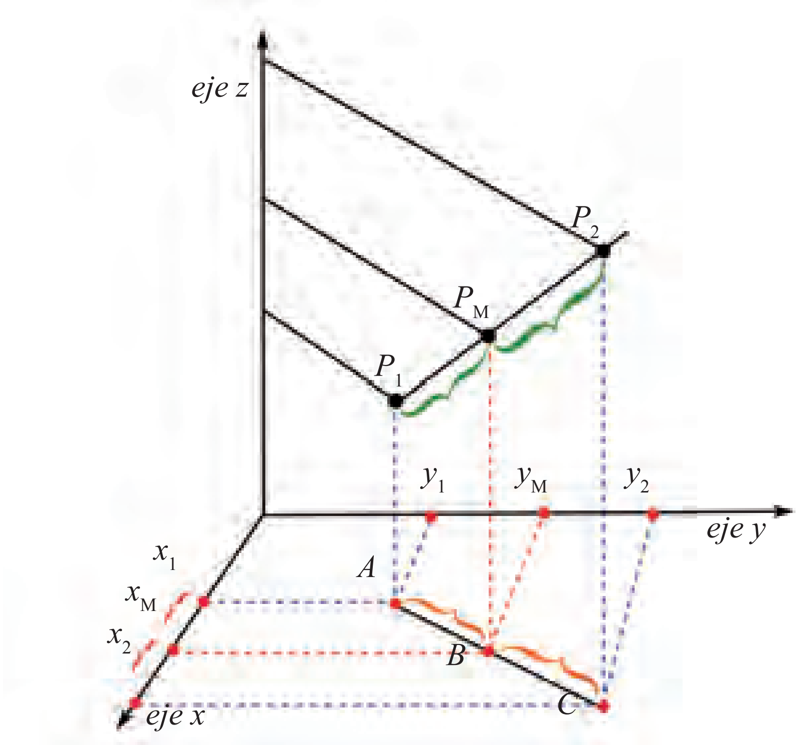
Ahora determinaremos las coordenadas del punto medio de un segmento cualesquiera en el espacio.

Teorema 2. Punto medio de un segmento:

Las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos P_1 y P_2 poseen coordenadas $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$, son:

$$P_M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Demostración: sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y $P_M(x_M,y_M,z_M)$ las coordenadas del punto medio P_M.



En la figura adjunta mostramos la proyección de los puntos P_1, P_2 y P_M sobre el plano xy, y de estos últimos sobre los *ejes* x e y.

Por el Teorema de Thales, se tiene que:

$$AB = BC$$

Por tanto,

$$x_M - x_1 = x_2 - x_M \Rightarrow 2x_M = x_1 + x_2 \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M - y_1 = y_2 - y_M \Rightarrow 2y_M = y_1 + y_2 \Rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Y al proyectar los puntos P_1, P_2, y P_M sobre el plano yz (por ejemplo), y de éstos sobre el *eje* z, obtenemos que:

$$z_M - z_1 = z_2 - z_M \Rightarrow 2z_M = z_1 + z_2 \Rightarrow z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Esto completa la demostración.

Por ejemplo, para hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{PQ}$, donde $P(2,1,5)$ y $Q(-3,2,1)$, etiquetamos con M al punto medio del segmento dado, luego, basándonos en el teorema anterior, podemos escribir: $M\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}, \frac{z_2+z_1}{2}\right)$, y solo nos resta sustituir los valores correspondientes. Así que las coordenadas de M son:

$$\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$$

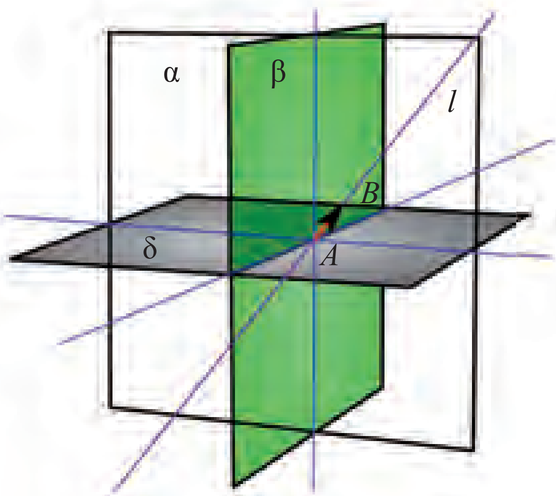
- Determinen el punto medio de los segmentos cuyos extremos son los pares de puntos expuestos en la *página* 252.

- Dados los puntos $A(1,-5,3)$, $B(3,1,-13)$, $C(-7,1,5)$ y $D(0,2,4)$, hallen las coordenadas de los puntos que dividen a los segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ en tres segmentos congruentes entre sí. Además, representen gráficamente cada segmento.

- ¿Cuál es el baricentro del triángulo cuyos vértices tiene como coordenadas $A(2,-1,3)$, $B(0,4,1)$ y $C(1,1,0)$?

Dirección de una recta en el espacio

Para caracterizar la posición de una recta en el espacio no solo hace falta saber la ubicación de dos de sus puntos sino que se debe tener conocimiento de su dirección, la cual queda determinada por la dirección del vector libre que ella contiene. Consideremos la recta *l*, dicha recta contiene a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tales que $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.



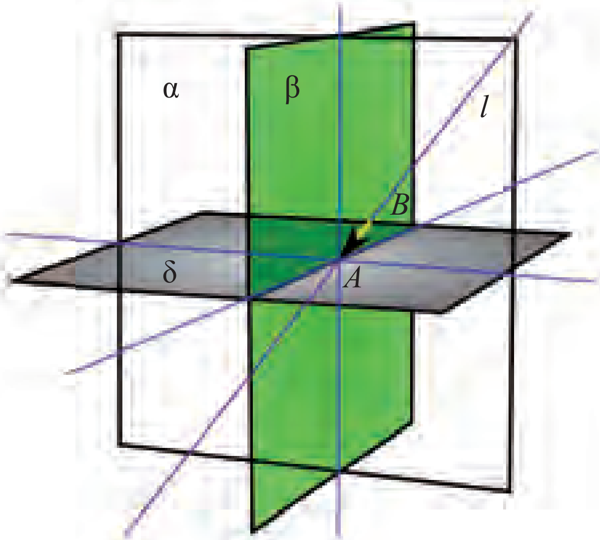


Gráfico 3

La dirección del $\overrightarrow{AB}$ está determinada por los cosenos de los ángulos que forma con los ejes coordenados. A esos cosenos los denominaremos cosenos directores y son:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d},\ \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d},\ \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

Donde:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Los cosenos directores del $\overrightarrow{BA}$ son a su vez:

$$cos\ \alpha = \frac{x_1 - x_2}{d},\ cos\ \beta = \frac{y_1 - y_2}{d},\ cos\ \gamma = \frac{z_1 - z_2}{d}$$

Notemos que los cosenos directores de ambos vectores tienen signos distintos, sin embargo, están contenidos en la misma recta, por tanto:

Teorema 3. Cosenos directores de una recta:

La dirección de una recta l que contiene al vector $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ está determinada por los cosenos directores de dicho vector o de cualquier vector que ella contenga:

$$cos\ \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d},\ cos\ \beta = \frac{y_2 - y_1}{d},\ cos\ \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

Números directores

Sean $x_2 - x_1 = a,\ y_2 - y_1 = b,\ z_2 - z_1 = c$. Como:

$$cos\,\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$cos\,\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$ y

$$cos\ \gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Haciendo las sustituciones correspondientes:

$$cos\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ cos\,\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ cos\,\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Los números a, b y c se llaman **números directores** y se denotan por $[a,b,c]$ para diferenciarlos de las coordenadas de un punto o de un vector.

Observemos que los números directores de una recta coinciden con las coordenadas de un vector libre $\vec{v}(a,b,c)$ si este vector libre se obtiene a partir del vector fijo $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ tal que $x_2-x_1=a,\ y_2-y_1=b,\ z_2-z_1=c$.

Ecuación de una recta en el espacio

Teorema 4. Ecuación simétrica de la recta:

La recta l que contiene al punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y sus números directores son $[a,b,c]$, tiene por ecuaciones:

$$x-x_1=ka$$
$$y-y_1=kb$$
$$z-z_1=kc$$

Si los números directores son distintos de cero se tiene que $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$.

La ecuación de una recta no es única, ya que depende del parámetro k.

Veamos un ejemplo. Deduzcamos la ecuación de la recta que contiene el punto $P(5,-1,3)$ y tiene por números directores a $[3,0,-2]$. Apoyándonos en el teorema anterior escribimos que:

$$x-x_1=ka,\quad y-y_1=kb,\quad z-z_1=kc$$

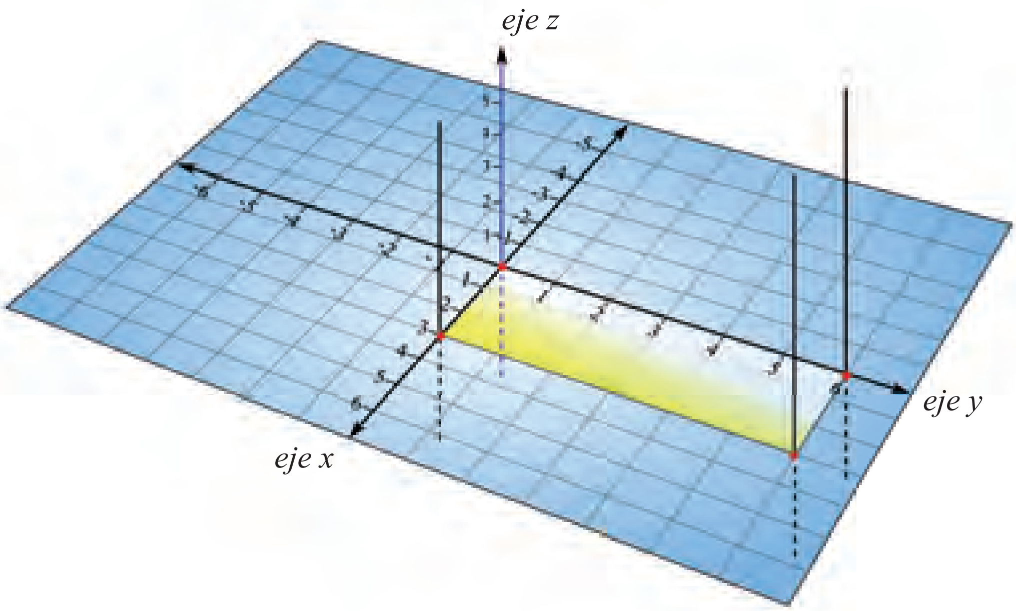
Así, $x-5=3k$, $y+1=0$, $z-3=-3k$. Y como el primer y tercer número director son distintos de cero, el valor de k nos permite igualar la primera y la tercera ecuación. Siendo el segundo número director igual a cero, simplemente se escribe al lado de las otras dos.

$$\frac{x-5}{3}=\frac{z-3}{-2}, \quad y+1=0$$

Obtengan las ecuaciones de las siguientes rectas a partir sus números directores y un punto dado.

$P(1,3,-2)$, $[5,2,6]$	$P(2,\frac{1}{2},0)$, $[1,2,-1]$	$R(1,0,0)$, $[1,0,2]$
$P(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},1)$, $[0,4,2]$	$U(5,0,0)$, $[1,1,1]$	$R(5,-8,-1)$, $[3,-2,1]$
$E(6,0,-4)$, $[1,8,-3]$	$U(-3,-2,-1)$, $[5,1,0]$	$M(0,0,1)$, $[0,-3,-1]$

Si en un modelo computacional de vivienda deben colocarse cimientos en las coordenadas $A(0,3,0)$, $B(0,0,0)$, $C(3,0,0)$ y $B(3,6,0)$, y los números directores de cada una de las rectas que pasan por estos puntos son $[0,6,1]$, $[0,0,2]$, $[4,0,2]$ y $[3,6,4]$, respectivamente; debemos determinar las ecuaciones de tales rectas.



Otra propiedad importante de las rectas en el espacio es la que sigue (su demostración es inmediata).

Teorema 5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

La recta que contiene a los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ tiene por ecuación:

$$x - x_1 = k(x_2 - x_1)$$
$$y - y_1 = k(y_2 - y_1)$$
$$z - z_1 = k(z_2 - z_1)$$

¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos?

$A(-4,2,6)$ y $B(1,-2,2)$	$C(2,0,5)$ y $D(1,0,3)$
$E(-1,4,6)$ y $F(1,4,-3)$	$G(5,7,1)$ y $H(0,2,1)$

Teorema 6. Ángulo entre dos rectas:

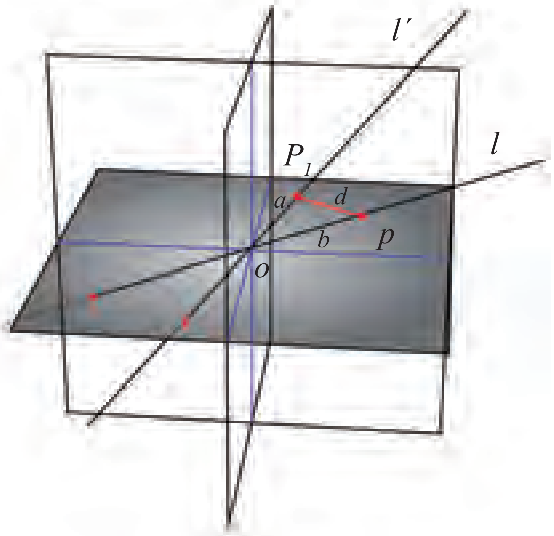
El ángulo alfa formado por dos rectas cualesquiera en el espacio, cuyos ángulos directores son α, β, ω y α', β', ω', respectivamente, se determina por la relación:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\omega\cos\omega'$$

Demostración: Consideremos dos rectas l y l_1 que se cortan en el origen O. Sean $P(x, y, z)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ puntos de l y l_1, respectivamente. Sea θ el ángulo determinado por la intersección de ambas rectas.

En el triángulo ΔOPP_1 llamemos $OP = b$, $OP_1 = a$ y $PP_1 = d$. Aplicando el teorema del coseno tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{b^2 + a^2 - d^2}{2ba} \qquad (I)$$



El **teorema de la distancia entre dos puntos** garantiza que:

$$a = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2} \ \ \text{y} \ \ b = x^2 + y^2 + z^2$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Al sustituir esto último en la ecuación (*I*):

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{ab} \qquad (II)$$

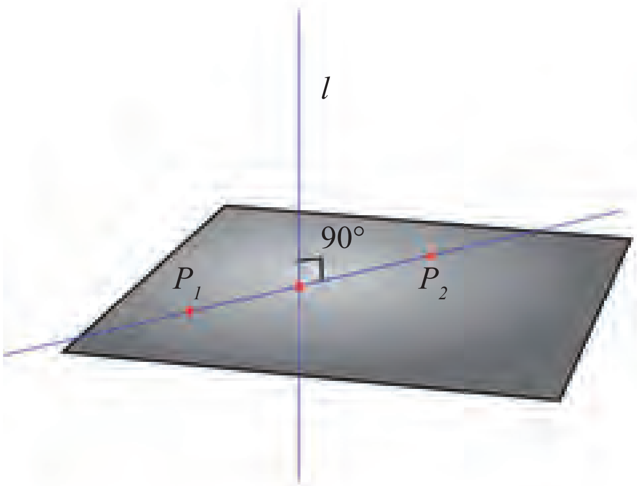
Los cosenos directores de l y de l' son α, β, ω y α', β', ω' respectivamente. Y de acuerdo con la definición de coseno de un ángulo:

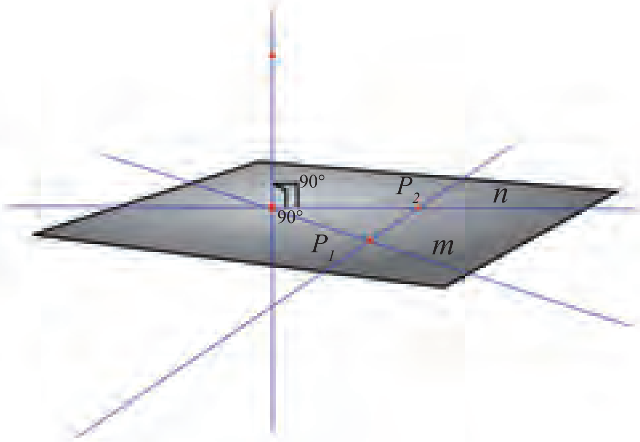
$$cos\ \alpha' = \frac{x_1}{a}, \ \ cos\ \beta' = \frac{y_1}{a} \ \ \ y \ \ \ cos\ \omega' = \frac{z_1}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{x}{b}, \ \ cos\ \beta = \frac{y}{b} \ \ \ y \ \ \ cos\ \omega = \frac{z}{b}$$

Finalmente, sustituimos esto en (II):

$$cos\ \theta = cos\,\alpha\ \ cos\,\alpha' + cos\ \beta\ \ cos\beta' + cos\ \omega\ \ cos\,\omega'$$





Rectas perpendiculares a un plano

En el modelo computacional de una vivienda, y también en la construcción en sí misma los cimientos son perpendiculares al piso (salvo que el diseño tenga que ver con otros tipos de estructuras). Utilizaremos esta noción para definir la perpendicularidad de una recta a un plano determinado.

Una recta l es perpendicular a un plano alfa si, y solo si, es perpendicular a toda recta del plano. Estas rectas se conocen como **rectas normales** al plano.

Teorema 7. Ángulo entre dos rectas:

El ángulo formado por dos rectas cualesquiera en el espacio, cuyos números directores son $[A,B,C]$ y $[A',B',C']$ respectivamente, está dada por:

$$\cos\alpha = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Les invitamos a demostrar este teorema, para ello pueden apoyarse en el teorema anterior y en la definición de cosenos directores.

Corolario 1:

Dos rectas son paralelas si sus números directores son proporcionales:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Corolario 2:

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus números directores correspondientes es igual a cero:

$$AA'+BB'+CC' = 0$$

Esta demostración también queda propuesta al grupo.

Ecuación general del plano

Un plano contiene infinitas rectas e infinitos vectores, segmentos y puntos. El plano se puede entender como una superficie "perfectamente lisa" que se "extiende infinitamente". El diseño en computadoras de las estructuras habitacionales amerita familiarizarse, además, con la ecuación del plano, así como de sus propiedades; las cuales exponemos a continuación.

Teorema 8. Ecuación general del plano

La ecuación general del plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B, C y D son constantes, *con A, B y C no nulos*, y $[A, B, C]$ son los números directores de la recta perpendicular.

Veamos su demostración. Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ punto de una recta l perteneciente a un plano α y sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la recta.

La recta l tiene por números directores a $[x - x_1, y - y_1, z - z_1]$ y sea l' otra recta en el espacio con números directores $[A, B, C]$.

La recta l debe ser perpendicular a toda recta del plano alfa — Si $l' \perp \alpha$, entonces $l' \perp l$

Por el Corolario 2, del teorema 7, cualquier punto del plano debe cumplir con la condición: — $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

Si desarrollamos el producto de los coeficientes por las expresiones que están en los paréntesis tenemos que — $Ax - Ax_1 + By - By_1 + Cz - Cz_1 = 0$

De acuerdo con la ley asociativa — $Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$

Y haciendo $-(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D$, la ecuación del plano es: — $Ax + By + Cz + D = 0$

Esto completa la prueba.

Teorema 9. Relación entre dos planos

Sean los planos cuyas ecuaciones son $Ax+By+Cz+D=0$ y $A'x+B'y+C'z+D'=0$. Estos planos son:

- Paralelos, si $A=kA'$, $B=kB'$, $C=kC'$
- Perpendiculares, si $AA'+BB'+CC'=0$
- Coincidentes, si $A=kA'$, $B=kB'$, $C=kC'$ y $D=kD'$

Siendo $k \neq 0$.

Este teorema se puede demostrar haciendo uso del teorema sobre los ángulos formados por dos rectas y los corolarios 1 y 2 derivados del mismo. Otros teoremas sobre planos:

Teorema 10. Distancia de un punto a un plano

La distancia de un plano de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ a un punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ está determinada por la ecuación.

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Teorema 11. Relación entre una recta y un plano

Sea la recta l y el plano alfa, tales que los números directores de la primera son $[a,b,c]$ y la ecuación del segundo es $Ax+By+Cz+D=0$. La recta l es:

- Perpendicular al plano, si $A=ak$, $B=bk$, $C=ck$.
- Paralela al plano, si $Aa+Bb+Cc=0$.

Este teorema pueden demostrarlo con los corolarios 1 y 2 sobre los ángulos formados por dos rectas.

Teorema 12. Ángulo formado por una recta y un plano

El ángulo agudo formado por una recta cuyos números directores son $[a,b,c]$ y un plano de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$, está dado por la fórmula:

$$sen\alpha=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Actividades

1 Se piensa diseñar un modelo computacional que permita construir una vivienda cuya forma sea de paralelepípedo y donde las coordenadas de sus vértices sean:

$$A(0,0,0), B(6,0,0), C(6,4,0),\ D(0,4,0),\ E(0,0,3), F(6,0,3)\ \ G(6,4,3)\ \ y\ \ H(0,4,3).$$

A partir de los teoremas anteriores, deduzcan las ecuaciones de las rectas que contienen a las aristas, las ecuaciones de los planos que contienen a las caras. Por otra parte, comprueben que sus caras opuestas son paralelas.

2 Las coordenadas de los vértices de una pirámide son:

$$A(6,4,0), B(0,4,0), C(6,4,3), D(0,4,3)\ \ y\ \ E\left(3,10,\tfrac{3}{2}\right)$$

Determinen las ecuaciones de las rectas que contienen a sus aristas, las ecuaciones de los planos que contienen a sus caras y representen esta pirámide en el sistema de coordenadas tridimensional.

Giros y más giros

12

Soplar y hacer botellas

Muchas veces habremos escuchado la frase “más fácil que soplar y hacer botellas” o también “no todo es soplar y hacer botellas”.

¿Saben de dónde proviene ese dicho popular?

La elaboración de botellas, desde tiempos muy remotos, ha estado basada en la habilidad del artesano para soplar el vidrio. A pesar de lo extremadamente difícil de este trabajo, de alguna manera el sentir popular consideró que comparando el producto final, es decir la botella ya terminada, con la forma de elaborarlo, que consiste en soplar, resultaba muy sencillo “soplar y hacer botellas”. Sin embargo, vamos a ver que no es una tarea trivial.

Para fundir el vidrio se necesita de una temperatura cercana a los 1.600 °C, para que pueda tomar un aspecto viscoso y cristalino, con el cual trabajar con facilidad. Se vierten cargas de vidrio en un horno –un horno artesanal se construye con ladrillos refractarios- y después de vertidas las cargas se iniciará el proceso de fundir el vidrio. Para tomar el vidrio se utiliza un tubo hueco de acero, que recibe el nombre de "caña". A esta caña se le da vueltas sobre su propio eje para poder tener la cantidad de vidrio que se requiera, de acuerdo a la pieza que se quiera fabricar. Una vez que se tiene la masa de vidrio se procederá a darle forma esférica sobre una placa de acero, esto se hace girando la masa sobre lo ancho o largo de la placa. Luego se pasa a soplar, con la boca en un extremo de la caña, buscando la forma y el tamaño que se requiera.

Conversen, con sus compañeros y compañeras, las condiciones de trabajo y de seguridad industrial que deben darse a las trabajadoras y los trabajadores de las fábricas e industrias que producen envases de vidrio. Consideren las altas temperaturas en las que tienen que desempeñarse las artesanas y los artesanos del vidrio.

Una parte de este interesante proceso es que se han usado las ideas del giro y de los **ejes de rotación** para **generar** un cierto envase de vidrio. Veamos otro proceso donde esas ideas también son fundamentales.

Torno para madera

Nos referimos al torno, una máquina que se utiliza para fabricar piezas de diversas formas geométricas. Ha sido usado desde tiempos muy remotos por los alfareros. Luego comenzó a utilizarse en carpintería para hacer piezas como las patas de las mesas o de las camas. En la actualidad existen tornos muy modernos que son utilizados en procesos industriales de alta complejidad. El principio de funcionamiento de los tornos consiste en hacer girar la pieza, a lo largo de un eje de rotación, produciendo la forma geométrica que se le quiere dar a la pieza.

Existe una diferencia fundamental, adicional a los materiales utilizados, entre las piezas que producen los trabajadores del vidrio y las que producen los trabajadores de la madera. Ella es que los primeros producen envases, como las botellas, con formas geométricas que son "huecas" mientras que los segundos producen piezas que son "macizas". Sin embargo, ambos utilizan el proceso fundamental del giro y de los ejes de rotación para lograr un producto terminado.

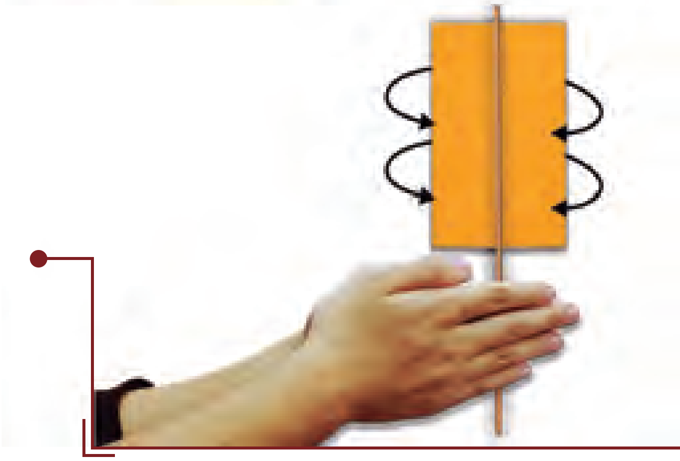
Veamos cómo podemos, desde el contexto del aula, usando nuestros propios giros, generar algunos cuerpos geométricos.

Generando un cilindro por rotación

Recorten un trozo de cartulina con forma de rectángulo y peguen uno de sus lados de mayor longitud de un palito de altura (de los que se usan en floristería).

Al hacer girar la cartulina con el palito de altura, ¿qué sólido se genera?

Si la cartulina en forma de triángulo se pega al palito en "el centro", en uno de los ejes de simetría de la figura, ¿en qué se parece y en qué se diferencia ese nuevo sólido del que generamos anteriormente?



En efecto, hemos generado un cuerpo geométrico en tres dimensiones (tridimensional), llamado **cilindro** y que es un **sólido de revolución**, idea que pasamos a definir.

Un **sólido de revolución** es un cuerpo geométrico que se genera a partir de la rotación de una región plana alrededor de una recta, la cual se denomina **eje de rotación** o **de revolución.**

Elementos de un cilindro

En el caso del cilindro podemos identificar varios elementos del mismo: su **eje de rotación**, la **altura** que viene dada por la longitud del lado del rectángulo que está sobre el eje de rotación, el **radio** y la **generatriz**. Ese lado recibe el nombre de **generatriz**, porque al girar sobre el eje de rotación genera la superficie lateral del cilindro (ver *gráfico* 1).

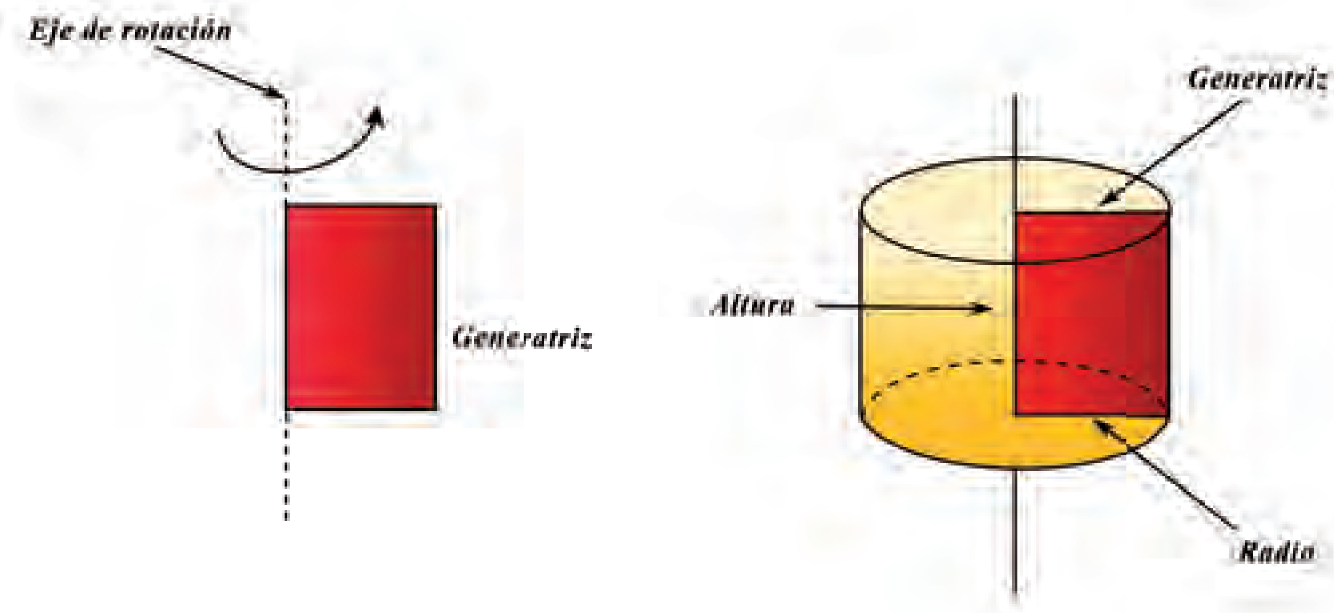


Gráfico 1. Elementos del cilindro

En término estricto, el cilindro que se ha construido es un **cilindro circular recto**, ya que su base es circular y su eje de rotación es perpendicular al plano. Ustedes podrían obtener otro tipo de cilindros usando otras figuras como bases. Sin embargo, el cilindro circular recto es el que se discute y analiza en esta lección.

Ahora generemos otros cuerpos geométricos.

Generando un cono por rotación

Recorten un trozo de cartulina con forma de triángulo rectángulo y peguen a su cateto más largo un palito de altura.

Al hacer girar la cartulina con el palito de altura, ¿qué sólido se genera?

Si la cartulina en forma de rectángulo se pega en el palito por el cateto más corto, ¿en qué se parece y en qué se diferencia ese nuevo sólido del que generamos anteriormente?

Se ha generado otro cuerpo geométrico en tres dimensiones llamado **cono** y que también es un sólido de revolución. En el *gráfico* 2 identificamos los elementos del cono generado.

Elementos de un cono

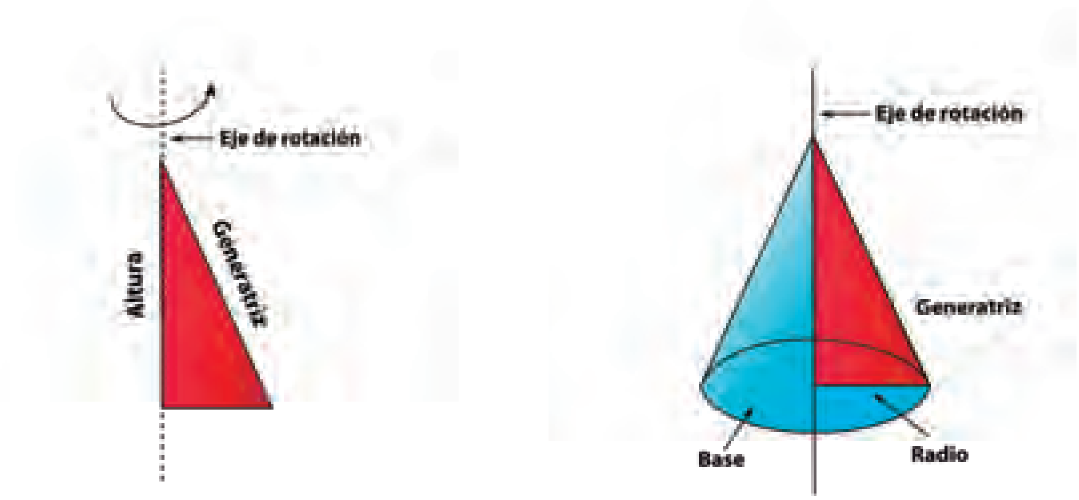
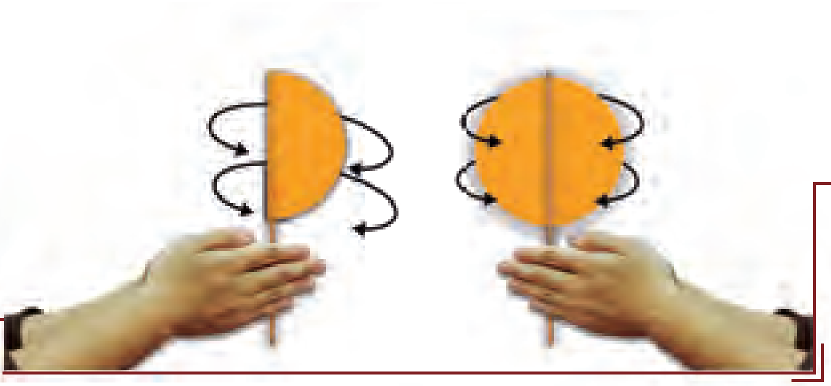


Gráfico 2. Elementos del cono

El cuerpo geométrico construido es un **cono circular recto**. Justifiquen por qué.

Generando una esfera por rotación

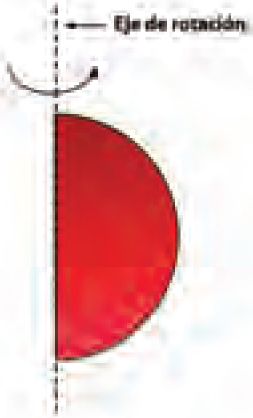
Recorten un trozo de cartulina con forma de semicírculo y peguen su diámetro a un palito de altura.



Al hacer girar la cartulina con el palito de altura, ¿qué sólido se genera?

Se ha generado un **sólido de revolución**, bien conocido por ustedes, llamado **esfera**. En el *gráfico* 3 identificamos los elementos de la esfera generada.

Elementos de una esfera



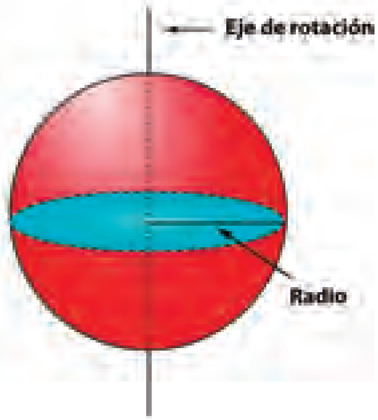


Gráfico 3. Elementos de la esfera

Observen que con nuestros propios giros, "cañas" y tornos, hemos generado tres sólidos de revolución: el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**. No hemos tenido que "soplar" pero sí hemos tenido que girar para obtener esos sólidos.

Ahora,

- Recorten un trozo de cartulina con una forma diseñada por ustedes –que tenga al menos un eje de simetría- y peguen un palito de altura a un eje de simetría de esta figura. El *gráfico* 4 es un ejemplo de ello.

- Al hacer girar la cartulina con el palito de altura, ¿qué sólido se genera?

Gráfico 4

Volumen y Áreas Laterales de los Sólidos de Revolución

Determinemos el volumen de un cilindro

Hemos visto que a partir del proceso de fundir el vidrio se pueden hacer botellas de distintas formas. Ahora bien, para envasar líquidos es necesario conocer su capacidad. Para ello es necesario conocer su volumen.

Vamos a determinar cuál es la expresión que permite calcular el volumen de los sólidos de revolución que hemos venido construyendo. Empecemos con el cilindro.

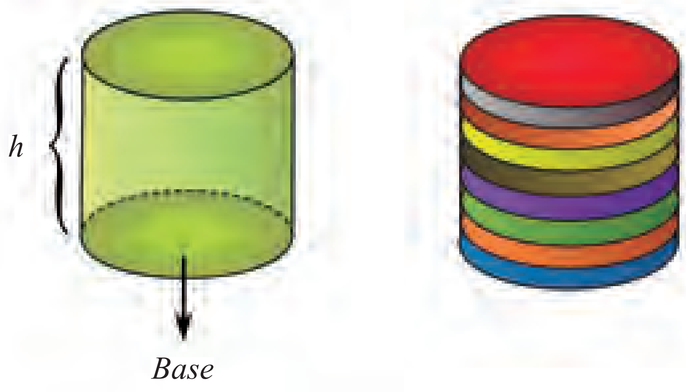
Antes de pasar a determinar el volumen de un cilindro, vamos a considerar la figura que adjuntamos.

¿Cuál grupo de monedas tiene mayor volumen? Como podemos ver, los volúmenes correspondientes a cada uno de dichos cuerpos son iguales. Este hecho, aunque para cuerpos geométricos cualesquiera, fue postulado por un matemático italiano llamado Cavalieri, veamos:

Principio de Cavalieri: Si dos cuerpos geométricos tienen la misma altura y bases de igual área, y al cortarlos por cualquier plano paralelo a las bases, el área de las secciones transversales es la misma entonces los cuerpos tienen el mismo volumen.

Bonaventura Cavalieri (Milán, 1598 - Bolonia, 1647). Matemático italiano, jesuita y discípulo de Galileo. Entre sus obras destacan "Un cierto método para el desarrollo de una nueva geometría de continuos indivisibles" (1635) y "Seis ejercicios de geometría" (1649). Realizó la primera demostración rigurosa del **teorema de Papus** relativo al volumen de un sólido de revolución. Además, popularizó el empleo de los logaritmos en Italia.

Usaremos entonces dicho principio para determinar el volumen de un cilindro. ¿Qué forma tiene la base del cilindro? ¿Cuál es, en consecuencia, el área de la base? ¿Cómo son las áreas de cualquier sección transversal del cilindro? ¿Qué dimensión se tiene cuando vamos disponiendo una sección sobre otra? ¿Cuál es entonces el volumen del cilindro?



El cilindro puede visualizarse como una serie de infinitos círculos colocados uno encima de otro.

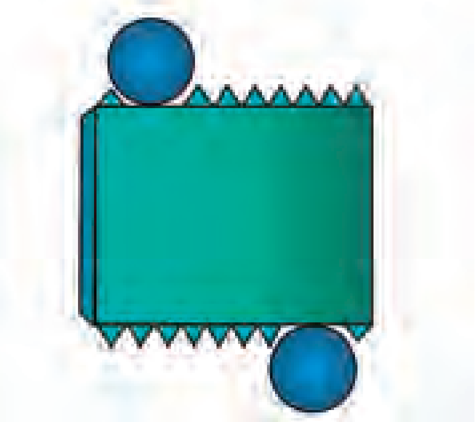
Gráfico 5

$$Volumen\ de\ un\ cilindro = área\ del\ círculo\left(base\right)\cdot altura\left(h\right)$$

$$V_c = \pi\, r^2 h$$

Área Lateral del Cilindro

La superficie de un cilindro está formada por dos círculos, que forman las bases, y la superficie lateral que tiene forma de rectángulo, en donde la longitud de su base es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, y su altura es de igual medida a la del cilindro. Construyamos con cartulina un cilindro para revisar el área total de su superficie.



Con una cartulina cortada en forma de rectángulo y dos pedazos de cartulina en forma de círculo construyan un cilindro. ¿Cuál es la forma de la figura geométrica obtenida al desarrollar la superficie lateral del cilindro? Su plantilla podría ser como la adjunta.

Como podemos observar en el *gráfico* 6, la medida de la base del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cilindro.

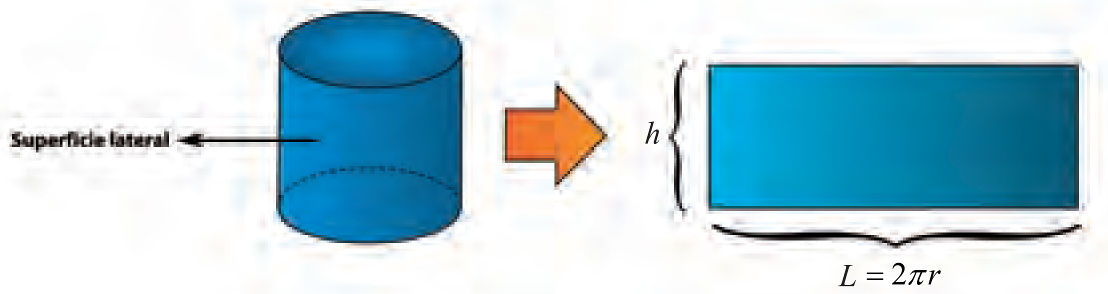


Gráfico 6

$$A_L = 2\pi rh$$

Ahora revisaremos, en el *gráfico* 7, cómo calcular el área de toda la superficie del cilindro y no solo su área lateral.

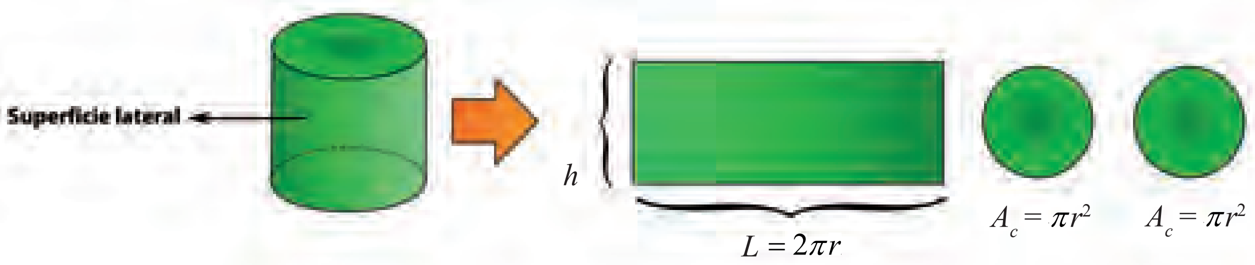


Gráfico 7

$$\text{Área total del cilindro} = \text{Área lateral} + 2\,\text{Área de los círculos}\,(\text{bases})$$

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

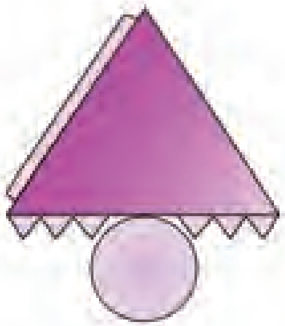
Por lo tanto:

$$A_t = 2\pi r(h + r)$$

Volumen del Cono

Recordemos, de lo estudiado en tercer año, que el volumen de un cono es un tercio del volumen de un cilindro que tiene la base circular de la misma medida e igual altura.

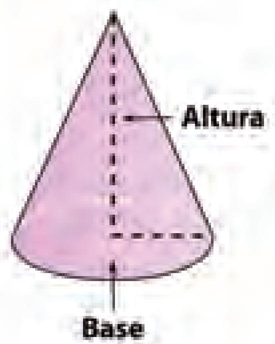
Con una cartulina cortada en la forma que se presenta en la figura, construyan un cono.



El cono construido por ustedes tendrá una altura h y una base con un determinado radio r. Consideremos entonces una pirámide de base triangular que tenga la misma altura del cono construido y con un área A de la base igual que la base del cono, ambas figuras con sus bases en el mismo plano. En Tercer Año de *Educación Media* verificamos que el volumen de la pirámide de base triangular era:

$$V = \frac{1}{3} Ah$$

Por el Principio de Cavalieri los dos sólidos tendrán el mismo volumen. En consecuencia, el volumen del cono también será un tercio del área de la base por su altura.



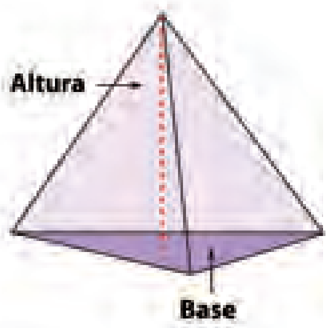


Gráfico 8

$$Volumen\ del\ cono = \tfrac{1}{3}\ Área\ de\ la\ base \cdot Altura$$

$$V_c = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

Área Lateral del Cono

El cono se compone del círculo de la base y un sector circular que tiene por longitud de arco la longitud de la circunferencia, y por radio, la generatriz del cono. La generatriz viene a ser la hipotenusa del triángulo rectángulo con el cual se genera el cono como sólido de revolución.

Para obtener la fórmula que nos permitirá calcular el área de la superficie lateral de un cono, de base circular o curva, utilizaremos la fórmula del cálculo del área del triángulo. Veamos, recordemos que la fórmula que nos permite calcular el área de un triángulo es:

$$A_{\triangle} = \frac{base \cdot altura}{2}$$

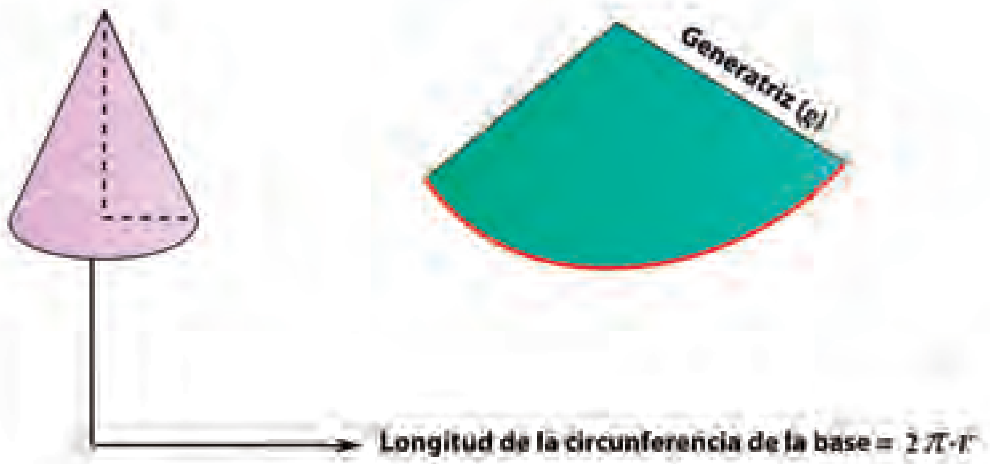


Gráfico 9

En esa fórmula del cálculo del área del triángulo sustituimos la base por $2\pi r$, que podemos visualizar en el *gráfico* 9, y corresponde a la longitud de la circunferencia de la base del cono. La altura en la fórmula del área del triángulo la sustituimos por la generatriz (g), así tendremos que:

$$A_L = \frac{2\pi rg}{2}$$

En consecuencia:

$$A_L = \pi rg$$

Ahora podemos construir la ecuación que nos permitirá calcular el área total del cono:

$$\text{Área total del cono} = \text{Área lateral} + \text{Área de la base}$$
$$A_t = \pi r(r+g)$$

El Principio de Arquímedes

Arquímedes (287-212 a.C.) fue uno de los sabios y matemáticos más famosos de su tiempo. El rey Hierón II, quien gobernaba en Siracusa, pidió a un orfebre que le elaborara una corona de oro, pero una vez elaborada la corona a éste le asaltaron las dudas, ¿y si el orfebre había sustituido el oro de la corona por plata para engañarle? Enfrentado con esa duda, el rey mandó llamar a Arquímedes, que vivía en ese entonces en Siracusa. El rey no quería fundir la corona, por lo cual pidió a Arquímedes que comprobara que la corona había sido elaborada de oro puro.

Arquímedes comprobó que la corona pesaba igual que el lingote de oro entregado por el rey al orfebre, pero quedaba por conocer el volumen de la corona, el aspecto problemático, con lo cual podría calcular la densidad del material con el cual fabricaron la corona, y así poder compararla con la densidad del oro o la plata para saber el tipo de material o la combinación de los materiales utilizados en su elaboración.

Un día, mientras se bañaba en una bañera, Arquímedes se percató de que el agua subía cuando él se sumergía. Entendió así que al sumergirse en la bañera estaba desplazando cierta cantidad de agua que equivaldría al volumen de su cuerpo. Por lo tanto, si él sumergía la corona en agua y medía la cantidad de agua desplazada conocería su volumen. Tan emocionado estaba con su descubrimiento que sin pensar en vestirse salió a la calle gritando ¡Eureka! (¡Lo he encontrado!).

Sabiendo el volumen y el peso, Arquímedes podría determinar la densidad del material que componía la corona. Si esta densidad era menor que la del oro, se habrían añadido materiales de peor calidad (menos densos que el oro), por lo que el orfebre habría intentado engañar al rey, lo cual al final resultó cierto.

Esta historia aparece por primera vez en el libro "De architectura", de Vitruvio, reseñado en el libro de tercer año, y escrito dos siglos después de la muerte de Arquímedes. Por lo que se conoce más como una leyenda que como un hecho histórico.

Volumen de la Esfera

Las y los invitamos a determinar el volumen de la esfera a través de un experimento. Para ello vamos a necesitar envases que han sido producidos a través de "soplar y hacer botellas", como los envases de vidrio que tiene en los laboratorios del liceo.

Gráfico 10 *Gráfico 11*

- Llenamos de agua un vaso como el de la izquierda del *grafico* 10, justo hasta el orificio de salida. Busquen un cilindro y una esfera que tengan la misma altura y en donde la base del cilindro tendrá la misma medida que el círculo máximo de la esfera.

> El **círculo máximo** de una esfera es aquel que se obtiene al hacer una sección en el centro de la esfera, esta sección circular posee el área máxima.

- Introducimos la esfera en el vaso lleno de agua, el agua desplazada por la esfera va cayendo en un vaso cilíndrico que tiene el mismo diámetro de la base y la misma altura que la esfera.

- Comprobamos que este vaso se llena hasta los $\frac{2}{3}$ de su altura. El volumen del cilindro, como hemos reafirmado con actividades anteriores es:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Recordemos, como se muestra en el *gráfico* 10, que la altura del cilindro tiene la misma longitud que dos veces el radio de la esfera, por lo tanto podemos sustituir en la fórmula anterior h por $2\,r$. Así tenemos que:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 2r \quad \text{así} \quad V_{cilindro} = 2\pi r^3$$

Tenemos que la altura de la esfera es $\frac{2}{3}$ la altura del cilindro. Por lo tanto:

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} 2\pi r^3 \quad \text{así que} \quad V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Área de la Esfera

No se puede extender la superficie de la esfera sobre un plano, por ello la ecuación que permite determinar el área de la superficie de la esfera no es tan intuitiva como las de otros sólidos. Sin embargo, Arquímedes demostró que el área de la superficie de una esfera era igual al área lateral de un cilindro que tuviera el mismo radio y cuya altura fuese el diámetro de la esfera (dos veces su radio). Así tenemos que la ecuación para calcular el área total del cilindro, como ya hemos visto, es:

$$A_t = 2\pi r\left(h + r\right)$$

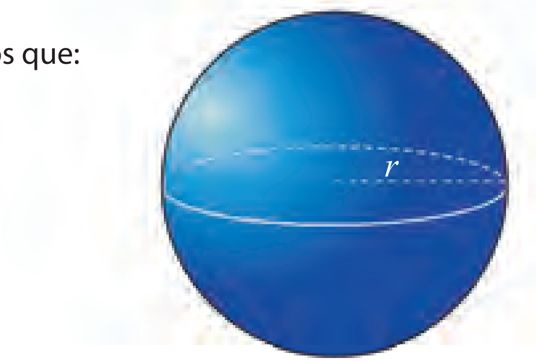
Si el área de la superficie de la esfera es $\frac{2}{3}$ de la del cilindro, entonces podemos decir que la fórmula que nos permitirá calcular el área de la superficie de la esfera es:

$$A_e = \frac{2}{3}2\pi r\left(h + r\right)$$

Sustituyendo la altura h por 2 veces el radio de la esfera, tendremos $A_e = \frac{2}{3}2\pi r\left(2r + r\right)$.

Y desarrollando esta ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned} A_e &= \tfrac{2}{3}\left(2\pi r 2r + 2\pi r r\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\left(4\pi r^2 + 2\pi r^2\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\left(6\pi r^2\right) \\ &= 4\pi r \end{aligned}$$



Actividades

1 Se adquieren dos envases que tienen forma de cilindro. Uno de ellos tiene radio de $3\ cm$ y altura de $8\ cm$. El otro tiene $8\ cm$ de radio y $3\ cm$ de altura.

- ¿Cuál cilindro tiene mayor área de superficie lateral?
- ¿Cuál cilindro tiene mayor área de superficie total?

2 Se introduce un envase cónico dentro de un envase cilíndrico, de manera tal que la base del cono y la del cilindro coinciden totalmente, y la altura del cono es igual a la altura del cilindro. Deduzcan una expresión para el volumen del espacio que queda limitado por las dos superficies y las bases, considerando que el radio de la base es r y la altura del cilindro y del cono es h. La respuesta debe quedar, de manera general, en términos de r y h.

3) El planeta Tierra no es una esfera, por tanto no tiene un único radio. Sin embargo, se puede afirmar que su radio medio es de $6.371\ km$. ¿Cuál es el área aproximada de su superficie? Indaguen qué se entiende por radio ecuatorial y radio polar de la Tierra.

4) Un cubo de $20\ cm$ de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en un recipiente esférico de $20\ cm$ de radio?

5) ¿Qué figura plana permite generar los sólidos que siguen? ¿Tienen un único eje de rotación? Expliquen en cada uno de los casos.

- ¿Cuál es la generatriz en cada caso?
- ¿El "toro" tiene generatriz? (la figura a la derecha en el *gráfico* 12).

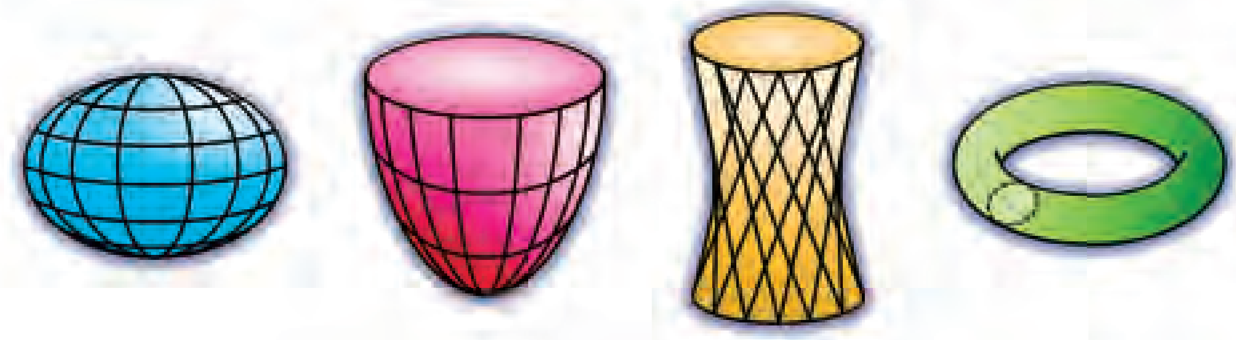


Gráfico 12

Investigación

Haciendo uso de *un paquete de cálculo libre*, investiguen cómo pueden generar:

- Uno de los sólidos de revolución que estudiamos en esta lección.
- Un sólido de revolución a partir de una figura plana diseñada por ustedes.

Algunas Ecuaciones Algebraicas en $\mathbb{R}^3$

Una **superficie** está representada por una ecuación de la forma $f(x,y,z)=0$, así $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pertenece a una superficie si, y solo si, $f(x_0,y_0,z_0)=0$, con $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Las superficies de los sólidos que hemos trabajado en esta lección se generan a partir de una curva que se mueve en el espacio, a la que llamamos **directriz**, esto se realiza siguiendo una trayectoria determinada a la cual denominamos **generatriz**. Para trazar la gráfica de una superficie de este tipo tomamos una curva, que será nuestra directriz, y la arrastramos en la dirección de la generatriz, el movimiento de la curva directriz forma la superficie por la traza que va dejando.

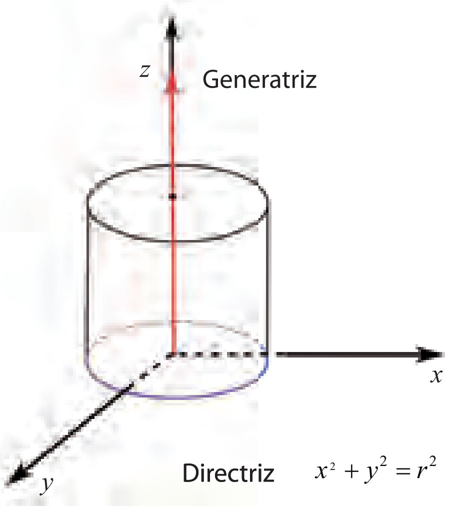


Gráfico 13

Superficies Cilíndricas

Veamos cómo podemos generar una superficie cilíndrica. Consideremos un ejemplo donde tenemos como curva directriz:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que está sobre el plano (x, y) y como generatriz el vector $\vec{v} = (0,0,4)$ paralelo al *eje z*, en el *gráfico* 13 podemos visualizar la generación de ese cilindro.

Hasta ahora hemos estudiado únicamente cilindros cuyas curvas directrices están sobre planos paralelos a los planos coordenados y en donde las generatrices son rectas paralelas a alguno de los ejes coordenados. Estos cilindros se denominan **Cilindros Rectos**. Cuando la directriz es una recta que no es paralela a alguno de los ejes coordenados el cilindro que se genera se denomina **Cilindro Oblicuo**.

Todo **cilindro circular recto** tiene como curva directriz una **circunferencia** y como generatriz una **recta paralela a uno de los ejes coordenados**.

En el *gráfico* 13 se muestra un cilindro con directriz:

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ con } z = 0$$

y una recta generatriz paralela al *eje z*, $\overleftrightarrow{m} = (0,0,1)$. La ecuación de ese cilindro será entonces $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Para encontrar la ecuación de un cilindro, se tiene que tomar en cuenta las ecuaciones de la curva A y un vector director paralelo a las rectas generatrices. Veamos: sea $A = (x, y, z)$ un punto cualquiera en la superficie del cilindro, entonces A pertenece a una de las rectas generatrices, y sea $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el punto de intersección entre esa recta y la curva directriz (ver *gráfico* 14).

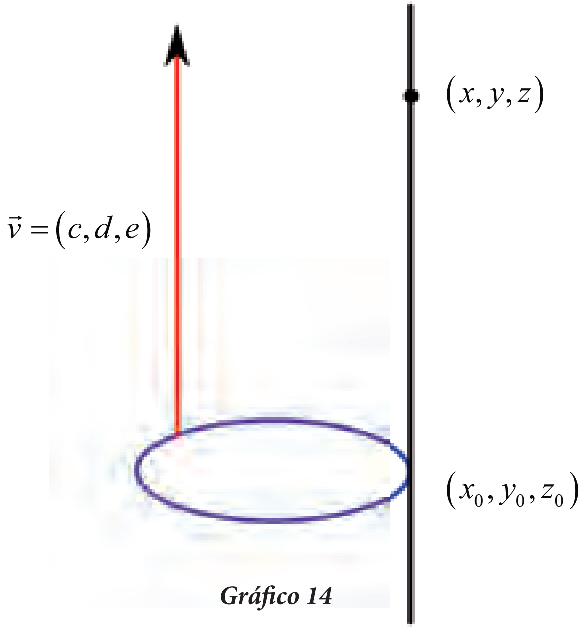


Gráfico 14

Si $\vec{v}=(c,d,e)$ es un vector que determina la dirección de las rectas generatrices, entonces, la superficie del cilindro está dado por la ecuación:

$$(x,y,z)=(x_0+y_0+z_0)+t(c,d,e)$$

para $t\in\mathbb{R}$.

Veamos cómo hallar la ecuación de un cilindro que tiene como directriz:

$$x^2+y^2=9,\ z=0$$

(una circunferencia) y sus generatrices son paralelas a la recta $z=4y-2$, $z=3x+5$.

En primer lugar determinaremos el vector que direcciona este cilindro, para ello escribimos la recta en forma simétrica, hacemos de esta manera $t=z$, de allí que:

$$t=z=4y-2=3x+5$$

Por lo tanto:

$$3x+5=4y-2=z$$

Calculando el m.c.m. de los coeficientes de x, y, z , podemos escribir que:

$$\frac{3x+5}{12}=\frac{4y-2}{12}=\frac{z}{12}$$

Con lo cual:

$$\frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y-\frac{1}{2}}{3}=\frac{z}{12}$$

Así el vector director es:

$$\vec{v}=(4,3,12)$$

Ahora, teniendo (x_0,y_0,z_0) como un punto en la circunferencia (directriz), entonces, la ecuación de la recta generatriz que pasa por ese punto es:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(4,3,12)$$

Es decir que $x = x_0 + 4t$, $y = y_0 + 3t$ y $z = z_0 + 12t$, ya que (x_0, y_0, z_0) es parte de la circunferencia, así como ya sabemos $x_0^{\,2} + y_0^{\,2} = 9$ y $z_0 = 0$. Por lo tanto tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + 4t & (1) \\ y = y_0 + 3t & (2) \\ z = z_0 + 12t & (3) \\ x_0^{\,2} + y_0^{\,2} = 9 & (4) \\ z_0 = 0 & (5) \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (3) la (5) tenemos que: $z = 12t$, de donde $t = \dfrac{z}{12}$. Sustituyendo en las primeras ecuaciones (1) y (2) tenemos que:

$$x_0 = x - 4t = x - 4\left(\frac{z}{12}\right) = x - \frac{z}{3} = \frac{3x - z}{3}$$

Así:

$$y_0 = y - 3t = y - 3\left(\frac{z}{12}\right) = y - \frac{z}{4} = \frac{4y - z}{4}$$

Sustituyendo ahora ambas ecuaciones en (4) tendremos:

$$\left(\frac{3x - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{4y - z}{4}\right)^2 = 9 \text{ es decir,}$$

$\dfrac{(3x - z)^2}{9} + \dfrac{(4y - z)^2}{16} = 9$, la cual es la ecuación del cilindro de nuestro ejemplo con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Generalizando: si en la ecuación $f(x, y, z) = 0$, x, y o z es una variable libre, es decir, no aparece en la ecuación, entonces la gráfica corresponde a un cilindro. En ese caso, dibujamos el trazado de la superficie $f(x, y, z) = 0$ sobre el plano coordenado correspondiente a las variables no libres y luego movemos esa curva en la dirección del eje coordenado correspondiente a la variable libre.

- Determinen la ecuación del cilindro generado por la directriz (circunferencia) $x^2+z^2=1$, con $y=0$, y cuya generatriz es perpendicular al plano $2x+y-z+3=0$.

- Les recomendamos hallar la recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0), perpendicular al plano dado y que corta a ese plano en un punto satisfaciendo la ecuación dada: $x^2+z^2=1$.

Superficies Esféricas: una **superficie esférica** se puede definir como el conjunto de puntos del espacio que equidistan de otro punto dado, al que denominamos **centro de la esfera**. La distancia que separa los puntos de la superficie esférica del centro de la misma la denominamos **radio de la esfera**. Si situamos el centro de la superficie esférica en $C(0,0,0)$ obtendremos lo que se conoce como ecuación reducida, en donde los puntos $P(x,y,z)$ están en la superficie esférica si cumplen que $x^2+y^2+z^2=r^2$. Veamos un ejemplo: necesitamos hallar la ecuación de una superficie esférica de centro $C(2,1,-4)$ y que tiene el mismo radio que: $x^2+y^2+z^2-16=0$. Lo primero que debemos hacer es determinar el radio de esa superficie esférica, podemos trabajar con la ecuación que nos proporcionan, así $x^2+y^2+z^2=16 \;\Rightarrow\; r=\sqrt{16} \;\Rightarrow\; r=4$. En consecuencia:

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=4^2 \text{, entonces } x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z+21=16$$

La ecuación de la superficie esférica dada es: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z+5=0$. En general, una esfera con centro en un punto cualquiera $C(m,n,l)$ y el radio r, se define como el conjunto de puntos que cumplen con la ecuación canónica $(x-m)^2+(y-n)^2+(z-l)^2=r^2$, mientras que para una esfera con centro en el origen de coordenadas se cumple que: $x^2+y^2+z^2=r^2$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Hallen ustedes la ecuación de la esfera que tiene como centro el punto $P(-4,2,2)$ y como radio $r=6$. Por otra parte, ¿cuál es el centro y el radio de la superficie esférica cuya ecuación es: $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z-2=0$?

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes

Las tres gracias: Dolores, Delfina y Adriana Duarte Isava

Estas Tres Gracias eran hijas del General Francisco Antonio Duarte Sánchez y de Delfina Matilde del Carmen Isava González, quienes habían contraído matrimonio en San Felipe (Yaracuy) en 1876. La pareja tuvo 10 hijos, siendo Dolores Delfina, Delfina Matilde y Adriana Delfina las primeras en nacer. Eran oriundas de San Felipe, en muchos escritos se les llama Las Delfinas. La familia tuvo en Maracaibo (Zulia) a su quinto hijo: el destacado matemático e ingeniero Francisco José Duarte (1883-1972).

La familia se estableció en San Esteban, cerca de Puerto Cabello. El padre de nuestras Tres Gracias asumió, conjuntamente con la madre, la educación de sus hijas, más allá de la clásica educación hogareña que era usual en aquella época. Similar actitud asumieron con sus otros hijos. Ambos cónyuges poseedores de una amplia cultura y dominando varios idiomas, apoyados en una bien dotada biblioteca ubicada en su casa, se dieron a la tarea de instruir profundamente a sus hijos, entre ellos a las tres hermanas. El tesón del General lo condujo a escribir en 1885 un tratado de aritmética especialmente para la formación de su prole.

Así, en 1886, producto de sus afanes y de la dedicación de las Tres Gracias, se producen los frutos del esfuerzo. Cada una de ellas presentó un trabajo consistente en un plano topográfico, planos que correspondían respectivamente a las ciudades de Puerto Cabello, Cumaná y La Guaira. Posteriormente, el 25 de agosto de 1899 Dolores, Delfina y Adriana presentaron en el Colegio Hispano Porteño de Puerto Cabello sus exámenes para optar a los títulos de Bachiller y de Agrimensor. Otras fuentes, como Leal (1981), señalan 1893 como el año de la obtención del título por un Decreto del Congreso. Finalmente, la UCV les confiere el título de agrimensor y con ello las hermanas Duarte Isava se constituyeron en las primeras mujeres en egresar de nuestra máxima casa de estudios. Así está asentado en los archivos universitarios y puede constatarse en el listado de egresados de dicha Universidad.

Alicia Maciá y Anzola (1914-¿?)

Nuestra biografiada nació en la Ciudad de Panamá, República de Panamá, el 17 de agosto de 1914. Alicia llega a Venezuela en 1926 y la adopta como su segunda Patria. Ella manifiesta, en 1947, su voluntad de adquirir la nacionalidad venezolana y realizados los trámites respectivos ésta le es otorgada por los órganos competentes en 1948. Sus primeros estudios los realizó en su tierra natal.

En 1936 forma parte del primer grupo de estudiantes que se inscribieron en el naciente Instituto Pedagógico Nacional (IPN). Cursa allí su educación superior y vive las vicisitudes de los años iniciales de la Institución y las angustias de sus compañeros. En 1942, culmina las materias del pensum de estudios y presenta la tesis "Balanza de precisión". Obtiene el título de Profesor de Educación Secundaria y Normal en la especialidad de Física, siendo integrante de la primera promoción.

Ella, como el resto de sus condiscípulos, fue fundadora del Colegio de Profesores de Venezuela.

Para el año escolar 1947-1948 es personal docente del recién creado Departamento de Física y Matemáticas del IPN, conformado por un buen número de egresados de la propia Institución, junto con el Profesor Humberto Parodi y bajo la dirección del Profesor José A. Rodríguez (Jefe de Departamento). Señala Torrealba Lossi (1986), que "muchos [de los primeros egresados] se quedaron en el propio Pedagógico, no por influencias y canonjías, sino debido a su capacidad" (p. 90). Ese era precisamente el caso de Alicia Maciá. Así, Alicia se convierte en formadora de nuevos docentes en las especialidades de Física y Matemáticas, quienes engrosaron las filas del profesorado del país.

Lamentablemente desconocemos otros detalles de la vida de esta destacada educadora. Tampoco sabemos dónde y cuándo falleció. Lo que sí puede afirmarse es que proporcionó una contribución significativa para la mejora de la enseñanza/aprendizaje en los liceos venezolanos.

Fuentes Consultadas

Biografías

Jesús S. González

Beyer, Walter; Orellana, Mauricio y Rivas, Sergio. (2009). Esbozo biográfico de un insigne matemático venezolano: Jesús Salvador González (1930-2008). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XVI, Nº 1, 39-50.
Orellana, Mauricio. (1980). Dos décadas de matemática en Venezuela. Caracas: Universidad Nacional Abierta.
Orellana, Mauricio. (1984). Discurso homenaje del Prof. Jesús S. González. III Encuentro de Profesores de Didáctica de la Matemática de Institutos de Educación Superior. CENAMEC.

Antonio Ornés Díaz

Cabrera Domínguez, Guillermo. (1993). Liceo "Andrés Bello" un forjador de valores. Caracas: Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia.
Estados Unidos de Venezuela. Gaceta Oficial Nº 21 908, del 15 de enero de 1946.
Moya Martínez, Francisco A. (s.f.). La Caracas que conocí. (s.d.)
Mudarra, Miguel Ángel (1988). Antonio Ornés. En: Mudarra, Miguel Ángel (1988). Semblanza de educadores venezolanos (p. 232). Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Olivares, Alberto E. (1986). Dr. Luis Ugueto. Ingeniero, astrónomo y profesor. Caracas: Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales.
Ornés, I. Comunicación vía correo electrónico.
U.E.D. "ANTONIO ORNES" está en Facebook. http://www.facebook.com/group.php?gid=112597612116024&v=photos&so=0.

Las Tres Gracias: Dolores, Delfina y Adriana Duarte Isavanio Ornés Díaz (1874-1958)
Alicia Maciá y Anzola (1914-¿?)

Albornoz, José Hernán. (1986). El Instituto Pedagógico: Una visión retrospectiva. Caracas: Ediciones del Congreso de la República.
Duarte, Carlos F. y otros. (1974). Homenaje al Dr. Francisco J. Duarte (1883-1972). Personalidad y correspondencia. Caracas: Ediciones de la Presidencia de la República.
Estados Unidos de Venezuela. Gaceta Oficial 22 514 de fecha13 de enero de 1948.
García Rodríguez, Alix M. (Comp.) (1996). Egresados de la Universidad Central de Venezuela (1725-1995). Tomo I (1725-1957). Caracas: Ediciones de la Secretaría.
Las Delfinas Duarte: las primeras agrimensoras. Independencia 200. 1893. http://www.bicentenario.gob.ve/independencia200/edicion/1893.pdf.
Leal, Ildefonso. (1981). Historia de la UCV. Caracas: Ediciones del Rectorado de la UCV.
Ortega, Kalinina. Primeras mujeres del país con títulos universitarios. El Nacional, lunes 3 de enero de 1977, Cuerpo C, p. C-12.
Parodi Alister, Humberto. (1986). El Instituto Pedagógico. Fundación y trayectoria. Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Torrealba Lossi, Mario. (1986). Entre los muros de la casa vieja. Caracas: Ediciones del Congreso de la República.

Fotografías

Lección 1
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.avn.info.ve/contenido/m%C3%A1s-42-millones-personas-atendidas-infocentros-2011
Diseño grafico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 8
Jóvenes interactuando con el internet
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 12
Infocentro
http://www.avn.info.ve/contenido/m%C3%A1s-42-millones-personas-atendidas-infocentros-2011
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 27
César navegando en internet
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Lección 2
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.avn.info.ve/contenido/m%C3%A1s-42-millones-personas-atendidas-infocentros-2011
Diseño grafico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Lección 3
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.profesorenlinea.cl/matematica/MatematicaBabilonia.html
http://www.upf.edu/materials/fhuma/portal_geos/eurt4ehip.html
Diseño grafico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 66
Silvio utilizando el software GEOGEBRA
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 73
Eleazar graficando
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Lección 5
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.avn.info.ve/
http://lavozdelpueblo1035fm.blogspot.com/
http://venezuela-us.org/es/
http://prensamat.blogspot.com/
http://periodicolamision.blogspot.com/
http://colectivohidrocarburogas.blogspot.com/
http://gallery.blipoint.com/
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Lección 6
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://elmundodelanoticia.com/?p=18086
MatematicaBabilonia.html
http://animalmascota.com/fotos-de-pajaros-exoticos/
http://www.michoco.org/departamento_-_choco_info_-_simbolos_-_aguila_arpia.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Lontra_felina
http://www.damisela.com/zoo/rep/tortugas/pleuro/pelo/expansa/index.htm
http://www.andigena.org/proyecto_oso_andino/oso_andino.asp
Diseño grafico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 142
Fotografía "Manuel en el Santo Ángel"
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 147
Fotografía "Himmaru con el Cunaguaro"
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 151
Fotografía "Morely junto a la tortuga Arrau"
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Pág 157
Fotografía "Fotografías y gráficas"
Foto: Morely Rivas Fonseca
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Lección 7
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.avn.info.ve/
http://www.correodelorinoco.gob.ve/
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Lección 8.
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.avn.info.ve/
http://www.mindeporte.gob.ve/
http://www.imss.fi.it/
http://sistemasdedisenodbt52.blogspot.com/
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Pág 190
Poliedro habitable
http://www.peruarki.com/un-poliedro-habitable/poliedro-habitable-arq-manuel-villa-peruarki-2/
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Lección 9
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://aldeafraypedrodeagreda.wordpress.com/}category/noticias/page/4/
http://es.wikipedia.org/wiki/Radio_comunitaria
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Lección 10
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://es.wikipedia.org/wiki/Secuencia_de_Hubble
http://www.ojocientifico.com/2008/07/03/un-sistema-solar-mas-ovalado-que-circular
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca (2012)

Lección 11
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://www.avn.info.ve/
http://www.arqui.com/
http://www.correodelorinoco.gob.ve/
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Lección 12
Algunas de las imágenes
en las composiciones son tomadas de:
http://my.opera.com/frattese/albums/show.dml?id=10566912
http://tallaytorno.blogspot.com/.
http://www.avn.info.ve/
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena (2012)

Este libro fue impreso en los talleres de Gráficas XXXXX
El tiraje consta de 400.000 ejemplares
En el mes de abril de 2012
República Bolivariana de Venezuela