Colección Bicentenario

2

Segundo año

Matemática

Educación Media

Conciencia matemática

Matemática
Segundo año

Nivel de Educación Media del Subsistema de Educación Básica

Hugo Rafael Chávez Frías
Presidente de la República Bolivariana de Venezuela

Maryann del Carmen Hanson Flores
Ministra del Poder Popular para la Educación

Maigualida Pinto Iriarte
Viceministra de Programas de Desarrollo Académico

Trina Aracelis Manrique
Viceministra de Participación y Apoyo Académico

Conrado Jesús Rovero Mora
Viceministro para la Articulación de la Educación Bolivariana
Viceministro de Desarrollo para la Integración de la Educación Bolivariana

Maigualida Pinto Iriarte
Directora General de Currículo

Neysa Irama Navarro
Directora General de Educación Media

Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012
Primera edición: Febrero 2012
Tiraje: 450.000 ejemplares
Depósito Legal: lf5162012370757
ISBN: 978-980-218-320-3
República Bolivariana de Venezuela

DISTRIBUCIÓN GRATUITA

Coordinación General de la Colección Bicentenario
Maryann del Carmen Hanson Flores

Coordinación Pedagógica Editorial de la Colección Bicentenario
Maigualida Pinto Iriarte

Coordinación General Logística y de Distribución
de la Colección Bicentenario
Franklin Alfredo Albarrán Sánchez

Coordinación Logística
Hildred Tovar Juárez
Jairo Jesús Bello Irazabal
Jan Thomas Mora Rujano

Revisión Editorial de la Colección Bicentenario
Norelkis Arroyo Pérez

Asesoría General Serie Matemática
Rosa Becerra Hernández
Castor David Mora

Coordinación Editorial Serie Matemática
Alí Rojas Olaya

Autoras y Autores
Aldo Enrique Mariño
Alí Rojas Olaya
Ana Duarte Castillo
Andrés Moya Romero
Darwin Silva Alayón
Dolores Gil García
Edgar Vasquez Hurtado
Hernán Paredes Ávila
Jorge Luis Blanco
Keelin Bustamante Paricaguan
Norberto Reaño Ondarroa
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez
Zuly Millán Boadas

Revisión de Contenido
Andrés Moya Romero
Gabriela Angulo Calzadilla
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez

Biografías
Walter Beyer

Corrección de Textos
Doris Janette Peña Molero
Marytere de Jesús Buitrago Bermúdez
Magaly Muñoz de Pimentel

Coordinación de Arte
Himmaru Ledezma Lucena

Diseño Gráfico
Morely Rivas Fonseca

Ilustraciones
Himmaru Ledezma Lucena
Julio Morales Mosquera
Morely Rivas Fonseca
Rafael Pacheco Rangel

Diagramación
Manuel Arguinzones Morales
Mariana Lugo Díaz

Estudiantes de la Patria Grande

El 12 de febrero de 1814 los generales patriotas José Félix Ribas y Vicente Campo Elías, ante la merma de soldados, prepararon en un lapso significativamente corto a estudiantes de Caracas en el arte militar. La Batalla de La Victoria fue, si se atiende a la enorme diferencia numérica, imposible de ganar. Sin embargo, el coraje estudiantil bolivariano logró el portento del triunfo. La Victoria era considerada un punto estratégico para alcanzar la ciudad de Caracas. Ribas le decía a todos estos jóvenes: "*no podemos optar entre vencer o morir, necesario es vencer*".

Para ustedes hemos escrito este libro pensado como instrumento para la liberación, sobre el cual hemos puesto nuestro mejor esfuerzo por guiar su educación matemática bajo tres premisas fundamentales: estudiar y reflexionar sobre conceptos matemáticos unidos al contexto y a sus vivencias; la reivindicación de la matemática como una disciplina científica, cuyo aprendizaje permite la generación de valores que están acoplados a la formación de ciudadanía crítica y al desarrollo de una verdadera sociedad democrática; y la tercera, que el aprendizaje de la Matemática, en nuestras aulas, plazas, consejos comunales y otros lugares de aprendizaje, se propicie desarrollando la comprensión de conceptos y procedimientos mediante actividades de investigación. Aspiramos que la conjunción de estas tres premisas les permita adquirir el instrumental matemático, tanto desde el aspecto cognitivo como ético, que les exhorte a formar parte activa en la construcción del país que queremos y merecemos.

Las autoras y autores de este libro pretendemos que ustedes desarrollen potencialidades, es decir, habilidades, destrezas y conocimientos, con las cuales puedan ser parte de la construcción colectiva de un modelo político que garantice la mayor suma de felicidad posible donde todas las personas podamos vivir bien en un contexto de conciencia, libertad, ética y amplio conocimiento de nuestras culturas.

Desde el punto de vista didáctico y pedagógico, este libro lo podrán estudiar siguiendo algunas pautas que hemos diseñado para su mejor provecho. Cada vez que se consigan con esta viñeta será la indicación de una actividad que deberán realizar colectivamente según las indicaciones de cada lección. La viñeta permite destacar algunas ideas del texto o algunas actividades propuestas.

¡Estudiantes de la Patria Grande! La Matemática es para el pueblo. Es ciencia con conciencia, es elemento para la paz y para la vida en armonía con la naturaleza. Ella la hemos asumido como instrumento para la liberación y para ello repensamos su didáctica. Están invitadas e invitados a modelar, conjeturar, contar, medir, estimar, diseñar, jugar, localizar y argumentar. Resolvamos problemas para la vida que nos inciten a descubrir quiénes somos en una sociedad que ha sido permeada para alejarse de nuestras raíces. En este libro les proponemos una educación crítica de la matemática, al servicio de la humanidad, que sirva para comprender el Universo, que acabe con los monopolios del saber y el conocimiento, que sea útil para la emancipación, para la autodeterminación de los pueblos, para la transformación social, en suma, que se yerga en humana.

Docentes, madres, padres y representantes de la Patria Grande

La maestra chilena Gabriela Mistral nos escribió algunas sabias consejas a quienes dedican su vida a la docencia: *acuérdense de que su oficio no es mercancía sino oficio divino; si no pueden amar no enseñen; saber es simplificar sin quitar esencia; enseñen con intención de hermosura, porque la hermosura es madre; recuerden que para dar hay que tener mucho; sean fervorosas y fervorosos, para encender lámparas basta llevar fuego en el corazón; vivifiquen su clase, cada lección ha de ser viva como un ser*. Este libro que tienen en sus manos sus hijas, hijos y estudiantes, ha sido escrito y pensado como instrumento para la liberación. En él está el contenido matemático inherente a este segundo año de Educación Media, sólo que lo abordaremos juntos partiendo de un tema generador de aprendizaje y enseñanza, surgido de nuestra propia realidad. La Matemática constituye una poderosa herramienta para la descripción del mundo, sus fenómenos, relaciones y problemas, sin embargo, tradicionalmente su didáctica ha estado signada por el énfasis en los algoritmos y las fórmulas, por la desconexión de la actividad matemática que desarrollan las y los adolescentes con la realidad, el mundo y sus problemas, y por el trabajo individual como única forma de alcanzar el aprendizaje. La Educación Matemática en el contexto venezolano y nuestramericano (latinoamericano y caribeño) debe trascender estos fines y constituirse en un medio para impulsar el desarrollo humano, social, cultural, político y económico de nuestros pueblos, tal como se proyecta en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela.

Todas las lecciones de este texto escolar se engranan en los ejes integradores: ambiente y salud integral, soberanía y defensa de la nación, lenguaje, interculturalidad, trabajo liberador, derechos humanos y cultura para la paz, y tecnología de la información y comunicación. Sus intencionalidades son crear, reflexionar, valorar, participar protagónicamente, y convivir. En las lecciones se presentan lecturas y actividades donde, por una parte, se fortalece el rol de sus hijas, hijos y estudiantes en actividades de investigación, experimentación, comunicación, reflexión, transformación del pensamiento y la acción, estéticas y lúdicas. Por otra parte, intentamos que sus hijas, hijos y estudiantes modelen, conjeturen, cuenten, midan, estimen, diseñen, jueguen, localicen y argumenten.

Tanto las trece lecciones como las tres biografías de este libro de texto responden clara y científicamente a las necesidades, intereses e intencionalidades de la educación que tanto hemos soñado durante muchos años y que nos legara el padre de la pedagogía nuestramericana Simón Rodríguez. El libro, toma en cuenta, fundamentalmente, los siguientes grandes principios de la educación emancipadora: los vínculos entre el saber y trabajo; la praxis como constructo en el que no se concibe el divorcio entre teoría y práctica; la comunión con otras asignaturas; su ejercicio centrado en valores sociocomunitarios, y su acción en convivencia con la naturaleza y la practica investigativa.

Siéntanse orgullosas y orgullosos del rol que se les ha encomendado, de seguir el ejemplo de Bolívar y Rodríguez. *Contemplen de cerca a sus estudiantes* (y a sus hijas e hijos)*, sigan sus pasos con avidez, formen sus corazones para la libertad, para la justicia, para lo grande, para lo hermoso. Vean sus conductas, sus pensamientos escritos, sus almas pintadas en el papel, para que algún día puedan decir: yo sembré esta planta; yo la enderecé cuando tierna: ahora, robusta, fuerte y fructífera, he ahí sus frutos; ellos son míos: yo voy a saborearlos en el jardín que planté: voy a gozar a la sombra de sus brazos amigos.*

Índice

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Raimundo Chela Aboudib (1919-1984)

Raimundo Chela nace el 17 de noviembre de 1919 en la ciudad de Carúpano (estado Sucre), siendo sus padres Emilia Aboudib y Julián Chela, quienes habían emigrado a Venezuela desde el Medio Oriente, específicamente desde lo que hoy es el Líbano.

Estudia primaria en su terruño y secundaria en Caracas, ciudad a la cual arribó a inicios de los años 30. Su vocación por la matemática lo hace inscribirse en Ingeniería en la Universidad Central de Venezuela (UCV), los cuales abandona para incorporarse como alumno del recién creado Instituto Pedágogico Nacional (IPN), formando parte de sus primeros egresados.

Nuestro biografiado siguió los pasos de los insignes matemáticos Juan Erick Cagigal, Francisco José Duarte y Andrés Zavrotsky, y como éstos profesó un amor profundo por las matemáticas.

Se hizo merecedor de una beca para seguir estudios doctorales en matemáticas en el King's College de la Universidad de Londres, siendo el primer becario del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la UCV. Culmina en 1961 exitosamente estos estudios, siendo así uno de los primeros venezolanos en doctorarse en matemáticas. Algunos resultados de sus investigaciones fueron publicados, en 1963, en una prestigiosa revista científica inglesa.

Su actividad docente comenzó temprano como profesor de distintas instituciones educativas: Escuela Normal de Mujeres, Escuela Técnica Industrial, los liceos Aplicación y Fermín Toro y el IPN. En 1949, trabajó en la Facultad de Ingeniería (U.C.V.) y finalmente, en la Facultad de Ciencias.

Su quehacer académico abarcó otras facetas: participación en las reformas a los programas de educación secundaria; dictado de conferencias, cursillos y talleres para el mejoramiento de los docentes; redacción de notas para los cursos de matemáticas; dirección de trabajos de grado; obras como su Curso de Álgebra (1957); publicación en diversas revistas de sus reflexiones acerca de la Didáctica de las Matemáticas. También en diversas entrevistas dio a conocer sus concepciones acerca de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Adicionalmente, el profesor Chela formó parte en 1943 del grupo fundador del Colegio de Profesores de Venezuela y fue su presidente en dos oportunidades: primero en 1952, en plena época de la dictadura, y después en 1963.

Su concepción del gremialismo no estaba reñida con sus ideas pedagógicas y científicas. Todo lo contrario, ellas se conjugaban perfectamente y así queda de manifiesto cuando, de su puño y letra, estampó lo siguiente como mensaje a los educadores venezolanos: "deseo a todos los educadores venezolanos primordialmente los dos objetivos siguientes: 1°) que el trabajo diario esté siempre dirigido a lograr una comprensión y dominio cada vez mayor de los temas que les toque enseñar; 2°) mantener la unidad gremial para obtener mejores condiciones de trabajo que les permitan desplegar el esfuerzo docente intenso y creador".

Chela se dedicó a impulsar, en todas sus vertientes, el desarrollo de las matemáticas en nuestro país. Muestra de ello es sin duda su activa labor en pro de la creación de los estudios matemáticos como carrera universitaria, esfuerzo que se vio recompensado al crearse en 1958 la Facultad de Ciencias de la UCV, en virtud de lo cual fue convocado por el Rector Francisco De Venanzi para pronunciar el discurso de orden en el acto inaugural de dicha dependencia.

Tuvo variados reconocimientos. En 1958 se le ofrece dirigir el Pedagógico, lo cual rechaza. Tiene en mente seguir estudios más profundos en su área y así se lo hace saber al Ministro. En 1962 es elegido Miembro Correspondiente de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela. Se le invita como orador de orden en el Primer Congreso Venezolano de Matemáticas (Mérida, 1977). En 1979 es galardonado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas con el Premio Nacional de Ciencia. En la Universidad del Zulia, la Promoción de Licenciados en Educación, Mención Ciencias Matemáticas de 1980 lleva su nombre. Tanto en el Instituto Pedagógico de Caracas (IPC) como en la Facultad de Ciencias de la UCV hay sendas salas bautizadas con el nombre de Raimundo Chela.

Su pedagogía se muestra en una entrevista que le hiciera en 1979 el periodista Arístides Bastidas. A la pregunta referida al fracaso de los alumnos en matemáticas, respondió que "desde los primeros grados condicionamos mal a los alumnos frente a ellas. Eso ocurre porque pequeños errores del aprendizaje son cobrados de un modo severo como no se hace con otras materias."

Muere accidentalmente en Caracas el 3 de julio de 1984 a los 65 años, dejando tras de sí una imborrable huella en quienes tuvieron el placer de conocerle y de compartir su sabiduría, sus profundos conocimientos y su don de gente. El 9 de mayo de 1985, en el IPC, se llevó a cabo un sentido homenaje post mórtem a este insigne venezolano, el cual contó con la presencia de familiares, ex-alumnos, amigos y colegas quienes recordaron y destacaron diversos aspectos de la obra y vida de Raimundo Chela.

El tiempo y los relojes de sol

El tiempo y los relojes de sol

En el transcurrir de la historia han existido diversas maneras de medir el tiempo y muchos conceptos relacionados merecen ser destacados en ese recorrido. La cronología, por ejemplo, es aquella que permite ubicar todos esos momentos puntuales en los cuales se producen ciertos hechos determinados, y también nos permite ubicar los procesos que tienen lugar.

En este sentido, podemos hacer referencia a numerosas formas y diferentes instrumentos de medición del tiempo. Las más antiguas, por ejemplo, estaban basadas en la medición que se hace del movimiento, como también de los cambios materiales que sufren los objetos con el paso de los años. Lo que se hacía en un principio era una medición de todos los movimientos que presentaban los astros, como el caso específico del sol. Lo que produjo un cambio decisivo en la medición del tiempo fue el desarrollo de la astronomía que se realizó de manera continua. Hubo una permanente creación de instrumentos tales como los relojes de arena, los relojes de sol y también las clepsidras, que son relojes de agua, hasta la actualidad, donde contamos con relojes atómicos.

Es necesario destacar que nuestros pueblos originarios indoamericanos fueron grandes conocedores de la astronomía. Sin embargo, por largo tiempo, sus conocimientos fueron subestimados y, muchas veces, nos hicieron creer que sus aportes a la ciencia habían sido poco importantes. Pero Incas, Mayas y Aztecas, entre otros pueblos originarios, fueron precursores en maneras de medir el tiempo. Es así como en el año 2007 se encontró el **primer reloj solar del mundo maya**, un descubrimiento localizado en el sitio arqueológico de las Ruinas de Copán, al oeste de Honduras. El hallazgo lo hizo el Observatorio Astronómico Centroamericano de Suyapa de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras.

El reloj solar les permitía medir las fechas del año asociadas con los solsticios, equinoccios y los pasos del sol por el cenit, a través de la sombra que produce el sol en las estructuras. Por su parte, los Aztecas utilizaban un calendario solar que estaba dividido en 5 períodos de 73 días, los cuales eran unas especies de estaciones.

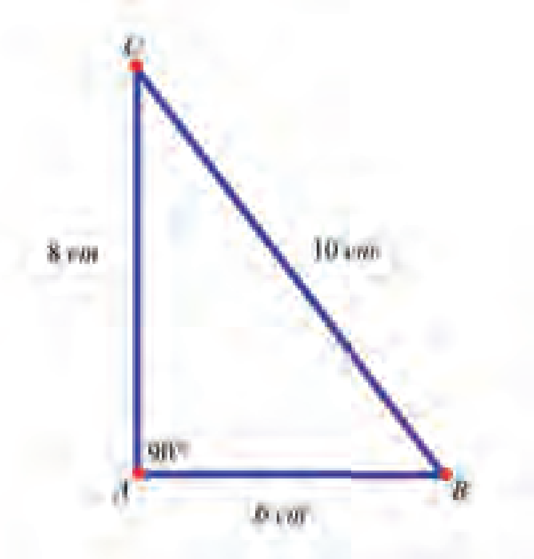
Además de sentir legítimo orgullo por nuestros ancestros indoamericanos, cuyos conocimientos muchas veces han querido ser ignorados por quienes han impuesto el pensamiento *occidental*, es importante que sepan que con los conocimientos matemáticos, que van aprendiendo a lo largo de sus vidas escolares, tales como: punto, recta, segmento, triángulos, rectángulos, diagonales, polígonos, área de polígonos, y otros más, pueden ir construyendo instrumentos que les sirvieron a ellos para medir el tiempo. Los invitamos, entonces, a una aventura matemática que, con la colaboración, de sus compañeras, compañeros y docentes, los conducirá por el extraordinario camino del aprendizaje matemático.

¿Qué les parece si tratamos de construir un reloj de sol, tal como lo hicieron los Mayas?

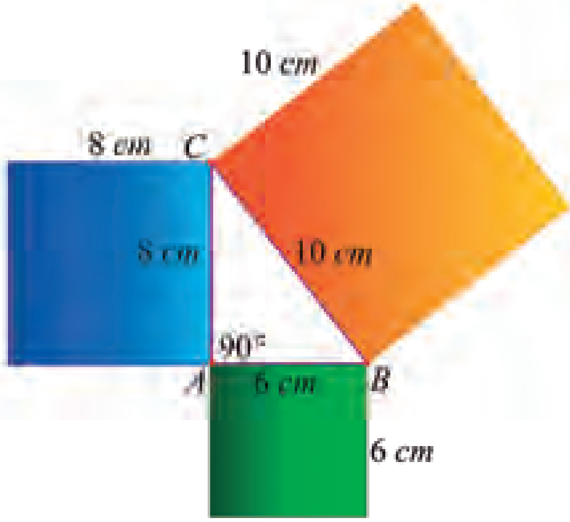
Para ello, necesitaremos, en nuestro camino de construcción, algunos conocimientos matemáticos. Los invitamos a realizar las siguientes actividades que nos permitirán avanzar.

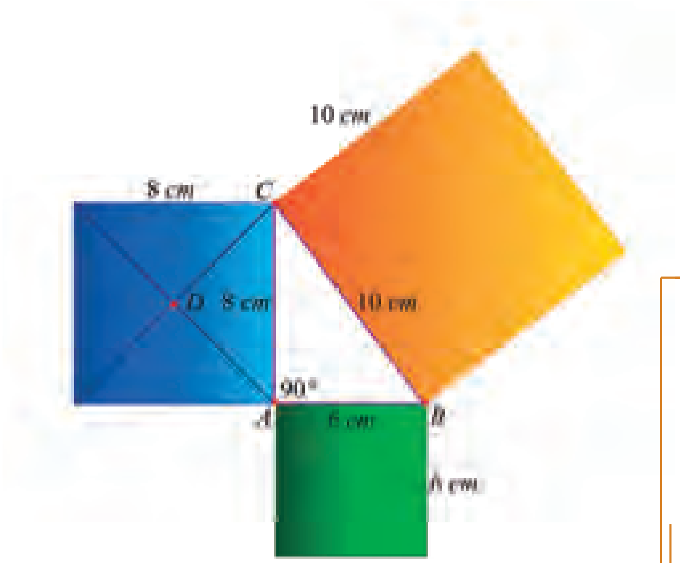
Acercándonos a Pitágoras

Dibujen un triángulo rectángulo ΔABC, cuyos lados midan, $6\,cm$, $8\,cm$ y $10\,cm$ es decir: $AB = 6\,cm$, $AC = 8\,cm$ y $CB = 10\,cm$; $m\measuredangle CAB = 90°$. En un triángulo rectángulo, a los lados de menor longitud los llamamos **catetos** y al lado de mayor longitud, opuesto al ángulo recto, lo denominamos **hipotenusa.**



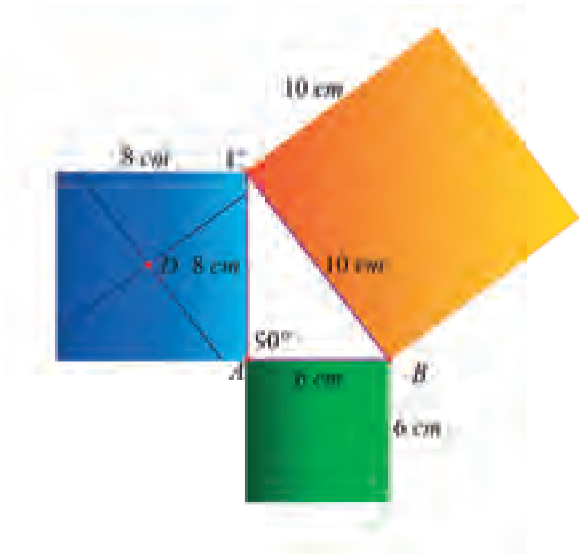
Dibujen tres cuadrados, sobre los lados del triángulo ΔABC, considerando para ello las longitudes de los lados, es decir, un cuadrado de lado $6\ cm$, otro de lado $8\ cm$ y un último cuadrado de lado $10\ cm$. Calculen el área de cada uno de esos cuadrados (recuerden que el área de un cuadrado viene dada por el producto de su base por su altura, pero como la longitud de sus lados miden igual, decimos que el área es igual a la medida del lado al cuadrado).

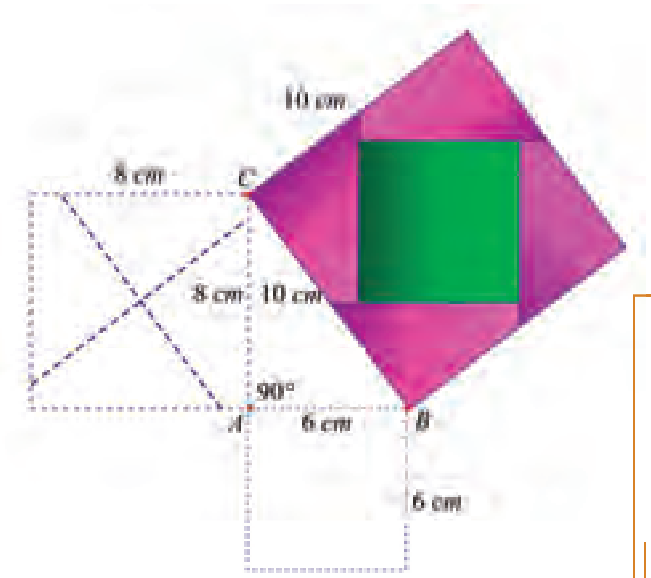




Tracen las diagonales del cuadrado de lado $8\ cm$ (ratifiquen que el punto donde se intersecan las diagonales se ubica en el centro del cuadrado). Nombren al punto con la letra D.

Tracen una recta paralela al segmento BC que pase por el punto D y una recta perpendicular a ella que también pase por el punto D. Observen que el cuadrado de lado $8\ cm$ ha quedado dividido en cuatro figuras.



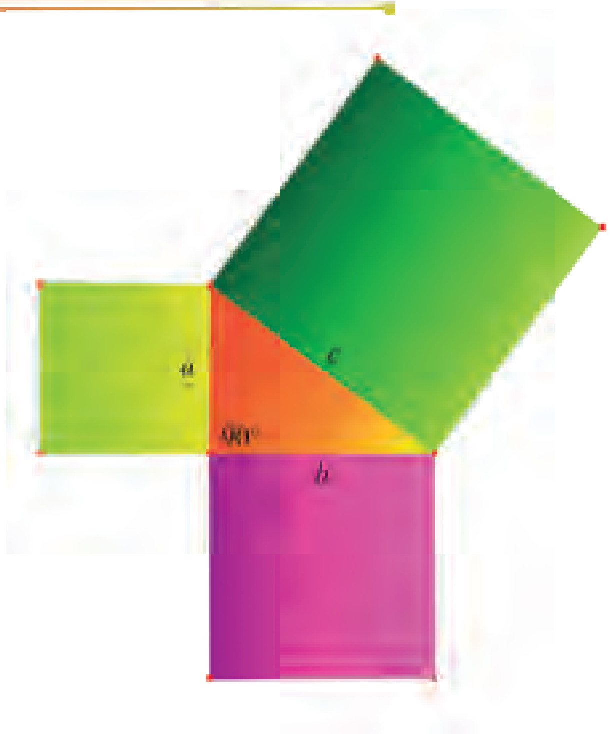


Recorten las cuatro figuras obtenidas así como el cuadrado de lado $6\ cm$ y procedan a cubrir totalmente, con esas piezas, el cuadrado de lado $10\ cm$. ¿Pudieron cubrirlo completamente?

Utilizando el cálculo de las áreas de los tres cuadrados de lados $6\ cm$, $8\ cm$ y $10\ cm$ y lo que han construido en la actividad anterior, ¿qué pueden concluir? Socialicen las conclusiones con sus compañeras, compañeros y docentes.

La conclusión a la cual han llegado se llama en Matemática una conjetura; cuando logramos demostrar formalmente dicha conjetura se convierte en un teorema. Ustedes deben haber arribado a una conjetura similar a la que escribimos a continuación:

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los **catetos** del triángulo rectángulo, es igual al área del cuadrado construido sobre la **hipotenusa**.



Observen que si tenemos un triángulo rectángulo de lados a, b y c, siendo c el lado de mayor longitud, es decir la hipotenusa, tendríamos que el área del cuadrado de lado a será a^2, el área del cuadrado de lado b será b^2 y el área del cuadrado de lado c, es c^2.

Tendríamos entonces: $a^2 + b^2 = c^2$

Esto es lo que se conoce en Matemática como el **Teorema de Pitágoras**, que ustedes estudiarán en detalle más adelante.

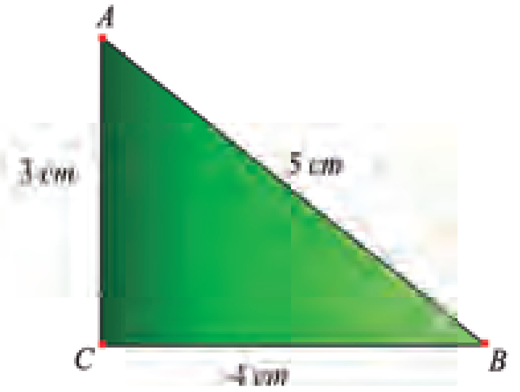
Es uno de los teoremas más importante de la geometría elemental. Con su utilización se han resuelto infinidades de problemas que han incidido en el nivel de vida de la humanidad, ya que es una herramienta útil para la medida indirecta de longitudes. Pero, ¿quién fue Pitágoras? Fue un filósofo y matemático griego que vivió en el período 585 - 500 A.C. Fundó la Escuela Pitagórica, cuyo símbolo era el pentágono estrellado.

El lema de la Escuela Pitagórica fue: **todo es número** y su emblema, el pentagrama o polígono regular estrellado.

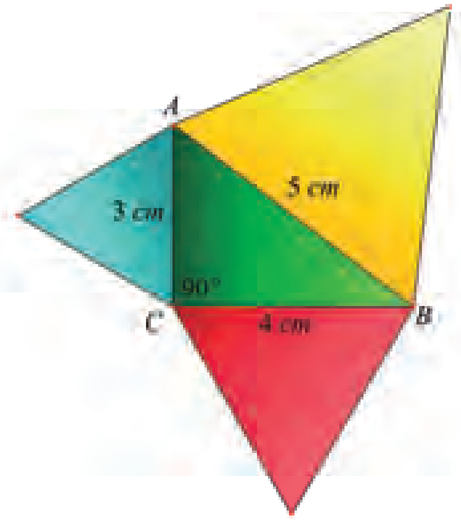
Si medimos con el transportador cada uno de los ángulos correspondientes a cada vértice y se suman los valores obtenidos, esta suma es aproximadamente 180^{o}. Les invitamos a comprobarlo usando sus transportadores.

Extendiendo a Pitágoras

Ya vimos que el Teorema de Pitágoras se cumple para cuadrados que se construyen sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo. ¿Será cierto que el Teorema de Pitágoras se cumple para cualesquiera figuras semejantes? Es decir, para figuras que tienen la misma forma pero no, necesariamente, el mismo tamaño. Veamos:



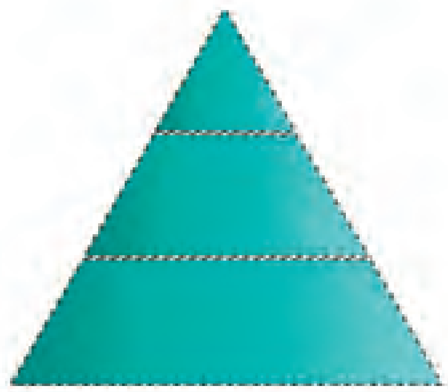
Dibujen un triángulo rectángulo ΔABC, cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 5 cm, es decir: $AB = 3cm$, $AC = 5cm$ y $CB = 4cm$; $m\sphericalangle ACB = 90°$.



Dibujen tres triángulos equiláteros considerando para ello las longitudes de los lados del triángulo ΔABC, es decir, un triángulo de lado 3 cm, otro de lado 4 cm y un último triángulo de lado 5 cm.

Recorten los triángulos equiláteros cuyos lados se corresponden a los catetos del triángulo rectángulo ΔABC.

Recorten el triángulo equilátero de lado 3 cm en tres piezas.



Procedan a cubrir totalmente el área del triángulo de lados iguales a 5 cm con las piezas obtenidas de los triángulos de 4 cm y 3 cm.

¿El procedimiento anterior se puede aplicar en un triángulo rectángulo para cualquier figura semejante que se construya sobre cada uno de los lados del triángulo? Conversen al respecto con sus compañeras, compañeros y docentes.

Recordando la potenciación y sus propiedades

Se conoce como producto, el resultado de multiplicar dos o más factores. La potenciación puede entenderse como una forma de abreviar la multiplicación de factores iguales, es decir, consiste en obtener el resultado de una multiplicación en el cual la cantidad de factores está indicada en el exponente:

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}}$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

- Cuando el exponente es un número entero negativo, equivale a la fracción inversa de la base pero con exponente positivo.

$$b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \frac{1}{b}}_{n \text{ veces}} \text{ con } b \neq 0$$

- Cualquier número elevado al exponente 0 el resultado equivale a 1, excepto el caso particular de 0 a la 0 que no está definido.

$$b^0 = 1 \text{ , con } b \neq 0$$

- La definición de potenciación puede extenderse al conjunto de los números reales y complejos que verán a lo largo del nivel de Educación Media.

Multiplicación de potencias de igual base

El producto de dos potencias que tienen la misma base, es igual a una potencia de dicha base que tiene como exponente la suma de los exponentes, es decir:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Es decir, $7^6 \cdot 7^3 = 7^{6+3} = 7^9$

División de potencias de igual base

El cociente de dos potencias que tienen la misma base, es igual a una potencia de dicha base que tiene como exponente el resultado de restar el exponente del divisor al del dividendo, es decir:

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

Ejemplo: $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$.

Reloj de sol antiguo

Potencia de un producto

La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente, es decir:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo: $(7 \cdot 13)^{17} = 7^{17} \cdot 13^{17}$

Potencia de una potencia

La potencia de una potencia de base a es igual a la potencia de base a, cuyo exponente es el producto de ambos exponentes (la misma base y se multiplican los exponentes):

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{mn}$$

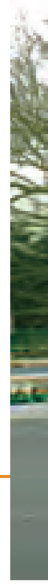
Ejemplo: $(5^7)^{11} = 5^{7 \cdot 11} \cdot 5^{77}$

Potencia de un cociente

La potencia de un cociente es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{3^7}{5^7}$



Potencia de base 10

Para las potencias con base 10, el efecto será desplazar la coma decimal tantas posiciones como indique el exponente, hacia la izquierda si el exponente es negativo, o hacia la derecha si el exponente es positivo.

Ejemplos:

$$10^{-5} = 0,00001 \qquad 10^{1} = 10$$
$$10^{-4} = 0,0001 \qquad 10^{2} = 100$$
$$10^{-3} = 0,001 \qquad 10^{0} = 1 \qquad 10^{3} = 1.000$$
$$10^{-2} = 0,01 \qquad 10^{4} = 10.000$$
$$10^{-1} = 0,1 \qquad 10^{5} = 100.000$$

- ¿Ustedes creen que 16^5 es igual a 2^{20}?
- ¿Ustedes creen que 243^7 es igual a 3^{35}?
- Calculen en sus cuadernos, el valor de x en las siguientes ecuaciones:

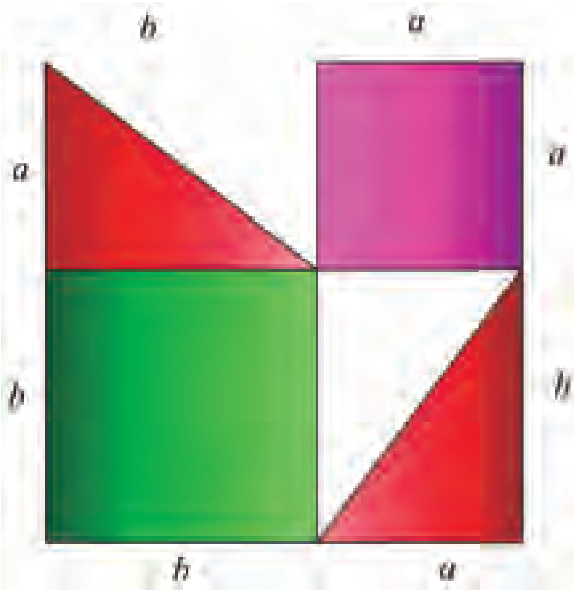
  - $49^5 \cdot 7^3 = 7^x$
  - $\dfrac{125^4}{25^6} = 5^x$
  - $\left(36^6 \cdot 216^3\right)^4 = 6^x$
  - $\left(\dfrac{121^9}{11^{17}}\right)^3 = 11^x$

- Si del punto A al punto B hay una distancia de 2^{2012} cm, ¿cuántos centímetros habrá recorrido un muchacho que parte de A y llega al punto medio entre A y B?

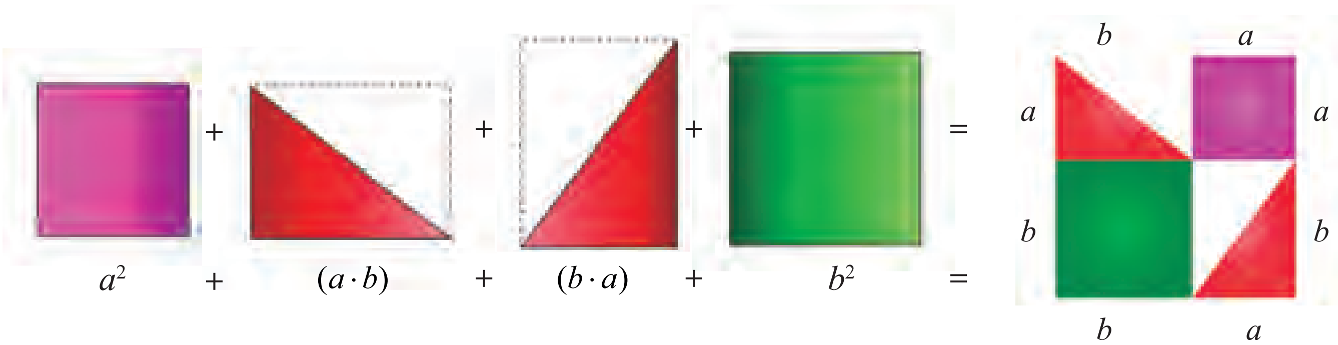
  - 2^{2011} cm
  - 1^{2012} cm
  - 2^{1006} cm
  - 1^{2012} cm

Conociendo productos notables

Construyan un cuadrado de lado $a+b$, tal como se muestra en la figura. Observen que el cuadrado de lado $a+b$ ha quedado formado por cuatro rectángulos: dos de lados a y b, uno de lado a y otro de lado b. ¿Es cierto que todo cuadrado también es un rectángulo? ¿Por qué? Si calculamos las áreas de dichos rectángulos tenemos cuatro áreas: dos rectángulos de área $a \cdot b$, un cuadrado de lado a, cuya área es a^2 y otro cuadrado de lado b, cuya área es b^2.



¿Si sumamos el área de los cuatro rectángulos que forman el cuadrado grande, obtendremos el área de dicho cuadrado? ¿Por qué? ¿Cuál es el área del cuadrado grande? Socialicen esto con sus compañeras, compañeros y con el apoyo de su docente. Al hacerlo tendríamos, visualmente, algo como se muestra en la siguiente figura:



Observen que al sumar el valor de cada una de las cuatro áreas de cada uno de los rectángulos, tendremos el área del cuadrado grande, la cual es $(a+b)^2$. Por tanto, obtendremos la siguiente igualdad:

$$a^2+(a\cdot b)+(a\cdot b)+b^2=(a+b)^2 \text{, es decir, } (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

La expresión $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ se conoce en Matemática con el nombre de **producto notable**, el cual estudiarán en detalle en este segundo año del nivel de Educación Media. ¿Por qué es un **producto**? Porque por las propiedades de la potenciación, se tiene que $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)$, es decir, es el producto de dos expresiones matemáticas. ¿Por qué es **notable**? Porque es un sinónimo de importante, de destacado. Por tanto, la expresión $(a+b)^2$ es un producto importante, es un producto notable. Fíjense que siempre lo podremos calcular de manera sencilla, haciendo la suma del cuadrado de a (a^2), más el doble producto de a por b ($2ab$), más el cuadrado de b (b^2). En este segundo año del nivel de Educación Media ustedes estudiarán otros productos notables.

Reloj de sol ecuatorial

Ahora tenemos algunos conocimientos matemáticos que nos pueden ayudar en la comprensión de cómo construir un reloj de sol. Se asume que el primer reloj de sol consistía, simplemente, en una estaca vertical en el suelo. El ser humano debe haberse percatado que la manera en que iba cambiando la sombra podía ser utilizado, quizás con marcadores de piedra, de manera similar a como se han usado las agujas de un reloj. En ese camino de la medición del tiempo, el día fue dividido en 12 partes. Esas partes corresponden a las doce horas del día en que, aproximadamente, tenemos sol. Por supuesto que esa cantidad de horas de sol varía en su duración, son más largas en verano y más cortas en invierno, en el caso de los países que tienen diferentes estaciones. En las zonas más cercanas al ecuador, como es el caso de Venezuela, esa diferencia no es tan notoria como lo es en las zonas cercanas a los polos.

Construyamos un reloj de sol

Vamos a describir por partes la construcción de un reloj de sol ecuatorial. Hay que iniciar construyendo un *estilete* (pieza triangular con un ángulo que mida 90°), que permitirá se proyecte la sombra del sol sobre una superficie graduada (líneas horarias) y paralela al ecuador celeste (y terrestre).

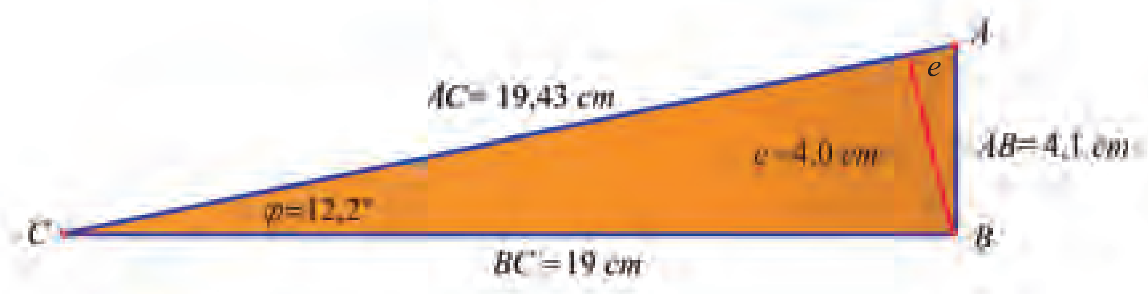
Es importante saber que la medida del ángulo φ (*phi*) es igual a 12,2°, debido a que ésta representa la latitud (distancia angular entre la línea ecuatorial y un punto determinado del planeta) de la República Bolivariana de Venezuela.

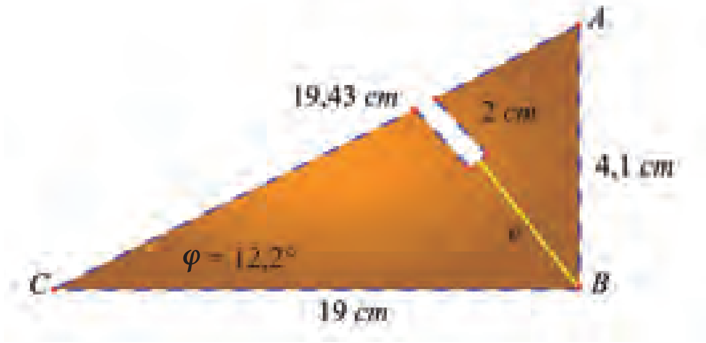
Materiales necesarios para la construcción del *estilete:*

- Regla graduada.
- Transportador.
- Papel bond.
- Cartulina o madera de poco espesor, cuyo largo sea mayor a 20 *cm* y el ancho a 5 *cm*.
- Tijera.
- Lápiz, marcador o creyón.

Construyamos el *estilete*

Lo primero que tenemos que hacer es dibujar en una cartulina, un triángulo rectángulo ΔABC de catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, cuyas medidas sean 4,1 *cm* y 19 *cm* respectivamente, e hipotenusa $\overline{AC}$ cuya medida sea 19,43 *cm*, y siendo la medida del ángulo φ igual a 12,2°, es decir, $\varphi = 12,2°$ tal y como se muestra a continuación (háganlo de manera que la longitud del segmento e sea 4 *cm*):



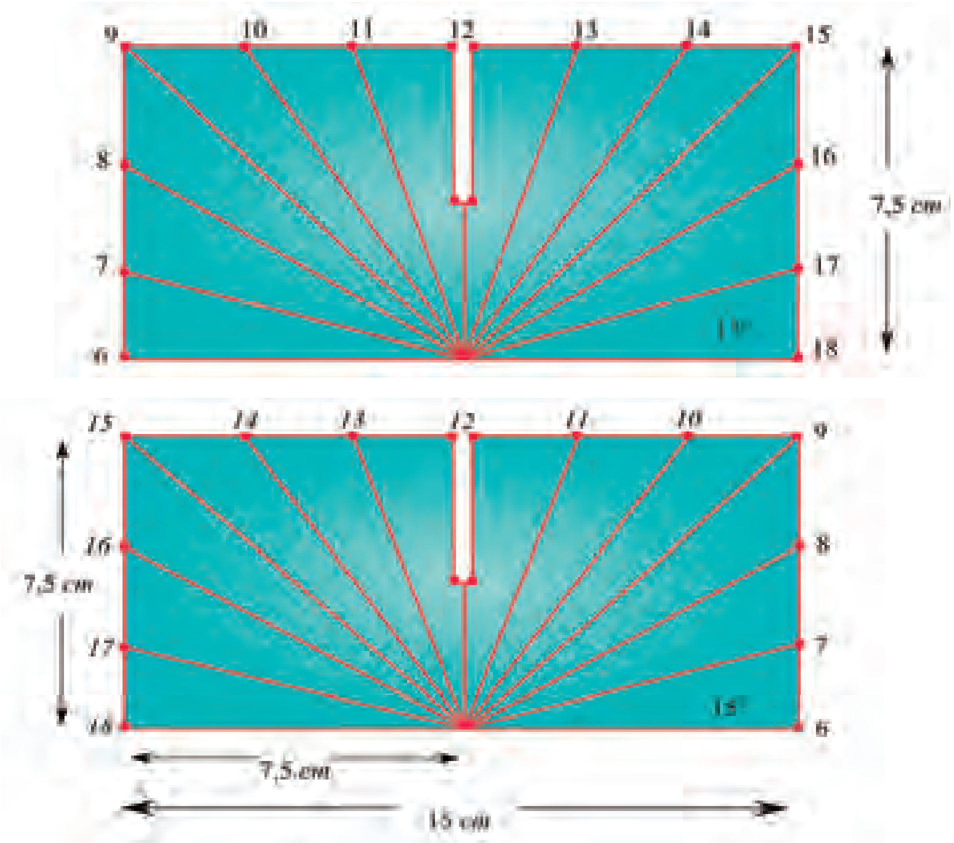


Recorten el estilete dibujado en la cartulina y hagan en el mismo una ranura de 2 *cm,* justo por donde se intersecan los segmentos e y $\overline{AC}$.

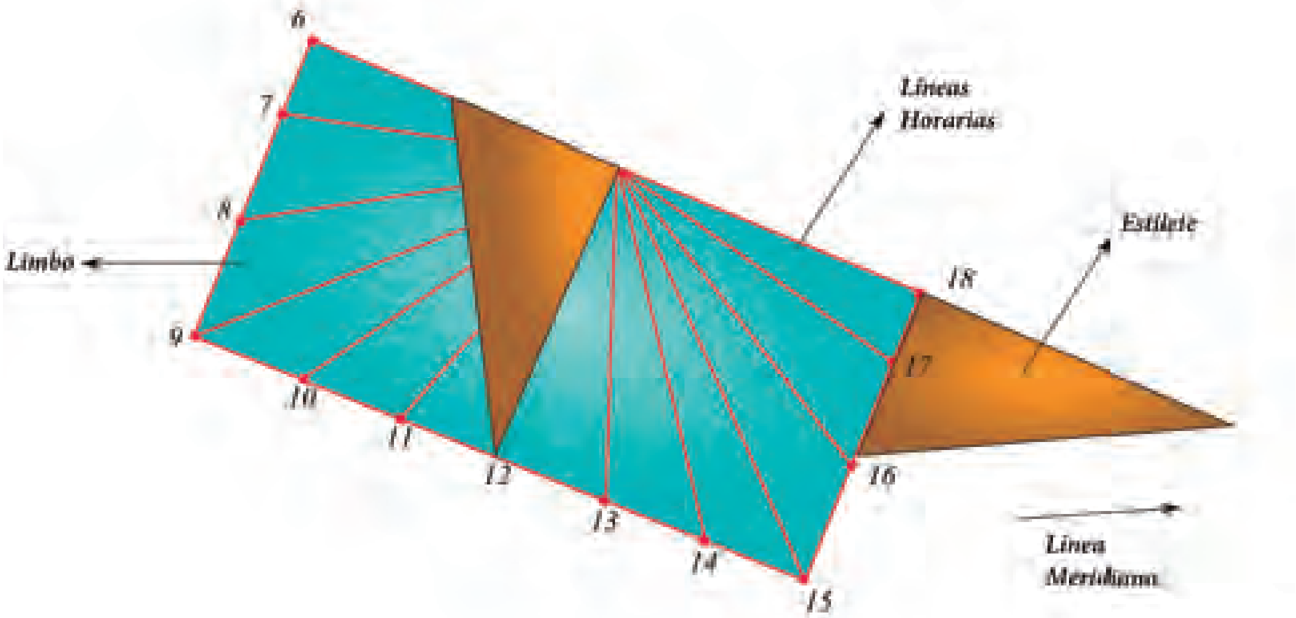
Verifiquen que la suma del cuadrado de los catetos sea igual al cuadrado de la hipotenusa, así, debe cumplirse que: $a^2+b^2=c^2$. Es decir, que se cumple el **Teorema de Pitágoras** que hemos trabajado en esta lección.

Construyamos el *limbo*

Sobre una cartulina dibujen dos rectángulos de lados 15 *cm* de largo y 7,5 *cm* de ancho y, en ellos procedan a trazar las correspondientes líneas horarias con una altura respecto a la horizontal, desde el centro del rectángulo (lado opuesto a la abertura) de 15° cada una. A esto lo llamaremos **limbo ecuatorial**. En un rectángulo, se inicia el trazado de las líneas horarias comenzando en las 6 *horas* (0°) hasta 12 *horas* (90°) y las 18 *horas* (180°). En el segundo debe hacerse de manera contraria, siempre con la abertura hacia arriba, y comenzando las 18 *horas* (0°), 12 *horas* (90°) y 6 *horas* (180°). Recuerden realizar las líneas horarias con 15° de separación. Observen con mucho cuidado y detenimiento las figuras que les mostramos a continuacion:



Una vez realizado el paso anterior, peguen las dos piezas de tal forma que coincidan las aberturas y que se vean las marcas horarias por ambas caras; habrán construido así el limbo, y procedan a armar el reloj de sol uniendo (por la ranura) ambas piezas (estilete y limbo).



Ya armado el reloj de sol, debe orientarse sobre una línea meridiana (norte-sur) con el segmento $\overline{BC}$ y con el punto A del estilete mirando hacia el norte. Hecho esto, la pieza que contiene las líneas horarias quedan también sobre el piso, sosteniendo el estilete.

Las y los invitamos a salir junto con su profesora o profesor a probar el reloj de sol que han construido. En el patio del liceo pueden colocarlo y proceder a observar la sombra del Sol que proyecta el estilete en las líneas horarias. Estas sombras les permitirá estimar cuál es la hora aproximada del día. Compárenla con la hora que marcan algunos relojes construidos por otras compañeras y compañeros. Es importante verificar cuál es la hora legal en ese momento para ver qué tan buena aproximación se ha hecho utilizando el reloj de sol.

Intenten resolver los siguientes problemas relacionados con el tiempo y los relojes:

Las *12* y *15*

¿Qué ángulo forman las agujas del reloj cuando son las 12 y 15?

Instantes digitales

El día 29 de junio a las 18 *horas*, 37 *minutos* y 45 *segundos* se produce un "instante digital": 18 *h* 37' 45'' (29-06). Si se fijan, salen todas las cifras del 0 al 9 una sola vez. Como a las cifras se les llama también dígitos, podemos decir que es un "instante digital". Pero a lo largo del año hay más instantes de este tipo. ¿Cuál es el primer y el último "instante digital" del año?

Antier

Antier tenía 15 años, pero el año que viene cumpliré 18, podrían decirme, ¿cuándo es mi cumpleaños?

- 29 de febrero (año bisiesto).
- 31 de diciembre.
- 1 de enero.
- 28 de diciembre (día de los santos inocentes).

El reloj dividido

¿Podrían dividir un reloj en tres partes utilizando solo 2 líneas rectas de manera tal que los números de cada parte sumen lo mismo?

Las *3* y *10*

¿Qué ángulo forman las agujas del reloj cuando son las 3 y 10?

En esta aventura matemática, nos hemos acercado a algunos conocimientos que nos han permitido aplicarlos para la construcción de un instrumento, que ha sido parte importante en la historia de la medida del tiempo. Queremos que sigan en este camino, que los llevará a interesantes actividades y conocimientos matemáticos.

Reloj de sol
Plaza San Jacinto,
Caracas, Distrito Capital

2

El Buque Escuela Simón Bolívar

Vectores en el plano (componentes, representación, vectores equipolentes, operaciones, propiedades)

El embajador sin fronteras

El Buque Escuela Simón Bolívar (*BE*-11), conocido también como el embajador sin fronteras, fue construido en el año de 1979 en los astilleros españoles de Celaya (Vizcaya), con la finalidad de adiestrar a los futuros oficiales de la Armada Bolivariana y estrechar los lazos de amistad con la Armada de los países que visita. Para navegar en el Buque Escuela *BE*-11, es necesario considerar algunas de las técnicas y métodos para moverse de un sitio a otro, tal como lo son el posicionamiento de mapas, cálculos de rumbos, direcciones e interpretación de distancias. Es importante saber y entender que, aunque no es lo mismo pilotar un buque escuela o petrolero, así como un peñero, una curiara o chalana, los principios que fundamentan cualquier navegación se sustentan en las mismas leyes matemáticas, es decir, mientras estos barcos navegan utilizan un conjunto de objetos y/o herramientas matemáticas, como la posición, dirección y distancia, veamos.

Términos relacionados con la navegación

Posición

Al momento de salir a navegar, para saber o determinar la posición de un buque o embarcación, es importante posicionarse en un mapa y tener conocimientos sobre sistemas de coordenadas para trazar la ruta o itinerario de viaje, en particular sobre el sistema de coordenadas cartesiano.

Dirección

Otro término a ser considerado para navegar es el de la dirección. La dirección indica la posición de un punto referido a otro, sin importar la distancia que los separa. También sirve para indicar hacia dónde se debe ir para llegar a otro lugar. Aunque la dirección no es un ángulo, esta se mide como una medida angular.

Distancia

Evidenciar en un mapa o plano el menor recorrido posible entre dos puntos, es de suma importancia al momento de la navegación, teniendo siempre en cuenta que la Tierra tiende a ser esférica y el cálculo de la distancia se hace algo más complejo, ya que no es una línea recta. Se trata de un arco o línea curvada que normalmente mediremos en kilómetros.

Conocimientos matemáticos previos a la navegación

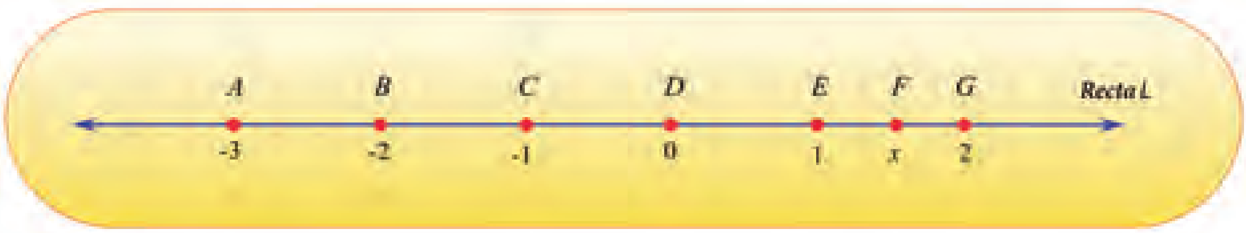
El sistema de coordenadas cartesiano

La geometría cartesiana fue elaborada por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien estudió las relaciones existentes entre geometría y álgebra. A continuación, ofrecemos una breve introducción a la geometría cartesiana para dar una idea de lo que es y cómo funciona. Iniciaremos este preámbulo refiriéndonos al sistema de coordenadas unidimensional o lineal:

René Descartes
(1596-1650)

Sistema de coordenadas unidimensional o lineal

En un sistema de coordenadas unidimensional o en una recta, a todo punto del sistema o de la recta, le corresponde un número racional, tal y como se evidencia en la siguiente figura:

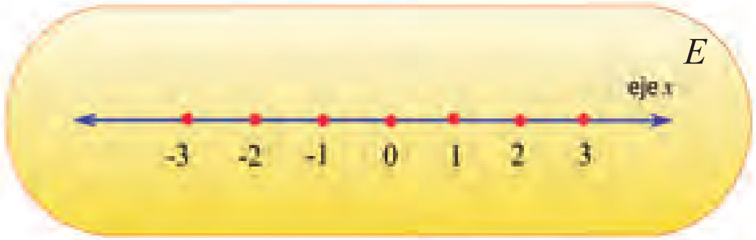


Sistema de coordenadas unidimensional

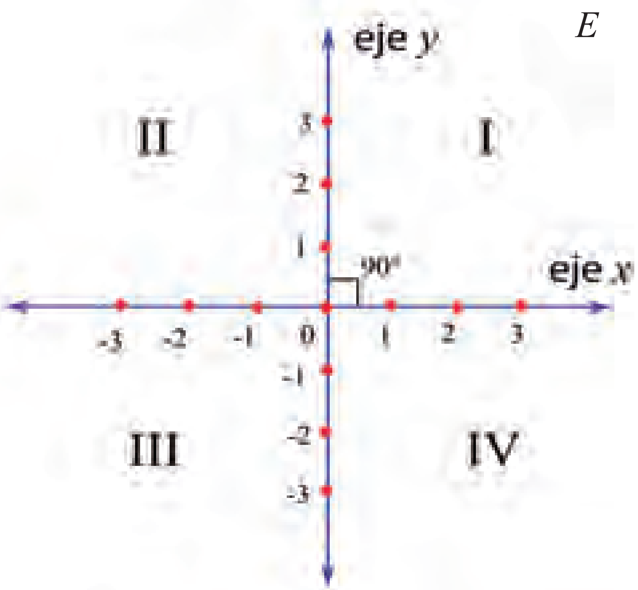
Observemos que en la recta L se pueden ubicar los puntos A, B, C, D, E, F y G según su coordenada, es decir, de acuerdo con el número racional correspondiente, por ejemplo, la coordenada del punto A es el número racional -3, la del punto B es el número racional -2, y la del punto F es el número racional x, y se denotan o escriben así: $A(-3)$, $B(-2)$ y $F(x)$. Ahora, según lo anterior, escriban o denoten las coordenadas de los puntos C, D y G.

Sistema de coordenadas bidimensional

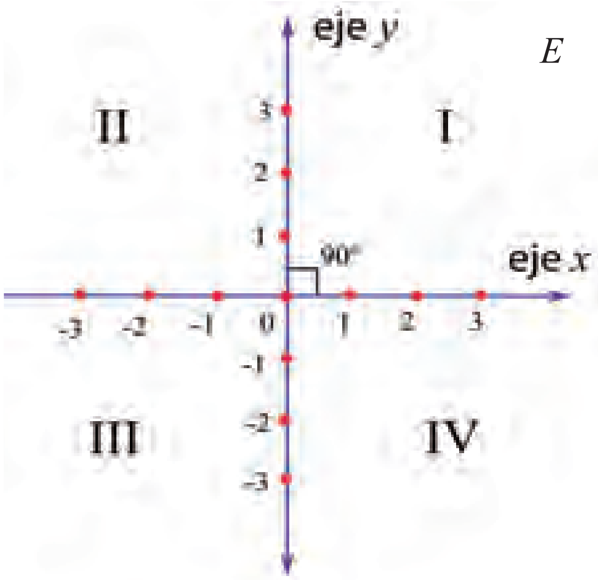
En el plano cartesiano, a un punto le corresponde un par de números racionales o par ordenado, por ejemplo (2,4), pero antes de ubicar puntos en el plano cartesiano, les señalaremos cómo construir el sistema de coordenadas cartesiano:



En sus cuadernos, tracen una recta X en un plano E cualquiera y construyan el sistema de coordenadas en X. Esta recta se ha de llamar eje x.



A continuación, tracen en el mismo plano E una recta Y (eje y) perpendicular al eje x y que pase por el punto con coordenada cero (0). En y, fijamos un sistema de coordenadas de tal modo que el punto cero (0) en y coincida con el punto cero en x.



Sistema de coordenadas cartesiano

Observemos que el plano E ha quedado divido en cuatro regiones, las cuales denominaremos *cuadrantes*, es decir:

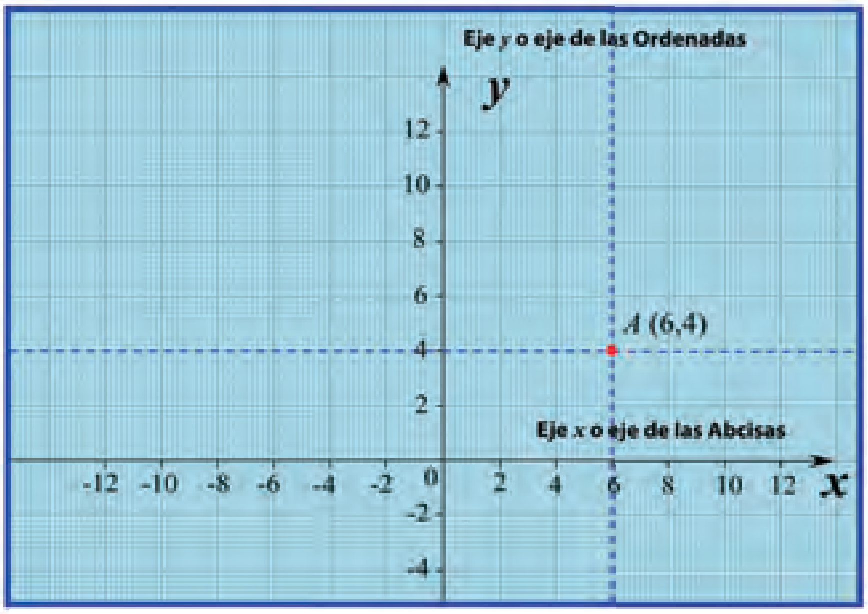
I *cuadrante*
II *cuadrante*
III *cuadrante*
IV *cuadrante*

Hacia la derecha del cero en el eje "x" se encuentran los números positivos y a su izquierda los números negativos.
Desde el cero hacia arriba del eje "y" se encuentran los números positivos y hacia abajo se encuentran los números negativos.

Ubicar puntos en el plano cartesiano

Ahora ubicar puntos en el plano E mediante un par de números racionales, se hace sencillo, observen cómo:

Por ejemplo, para ubicar al punto A de coordenadas (6,4) en el plano cartesiano se deben trazar dos perpendiculares; la primera al eje y desde la coordenada cuatro (4) y paralela al eje x, y la segunda, desde la coordenada seis (6) en el eje x, paralela al eje y. El punto donde se intersecan estas dos perpendiculares es el punto A (6,4).



Un par ordenado es una expresión de la forma (x, y) tal que el primer número corresponde al eje x (eje de las abscisas) y el segundo número corresponde al eje y (eje de las ordenadas).

Con la ayuda de su profesora o profesor y junto con sus compañeras y compañeros ubiquemos en el sistema de coordenadas cartesiano los siguientes puntos:

$$C(6,2);\ D(7,1);\ E\left(\frac{-5}{2},0\right);\ F\left(\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right)$$

Velas Libertadoras 2010

La Regata Bicentenaria "Velas Libertadoras 2010" zarpó de Brasil hacia su primer destino que fue Argentina, desde donde partieron a puertos chilenos. Seguidamente, la regata partió a Perú, de allí a Ecuador. Atravesaron el Canal de Panamá para dirigirse a Colombia. Posteriormente, tomaron rumbo a La Guaira, en la República Bolivariana de Venezuela, desde donde zarparon con destino a la República Dominicana y de allí, a su destino final en México.

Describan en un mapa de nuestra Latinoamérica, como el que se muestra a continuación, el recorrido del Buque Escuela Simón Bolívar durante el evento Velas Libertadoras 2010.

Investiguen:

- ¿Cuáles ciudades fueron visitadas por las Velas Libertadoras?
- ¿Cuáles fueron los países que participaron en el evento?
- ¿Cuáles son los nombres de las embarcaciones participantes?
- ¿Cuándo atracaron en puerto venezolano Las Velas Libertadoras?

Vectores

Ahora bien, para describir la trayectoria de nuestro embajador sin fronteras en el evento Velas Libertadoras 2010, una de las ideas u objetos matemáticos que nos puede ayudar para tal fin son los **vectores**.

Por ejemplo: cuando un buque o nave se traslada (o desplaza) de un lugar a otro generalmente se representa a través de pequeñas flechas que describen su trayectoria en un tiempo determinado, de allí que el punto inicial (A) de la flecha indica el lugar que ocupaba el buque antes de desplazarse y el punto (B) indica la posición final luego de desplazarse. En Matemática a dicha flecha la podemos asociar al **concepto de vector**.

Un **vector** $\overrightarrow{AB}$ es un segmento de recta orientado, que empieza en un punto A y termina en otro punto B.

El punto A se llama origen del vector y el punto B se denomina extremo del vector. El vector, además de su origen y extremo, está determinado por tres elementos.

Elementos del vector

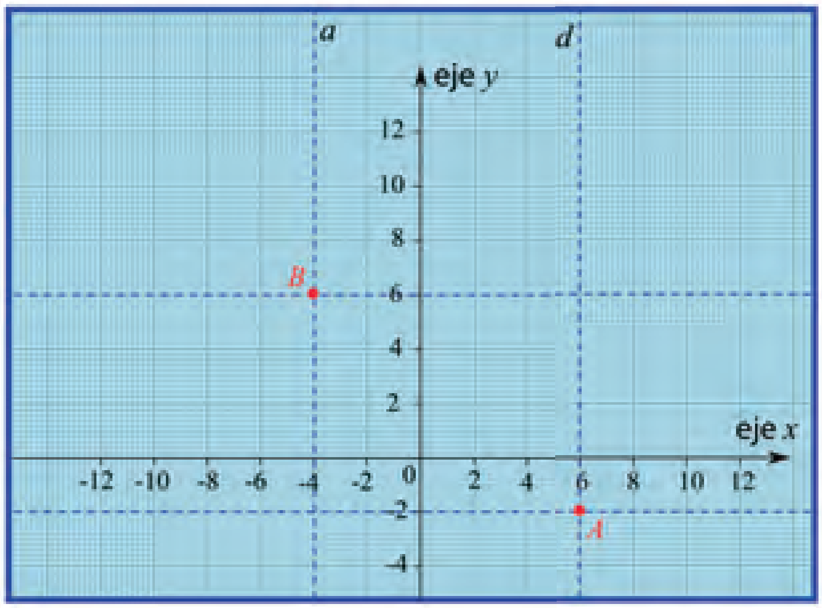
El vector posee tres elementos, estos son:

- Módulo o longitud del vector: indica la distancia que separa al origen del extremo, se simboliza de la forma $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ y se lee módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.
- Dirección: es el ángulo de inclinación que forma el vector con respecto al eje x del sistema de coordenadas cartesianas, se lee en grados.
- Sentido: indica hacia dónde se dirige el vector. Son de uso común los puntos cardinales (Norte, Sur, Este, Oeste).

Dados los puntos $A(6,-2); B(-4,6)$ graficaremos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ en una hoja milimetrada.

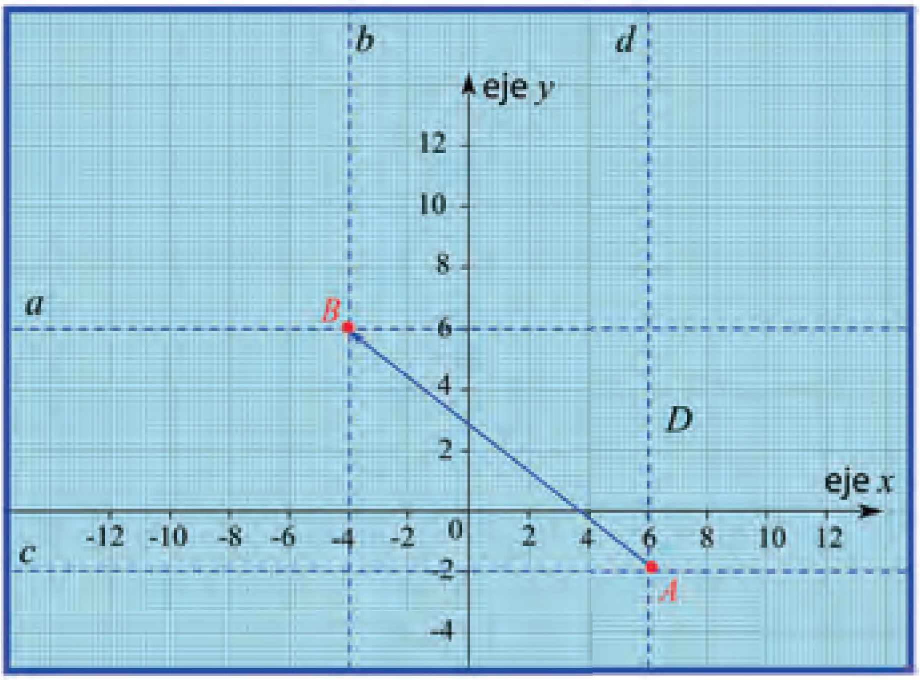
Gráfica del vector $\overrightarrow{AB}$

Primero ubicamos en el sistema de coordenadas cartesiano los puntos A y B, según sus coordenadas; posteriormente, trazamos con ayuda de la regla graduada el vector que va desde A hacia B colocando la punta de la flecha en el punto final B.

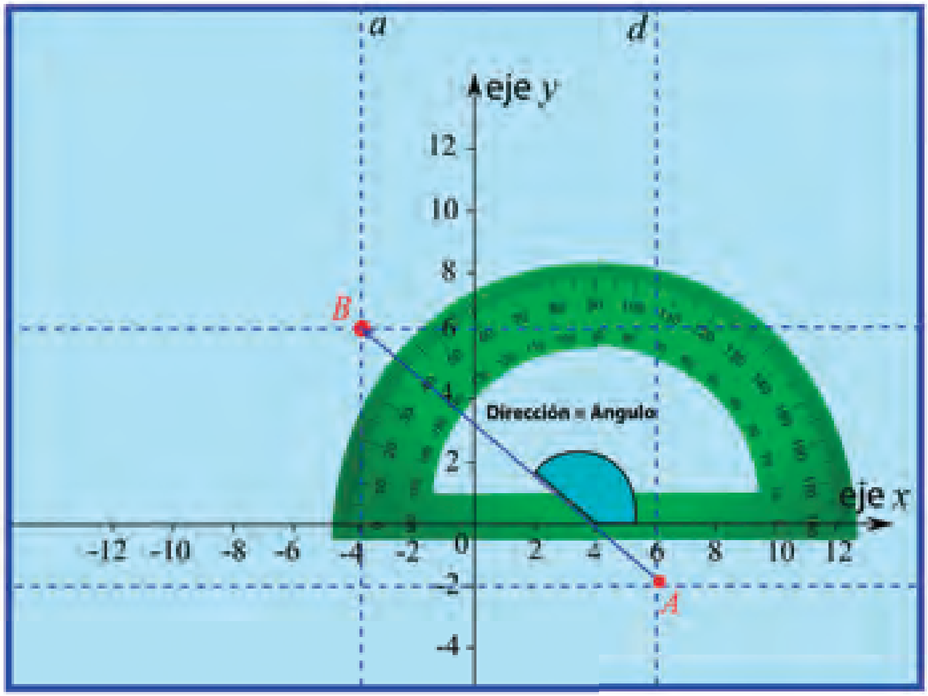


Hallamos el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ haciendo uso de la regla graduada o cinta métrica proporcionalmente (a escala).

El sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por los puntos cardinales y se dice que posee sentido noroeste.

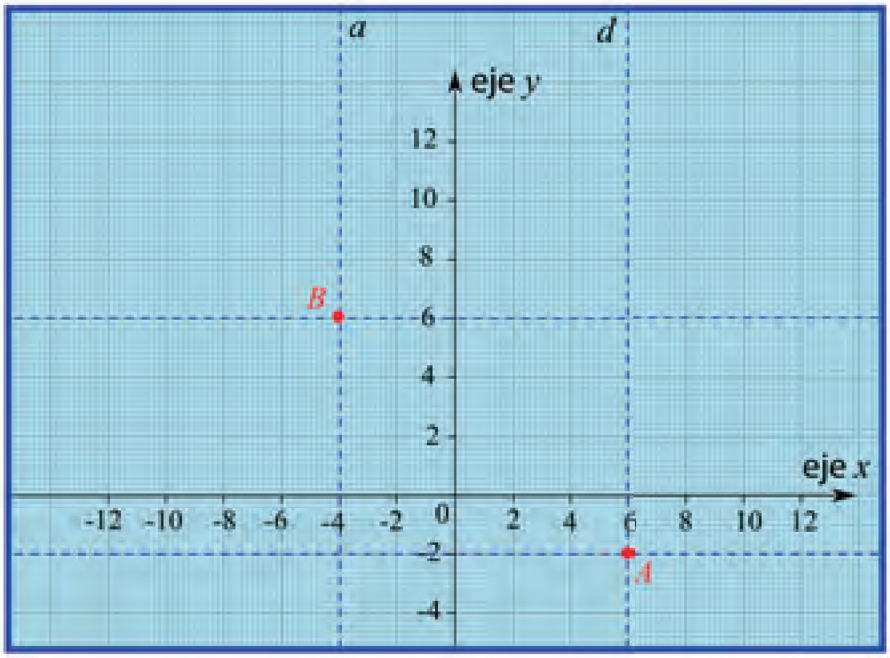


La dirección está asociada al ángulo de inclinación, midiendo el ángulo del vector con respecto al eje x, determinamos que su dirección es de $140°$.



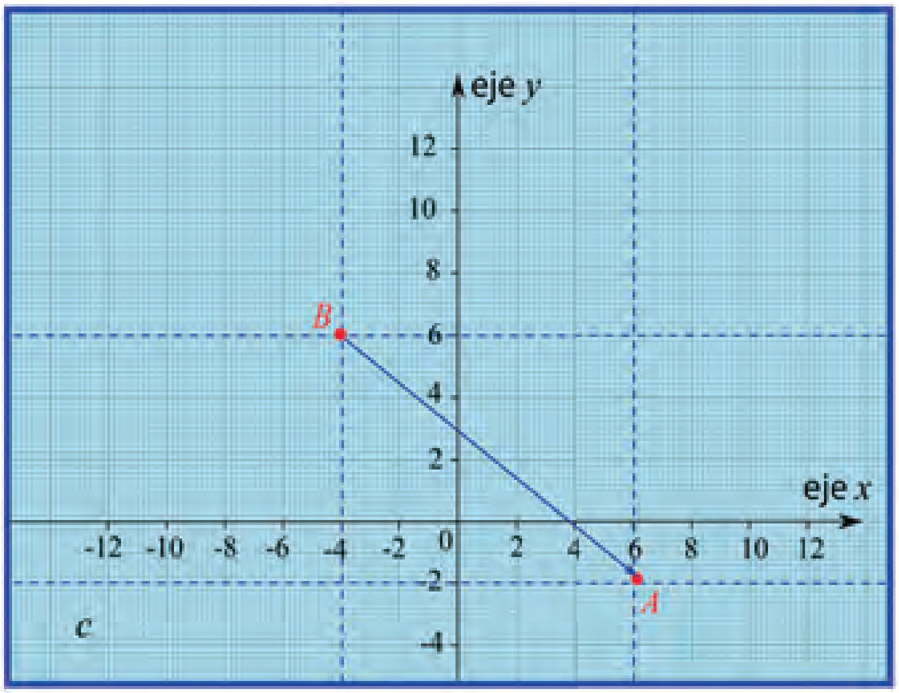
Gráfica del vector $\overrightarrow{BA}$

Primero ubicamos en el sistema de coordenadas cartesiano los puntos A y B, posteriormente trazamos con ayuda de la regla graduada el vector que va desde B hacia A colocando la punta de la flecha en el punto A.



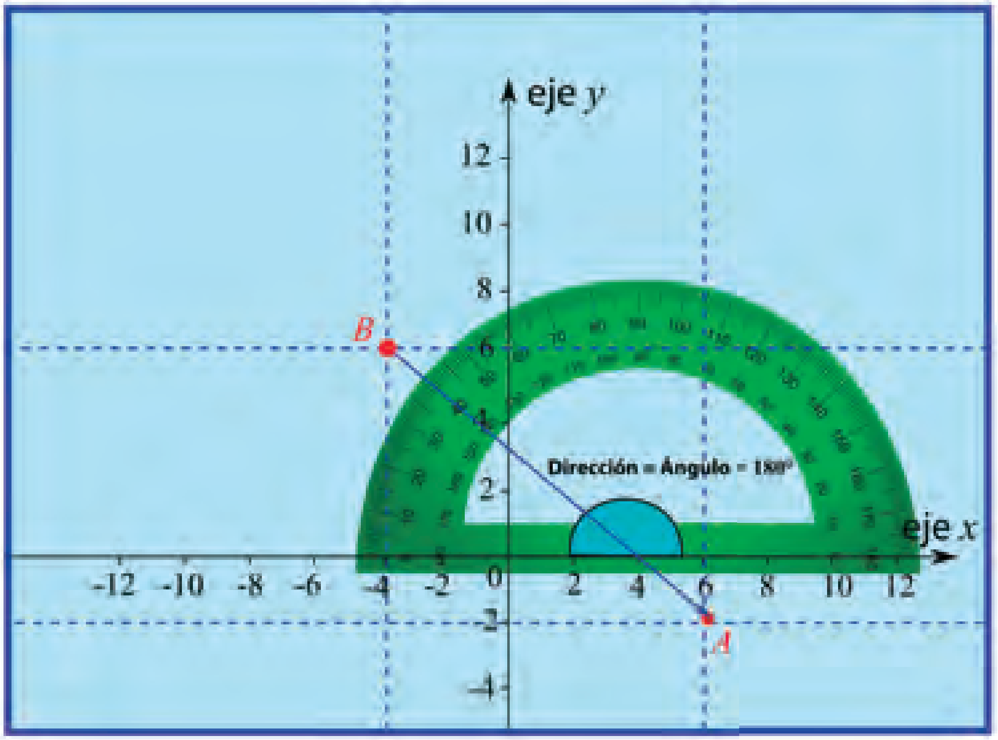
El módulo del vector $\overrightarrow{BA}$ es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ que ya fue medido.

El sentido del vector $\overrightarrow{BA}$ queda determinado por los puntos cardinales y se dice que posee sentido sureste.



Cuando el vector tiene sentido sureste o suroeste se mide el ángulo y a esa medida se le suma $180°$, en nuestro caso específico sería:

$$\acute{a}ngulo = 180° + 140° = 320°$$



Junto a sus compañeras y compañeros respondan:

- ¿Cómo son los sentidos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?
- ¿Cómo son los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?
- ¿Por qué se le debe sumar $180°$ a la dirección del vector $\overrightarrow{BA}$?

Dados los puntos $A(2,4); B(-1,0); C\left(5,\frac{1}{2}\right), D(-3,-2)$ grafiquen los vectores: $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$.

Junto con sus compañeras y compañeros, y con el uso de los instrumentos de geometría, determinen su módulo, dirección y sentido. Utilicen como unidad de medida en el sistema de coordenadas cartesiano el centímetro.

Usemos los vectores en la navegación del Buque Escuela Simón Bolívar

El Buque Escuela Simón Bolívar zarpó el día miércoles 2 de junio del Puerto de La Guaira, ubicado en la República Bolivariana de Venezuela, hacia la ciudad de Santo Domingo en República Dominicana, teniendo como punto de llegada la ciudad de Cancún en México, ciudad donde finalizó este evento.

En el mapa de Latinoamérica que se muestra, tracen un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen sea el Puerto de La Guaira. Denoten el punto origen del sistema de coordenadas con la letra O cuyas coordenadas son $(0, 0)$. Es importante considerar que la distancia aproximada entre La Guaira y Santo Domingo es de $950\ km$, y supongamos que la ciudad de Santo Domingo está ubicada en las siguientes coordenadas: eje x en $-1{,}24$ y su componente en el eje y en $2{,}78$.

Dibujen el vector $\overrightarrow{OB}$ que une a La Guaira ($punto\ O$) con Santo Domingo ($punto\ \ B$). Se puede observar que las componentes del punto B indican el extremo del vector $\overrightarrow{OB}$. Midan con una regla la longitud del vector $\overrightarrow{OB}$, y anoten esta medida en el cuaderno.

Ahora delineen el vector $\overrightarrow{BC}$ que va desde Santo Domingo ($punto\ \ B$) hasta Cancún ($punto\ \ C$). Ubicado en el plano C de coordenadas en $x = -6{,}3$ y $y = 4{,}62$. Procedan a medir con una regla la longitud del vector $\overrightarrow{BC}$ y anoten dicha medida en el cuaderno.

Por último, tracen el vector $\overrightarrow{OC}$ que une al origen del primer vector $\overrightarrow{OB}$, *punto* O (La Guaira), con el extremo del segundo vector $\overrightarrow{BC}$, punto C (Cancún).

Midan con una regla la longitud del vector $\overrightarrow{OC}$, y anoten esta medida en el cuaderno.

Con las medidas obtenidas de los módulos de los vectores $\left|\overrightarrow{OB}\right|$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ procedamos a sumar y luego comparemos este resultado con la longitud del vector $\left|\overrightarrow{OC}\right|$.

El resultado obtenido $\overrightarrow{OC}$ se denomina vector suma, que es la distancia total recorrida por el Buque Escuela Simón Bolívar desde 1.

El procedimiento realizado es la **adición de vectores**, es decir: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

Este resultado también lo podemos obtener sumando.

Otra manera de representar las componentes del punto $B\,(-1{,}24\,,\,2{,}78)$, que están expresadas en forma decimal, es a través de la fracción generatriz. Recuerden, como vieron en primer año, que:

> Un número decimal exacto o periódico se puede expresar en forma de fracción llamada **fracción generatriz**.

Si las expresiones decimales son limitadas, iguales a las que tenemos en las componentes de los puntos B y C, debemos realizar los procedimientos presentados en la siguiente tabla:

Hallamos la fracción generatriz de la componente x del punto B	
$-1,24$	Contamos la cantidad de cifras decimales que posee el número, en nuestro caso poseen dos cifras decimales
$-1,24=\frac{-124}{100}$	Escribimos la fracción tal que en el numerador va la expresión decimal sin la coma y en el denominador se escribe la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal
$\frac{-124}{100}=\frac{-62}{50}$	Buscamos los divisores comunes del numerador y el denominador. Como los dos números son pares pueden ser divididos por el dos quedando -62 en el numerador y 50 en el denominador
$\frac{-62}{50}=\frac{-31}{25}$	Como el numerador y el denominador son pares el número dos divide a ambos, quedando el -31 en el numerador y el 25 en el denominador
$\frac{-31}{25}=-1,24$	Decimos que menos treinta y un veinticincoavos es la fracción generatriz de menos uno coma veinticuatro. Es decir la fracción $\frac{-31}{25}$ genera al decimal $-1,24$

Realizando lo mismo con la componente y del punto B queda que: $2,78=\frac{278}{100}=\frac{139}{50}$.

Es decir, la fracción ciento treinta y nueve cincuentavos genera al decimal dos coma setenta y ocho.

De esta manera podemos escribir el vector $\overrightarrow{OB}$ de la siguiente forma: $\overrightarrow{OB}\left(\frac{-31}{25},\frac{139}{50}\right)$.

Comprueben que las componentes del punto C que son $x=-6,3$ e $y=4,62$ se pueden escribir de la siguiente forma: $C\left(\frac{-63}{10},\frac{231}{50}\right)$.

Si restamos al vector $\overrightarrow{OC}$ el vector $\overrightarrow{OB}$ nos debería resultar el vector $\overrightarrow{BC}$, para ello, debemos restar las componentes del primer vector con las componentes respectivas del segundo vector.

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\left(\frac{-63}{10}-\frac{-31}{25},\frac{231}{50}-\frac{139}{50}\right)=\left(\frac{-253}{50},\frac{46}{25}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}\left(\frac{-253}{50},\frac{46}{25}\right)$$

Se puede notar que el vector que resulta no es exactamente el vector $\overrightarrow{BC}$ sino un vector con algunas características específicas, veamos cuáles son esas características.

Grafiquemos el vector resultante de la sustracción

Graficamos el vector de origen $O\,(0, 0)$ y de extremo D cuyas coordenadas son $D\left(\frac{-253}{50}, \frac{46}{25}\right)$.

Con la ayuda de una regla graduada, midamos la longitud del vector $\overrightarrow{BC}$ así como la del vector $\overrightarrow{OD}$, notemos que tales longitudes son iguales, es decir, tienen el mismo módulo. Además si con el apoyo de un transportador se procede a medir sus respectivos ángulos de inclinación, concluiremos que también tienen la misma dirección, y por último, se puede notar en la gráfica que ambos vectores tienen el mismo sentido. Es importante saber que cuando dos vectores cualesquiera cumplen con las condiciones señaladas para los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{OD}$, se les puede llamar a estos vectores: **vectores equipolentes**.

Vectores equipolentes: dos vectores son equipolentes si y solo si tiene el mismo módulo, dirección y sentido.

El vector $\overrightarrow{BC}$ se llama vector fijo y a todo vector cuyo origen es $O\,(0, 0)$ se denomina vector libre. Es decir, los vectores: $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OC}$ son vectores libres.

Otra forma de denotar vectores

Existe otra forma de denotar los vectores, esta forma de denotarlos se hace generalmente con los vectores libres debido a que estos vectores tienen origen en el punto $O\,(0,0)$. Por ejemplo, a los vectores $\overrightarrow{OZ}\left(\frac{-1}{2},7\right)$, $\overrightarrow{OA}(3,0)$ y $\overrightarrow{OR}(1,7)$ los podemos denotar con una sola letra minúscula y la flecha en la parte superior, es decir $\vec{z}\left(\frac{-1}{2},7\right)$, $\vec{a}(3,0)$, $\vec{r}(1,7)$. De ahora en adelante denotaremos los vectores de esta forma, ya que nos permite ahorrar tiempo en la escritura.

De igual manera, debemos resaltar que también existen algunos vectores particulares e importantes, estos son: el vector nulo y el vector unitario.

El **vector nulo** es un vector cuyo módulo es igual a cero: $|\vec{n}|=0$.
El **vector unitario** es un vector cuya longitud es igual a uno: $|\vec{v}|=1$.

Operaciones con los vectores

Como vimos anteriormente, podemos sumar y restar vectores, pero además se pueden multiplicar por un número determinado al cual se le denomina escalar.

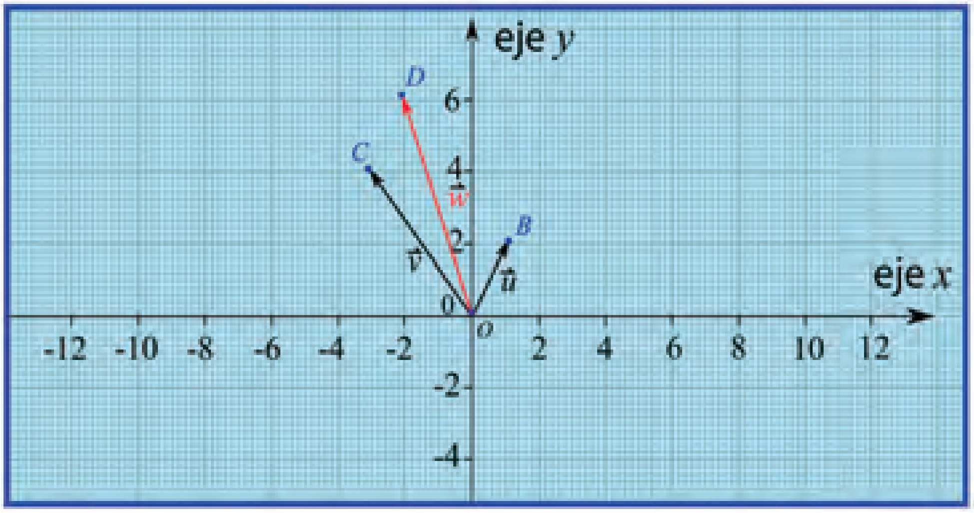
Adición de vectores

Sean los vectores $\vec{u}(x_1,y_1)$ y $\vec{z}(x_2,y_2)$, la adición de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{z}$ se define de la forma siguiente:

$$\vec{u}+\vec{z}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

La adición de dos vectores da como resultado otro vector $\vec{s}$ al que llamamos vector suma, lo que significa que $\vec{s}(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

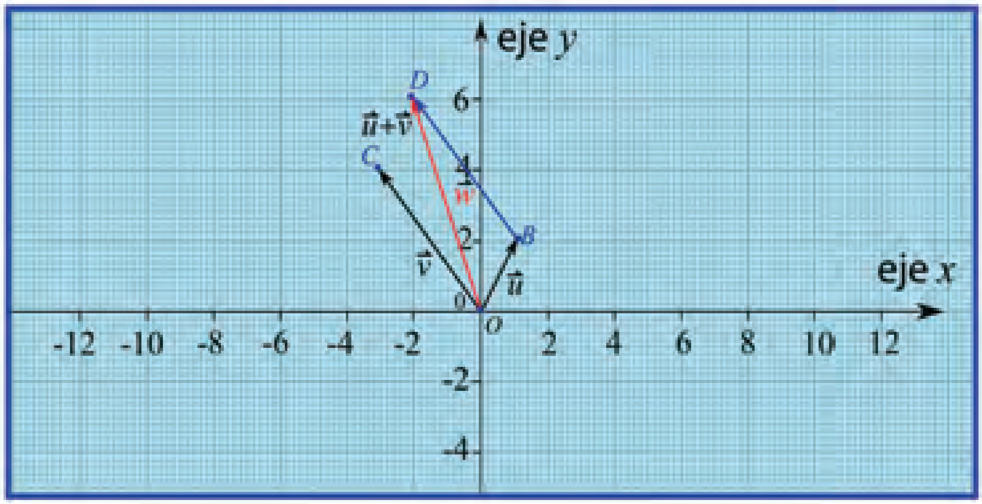
Por ejemplo, si tenemos los vectores $\vec{u}(1,2)$ y $\vec{v}(-3,4)$ y queremos sumarlos, tendríamos que: $\vec{u}+\vec{v}=(1,2)+(-3,4)=(1+(-3),2+4)=(-2,6)$. Este resultado sería el vector $\vec{w}(-2,6)$.



Tracen el vector $\vec{z}$ que va desde B hasta D, y hallen la dirección, sentido y módulo (usando la regla graduada).

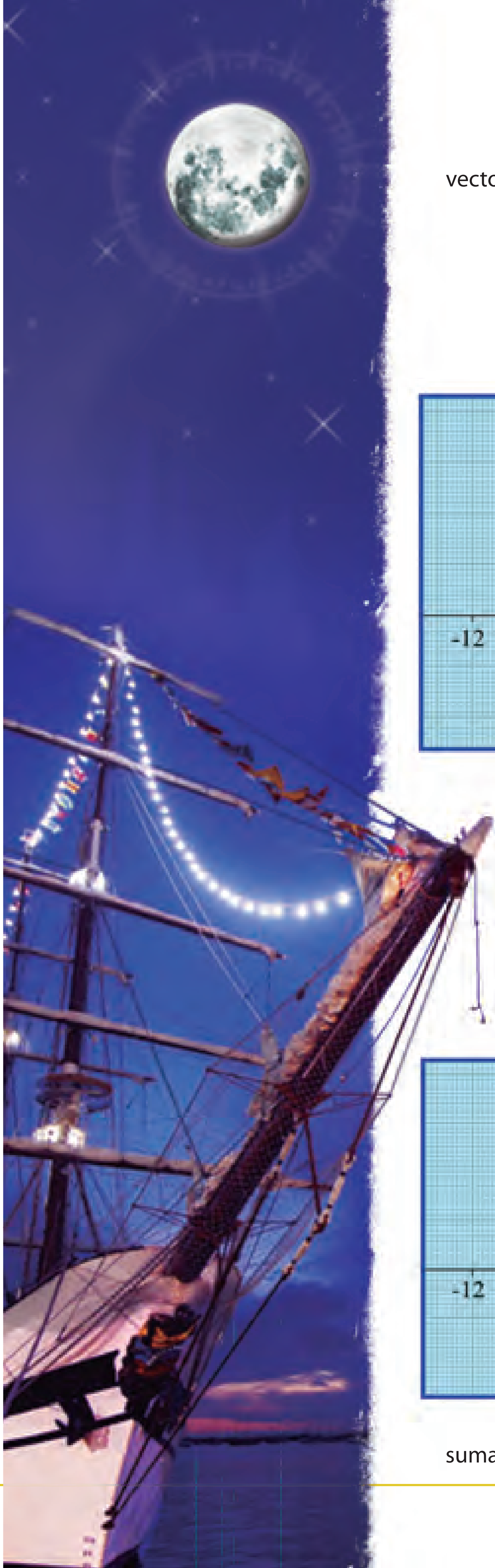
¿Cómo es el vector $\vec{z}$ con respecto al vector $\vec{v}$? ¿En qué se asemejan estos vectores con los vectores trabajados con el Buque Escuela?

Si se fijan bien, sabrán que los vectores $\vec{z}$ y $\vec{v}$ son paralelos. La manera en la cual están expresados se llama método gráfico y en éste se hace coincidir el origen de un vector con el extremo del otro. Se hizo una traslación de los vectores. Al trazar un vector cuyo origen sea O, en este caso el vector $\vec{u}$, y cuyo extremo sea el origen del segundo vector, $\vec{w}$ en nuestro caso, tendremos el vector suma.



Dados los siguientes vectores: $\vec{a}(1,-6), \vec{b}(-5,-3), \vec{c}\left(\frac{1}{4},-2\right)$.

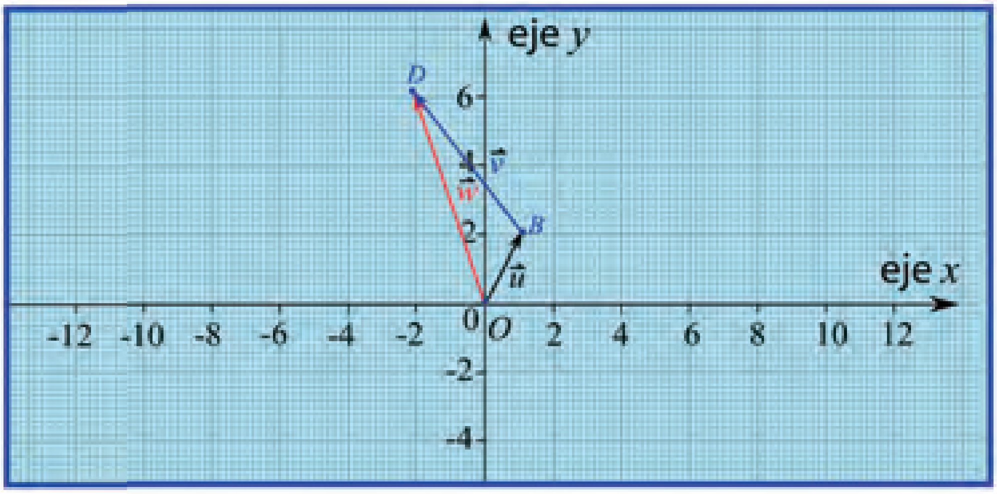
Resolver: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{c}$. Realicen cada adición de vectores en una gráfica aparte.



Al igual que la adición de números enteros, la adición de vectores posee algunas propiedades muy importantes:

Elemento neutro

Todo vector sumado al vector nulo da como resultado el mismo vector $\vec{v}+\vec{o}=\vec{v}$.

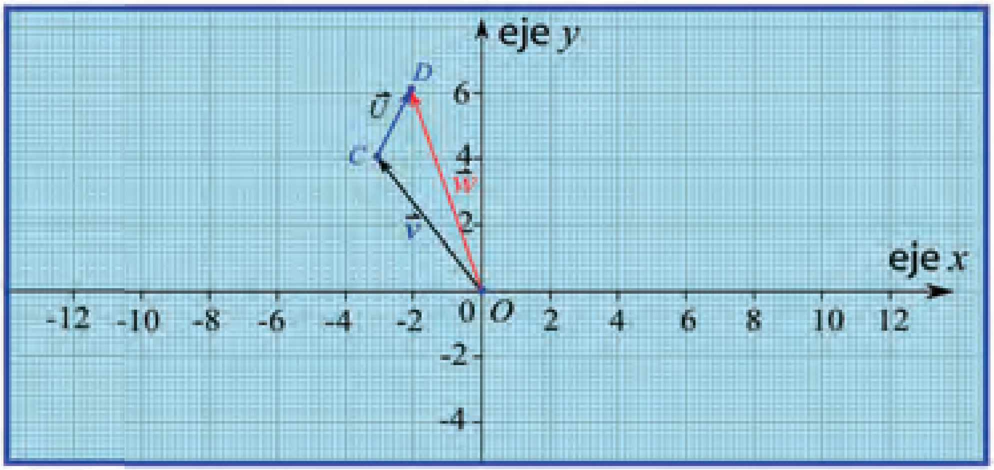


Propiedad Conmutativa

Si tenemos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

Esto significa que al sumar dos vectores no importa el orden en el cual se haga.



Noten que en ambos casos el vector de color rojo es el vector suma. El resultado de sumar $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el resultado siempre fue el vector $\vec{w}$.

Uso de los vectores en otros ámbitos

Los vectores no solamente se utilizan en la navegación, estos pueden ser de gran utilidad para describir el desplazamiento de las masas de aire, así como para indicar el sentido de las fuerzas que interactúan sobre los cuerpos, o simplemente la dirección que toma el ser humano al desplazarse. Los vectores aparecen en casi todas las actividades que realizamos a diario, por ello aprender a trabajar con los vectores nos da amplias posibilidades de conocer nuestro entorno inmediato. Sí, desde el carpintero, el mecánico hasta ustedes mismos trabajan con los vectores.

En las siguientes imágenes podemos apreciar algunas de los ejemplos donde aparecen los vectores.

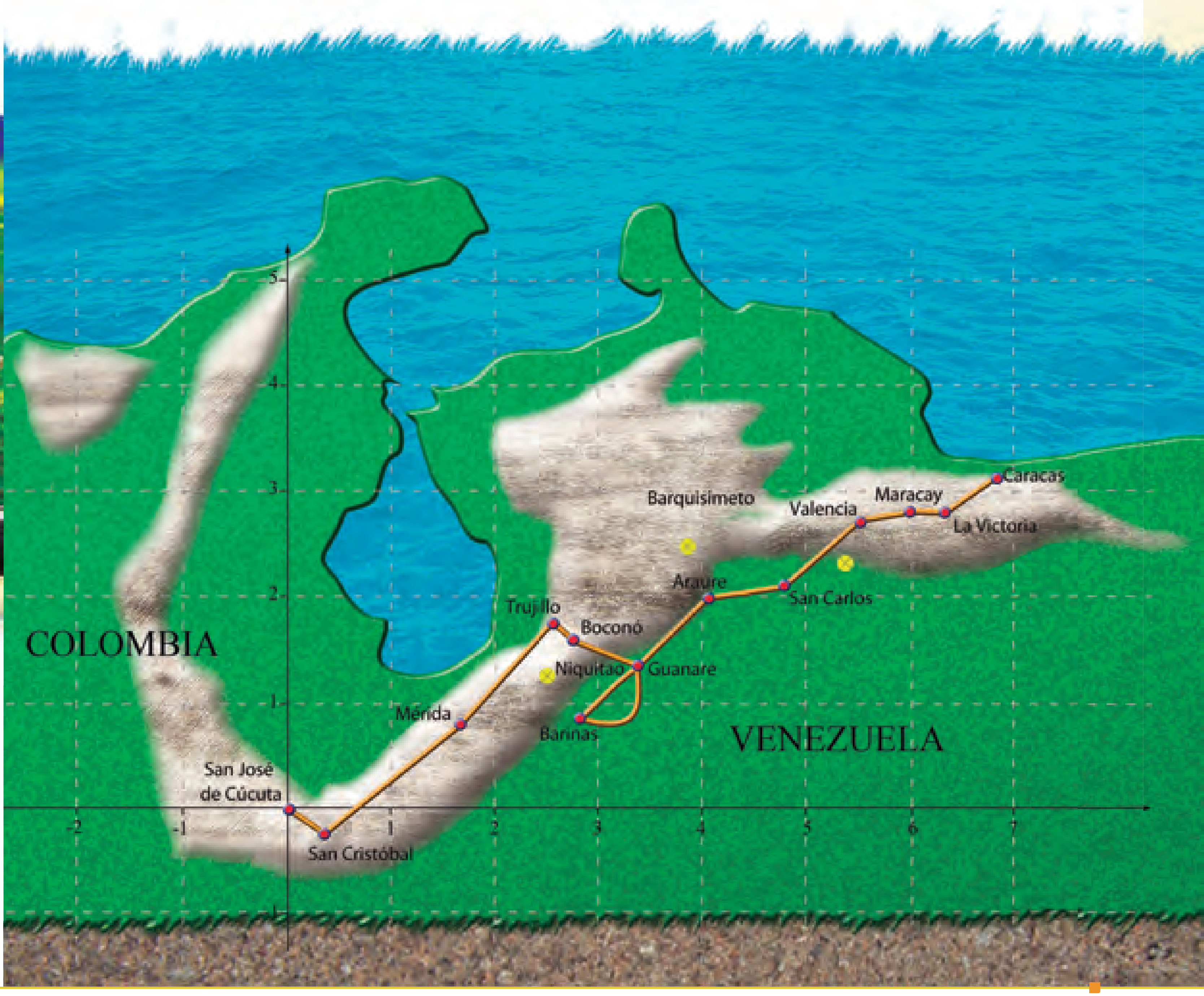
Al caminar *Al usar la polea*

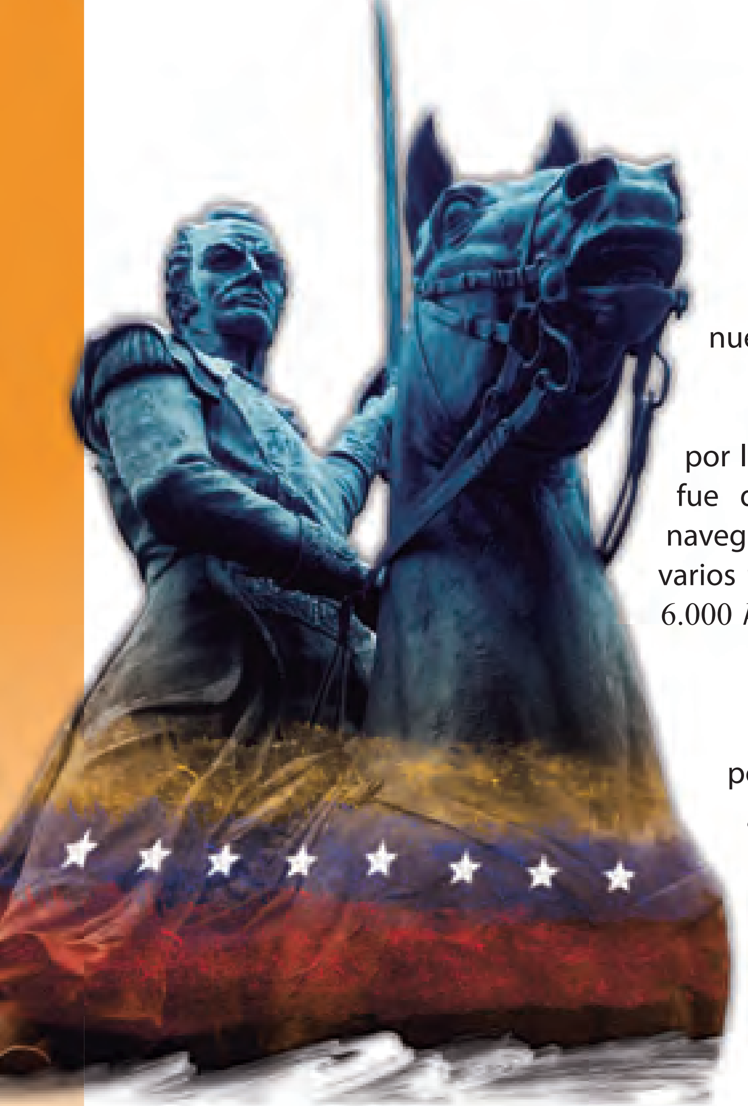
Actividades

1) Sobre un mapa de nuestra América Latina, muestren vectorialmente el recorrido de nuestro Buque Escuela Simón Bolívar, considerando para ello, su participación en el evento "Velas Libertadoras 2010", iniciado el 05 de enero de 2010 desde el puerto de La Guaira, pasando por los puertos de Uruguay, Argentina, Chile, Ecuador, Perú, Colombia, Curazao, Cuba, República Dominicana y como punto de destino final, México. Es importante destacar que esta ruta se traduce en el recorrido de la gesta histórica libertaria.

2 Al igual que el Buque Escuela Simón Bolívar se desplaza por los distintos mares del mundo, nuestro Libertador realizó múltiples viajes para liberar nuestro continente. Dentro de las proezas de Simón Bolívar está la realizada en 1813 en su Campaña Admirable. El siguiente mapa muestra el desplazamiento del Libertador desde San José de Cúcuta hasta Caracas. Utilizando el mismo principio que en el desplazamiento del Buque Escuela tracen los vectores, hallen su módulo, dirección y sentido.

Investiguen ¿qué fue la Campaña Admirable? ¿Dónde se desarrolló? ¿Quiénes intervinieron en esa Campaña? ¿Qué logros importantes se obtuvieron con la Campaña Admirable?



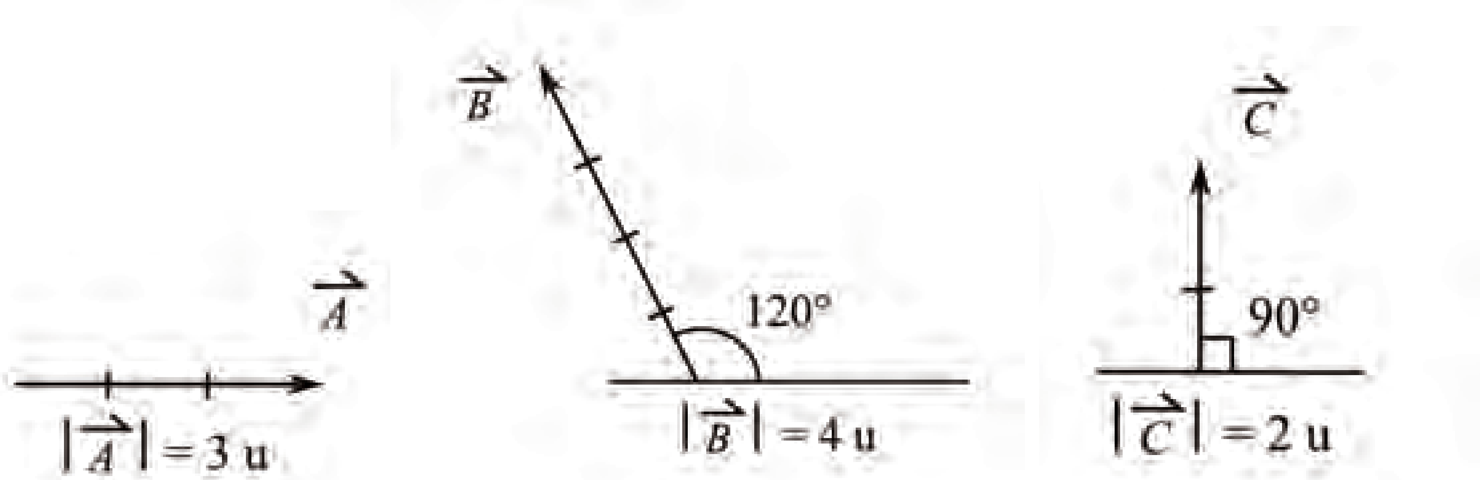


3 Lean colectivamente la siguiente nota sobre nuestro Libertador:

Simón Bolívar participó en 472 batallas por la causa libertaria de nuestra América, de las cuales fue derrotado únicamente en 6 ocasiones. Además, navegó aproximadamente $123.000\ km$, mucho más que varios personajes de la historia juntos, y cabalgó cerca de $6.000\ km$ (media vuelta a la Tierra, siguiendo el ecuador).

Respondan las siguientes preguntas: ¿Qué porcentaje de victorias en batallas tuvo Bolívar?, ¿qué distancia recorrieron Aníbal, Napoleón y Alejandro Magno?, ¿cuánto mide la línea del ecuador? y ¿qué diferencia hay entre conquistar y liberar?

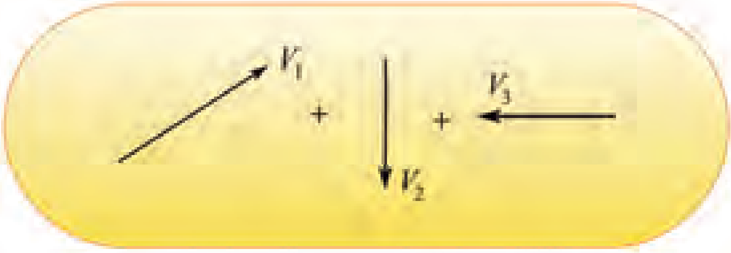
4 Sean los vectores:



Encontrar $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

5. Efectúen la siguiente suma de vectores:

a. 

b. 

3

Transformaciones en el plano (traslación, rotación, simetrías)

Arquitectura: imagen social

La arquitectura en Venezuela

¿Qué construcciones de las hechas por el hombre te llaman más la atención? ¿Qué te gustaría cambiar: los parques, las calles, las casas, los edificios, los cerros llenos de ranchos, las escuelas, los mercados, los terminales, la falta de servicio en el barrio con respecto a las zonas mejores atendidas? Las construcciones muestran la historia y las diferencias sociales. Cada construcción, cada espacio contiene la huella de una época, su cultura, su sociedad y sus intenciones.

3

La arquitectura es más que la construcción de espacios habitables, es el diseño de todos los objetos que concibe el hombre, es su corazón y su mente. Ella va de la mano con el punto, la recta, la curva, la circunferencia, los planos, los usos de la regla, el compás y el transportador. Esta área del conocimiento se sirve de la geometría y del cálculo, entre otros saberes, para el trabajo creador.

La naturaleza ha sido la mejor escuela de arquitectura. A través de ella la mujer y el hombre han copiado modelos arquitectónicos de gran belleza, resistencia y utilidad. A partir de su experiencia creadora han desarrollado diversos diseños arquitectónicos cada vez más eficientes. Una de las construcción arquitectónicas más importantes para el ser humano ha sido la construcción de su vivienda, ésta se debe adaptar al medio que la rodea aprovechando los recursos naturales que estén a su alcance para brindar cobijo y seguridad a la familia.

Organización comunal

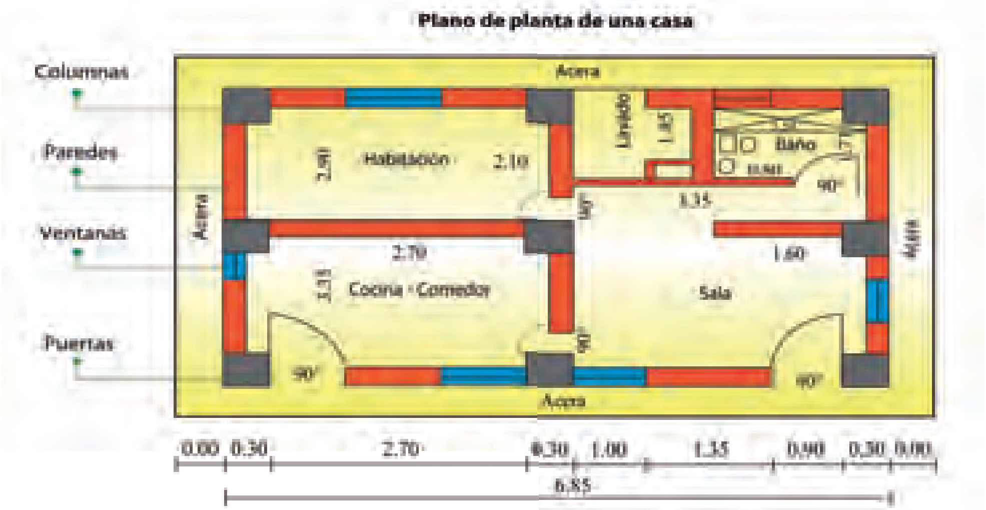
Actualmente en Venezuela las organizaciones comunales han participado de manera importante en el proceso de construcción de viviendas, con el fin de solventar una de las problemáticas más importante del país.

Socialicen con sus compañeras y compañeros las siguientes preguntas:

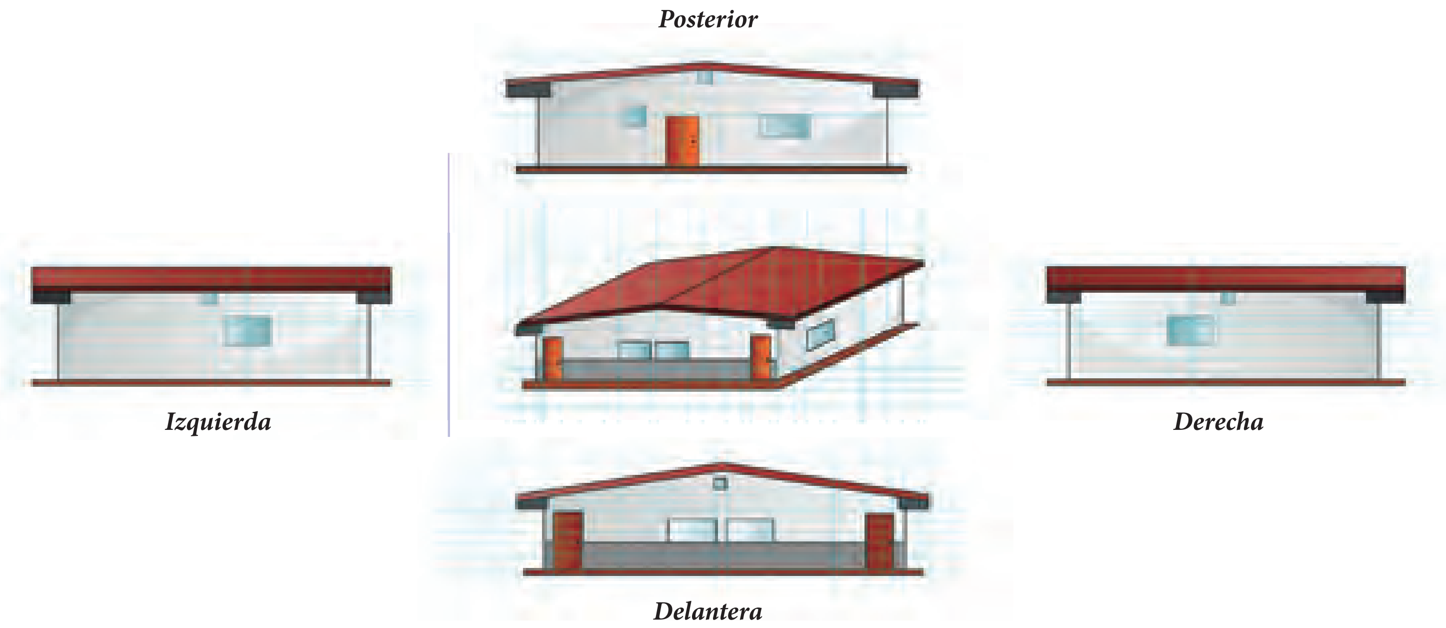
- ¿Conocen ustedes alguna experiencia de organización comunitaria?
- ¿Creen ustedes que la organización comunitaria es necesaria?
- ¿Conocen alguna experiencia comunitaria que permitió la construcción de viviendas?
- ¿Qué es un censo sociodemográfico?
- ¿Cómo debemos diseñar una casa para desarrollar el urbanismo que queremos?
- ¿En qué consiste un estudio de suelo?
- ¿Cuál es la importancia del estudio del suelo?

Diseño de una casa

Toda construcción de edificios, casas, autopista nace de un diseño arquitectónico. El diseño conforma las proyecciones de la edificación que se va a realizar. Veamos en un plano sencillo:



El diseño nos proyecta el objeto a construir en tres dimensiones y sus diferentes vistas o fachadas dependiendo de la posición de la observación:

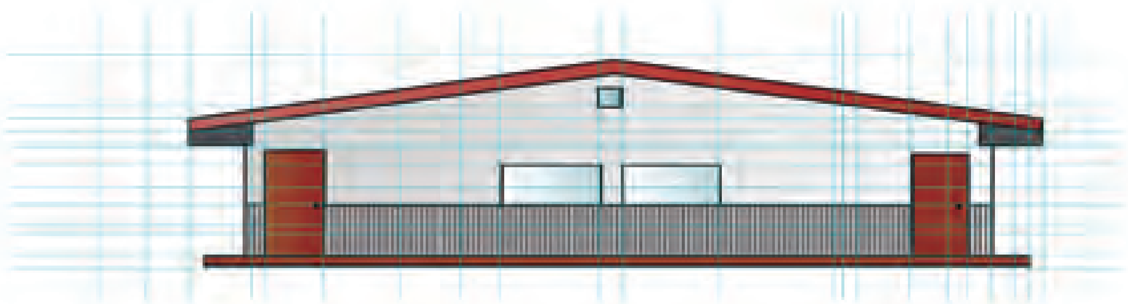


Luego de observar estas cinco figuras debatan con sus compañeras y compañeros las siguientes preguntas:

- ¿Qué formas geométricas forman el techo de la casa?
- ¿Son iguales estas figuras geométricas?
- ¿Se puede dividir en dos partes iguales la vista de frente?
- ¿Las otras vistas (derecha, izquierda y posterior), también pueden dividirlas en partes iguales?

Simetría

En la vista de la fachada se hace presente la simetría, rasgo característico de las construcciones del hombre para lograr hermosura y el equilibrio de las formas. Desde hace mucho tiempo la estética, que estudia la belleza, se basa en este principio de equilibrio.

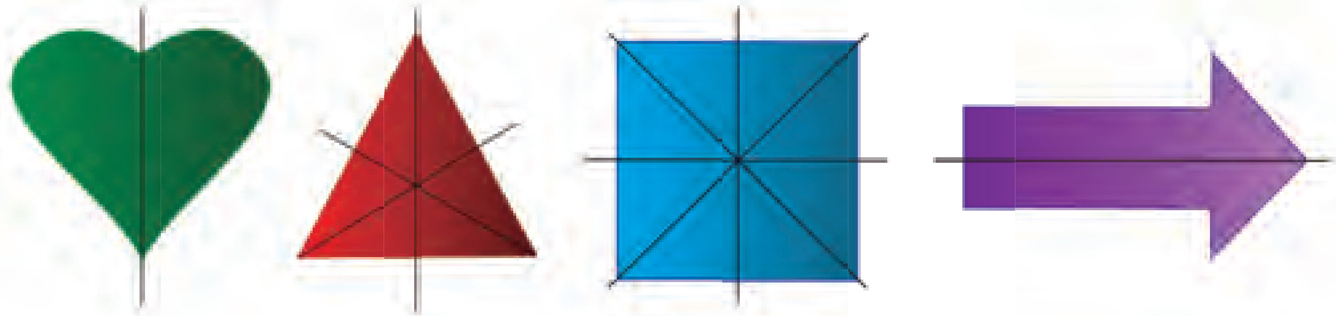


Las y los invitamos a que formen grupos con sus compañeras y compañeros, observen las imágenes siguientes y debatan las preguntas: ¿de qué manera podrán dividir a cada una de ellas en partes iguales?, ¿de cuántas posibles maneras las pueden dividir en partes iguales?

De la actividad anterior pudimos concluir que tanto la naturaleza como muchos elementos hechos por los seres humanos rasgos similares. A esto lo llamamos simetría

La simetría es uno de los rasgos que posee la naturaleza, y es la correspondencia exacta (reflejo) en tamaño, forma y posición de las partes o puntos de un cuerpo o figura geométrica con relación a un punto (centro), recta (eje) o plano.

El eje de simetría es una línea imaginaria que al dividir una figura cualquiera, lo hace en dos partes congruentes entre sí, es decir, simétricas. Las figuras geométricas pueden tener más de un eje de simetría.

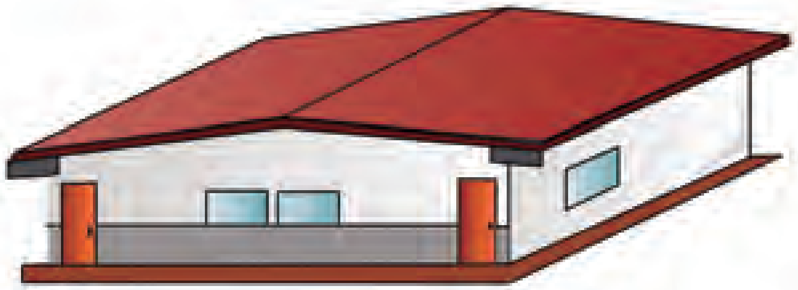


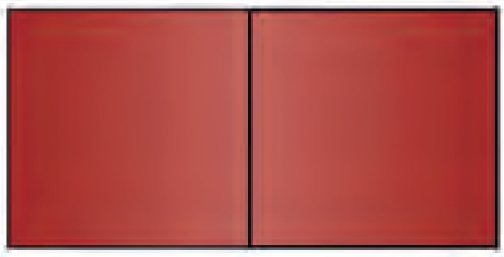
Las líneas de las figuras anteriores representan ejes de simetría en cada una de ellas

Con sus compañeras, compañeros, familiares, vecinas y vecinos, observen algunas edificaciones como iglesias, edificios, casas y monumentos. Tomen algunas fotografías, tráiganlas a clase y respondan preguntas tales como:

- ¿Son simétricas esas edificaciones?
- ¿Cuántos posibles ejes de simetrías poseen cada uno de ellos? Hagan las anotaciones en sus cuadernos.

A continuación tenemos la vista desde arriba del techo de la casa:





Vista de planta del techo

Utilizando una regla graduada respondan a las siguientes preguntas:

- ¿Qué observan?
- ¿Cómo son los rectángulos que forman el techo?
- ¿Sus vértices se encuentran a igual distancia con respecto al lado común entre ellos?

Tipos de simetría

Existen diferentes tipos de simetrías, entre estas tenemos: las reflexiones, las traslaciones y las rotaciones.

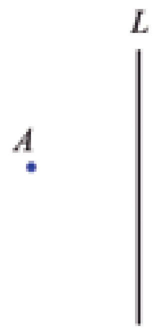
Fíjense en la imagen de la vivienda indígena ubicada a la orilla de un río y tomando en cuenta la línea roja. ¿Qué observan? ¿Qué representa la línea roja en la imagen? ¿Qué nombre le darían a este fenómeno? ¿Qué otras situaciones conocen donde se dé el mismo fenómeno?

La simetría de **reflexión** es la que observamos cuando un objeto se refleja de igual manera pero en posición contraria en espejos, cristales, lagos y ríos. Los puntos están a la misma distancia de la línea central (línea de reflexión o eje de simetría). No importa la dirección en que vaya el reflejo, la imagen reflejada siempre tendrá el mismo tamaño de la original.

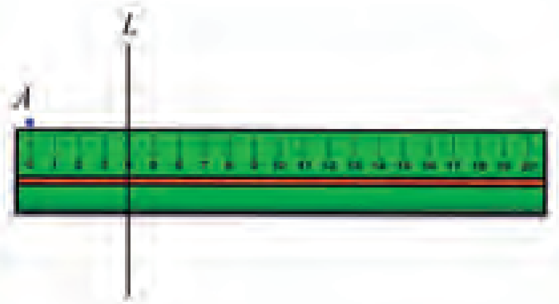
Simetría de reflexión es la simetría alrededor de un eje L, es una transformación que hace corresponder a cada punto de una figura geométrica otro punto llamado imagen, tal que la recta L es mediatriz de los segmentos que se forman entre los puntos y sus imágenes y el segmento que une un punto con su imagen, es perpendicular al eje de simetría. Para trazar simetrías de reflexión, cada uno de los vértices de la figura se desplaza perpendicularmente al eje de simetría y se sitúa a la misma distancia del eje en su posición original.

¿Cómo realizamos la simetría de reflexión? Muy sencillo, presten atención.

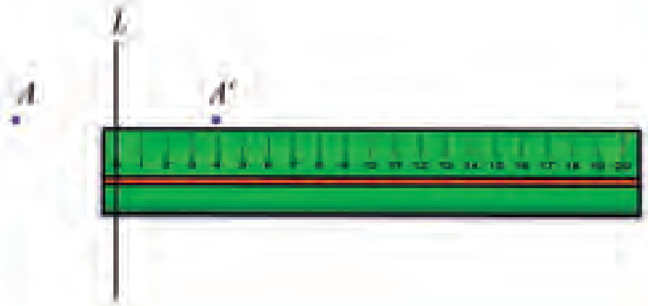
Para realizar la simetría de reflexión de un punto A a partir de una recta L se debe hacer lo siguiente:



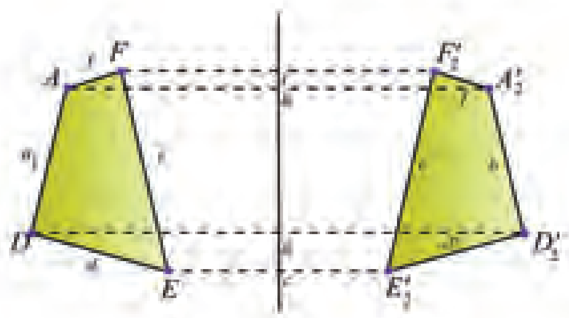
Medimos la distancia que hay de la recta L al punto A. Para ello la regla graduada debe estar de forma perpendicular a la recta L.



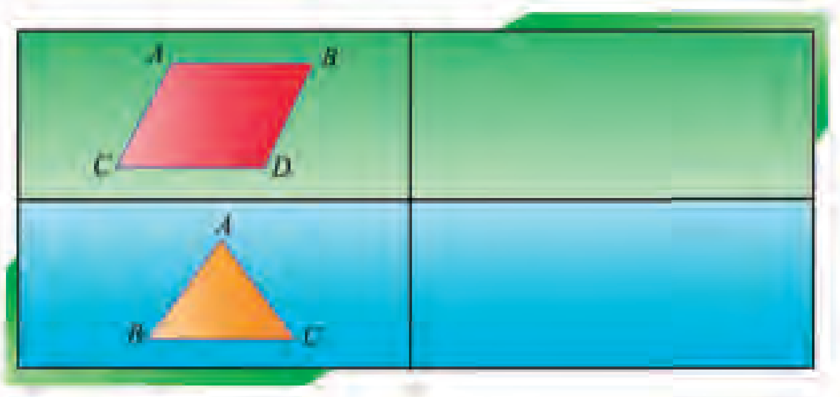
Medimos una distancia igual del lado opuesto del punto y marcamos el punto A'.



Análogamente se puede realizar la reflexión de una figura plana cualquiera.

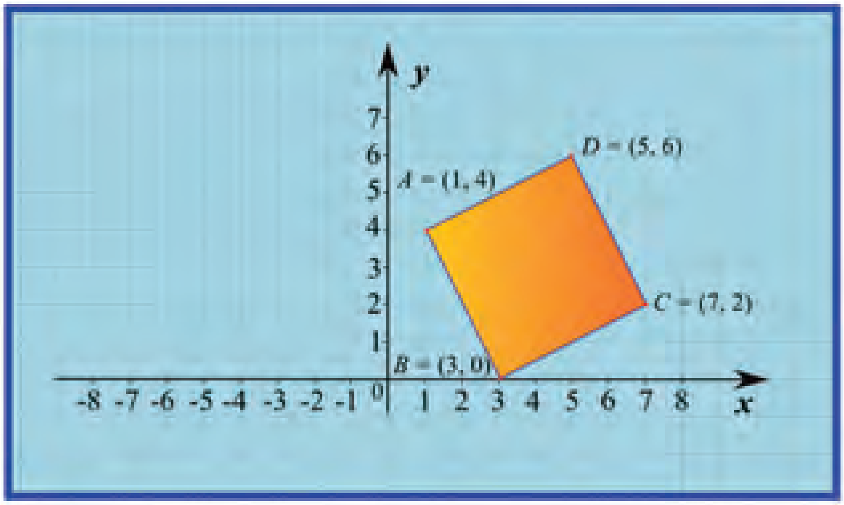


En sus cuadernos, copien los siguientes dibujos, tracen sus figuras simétrica aplicando la reflexión.

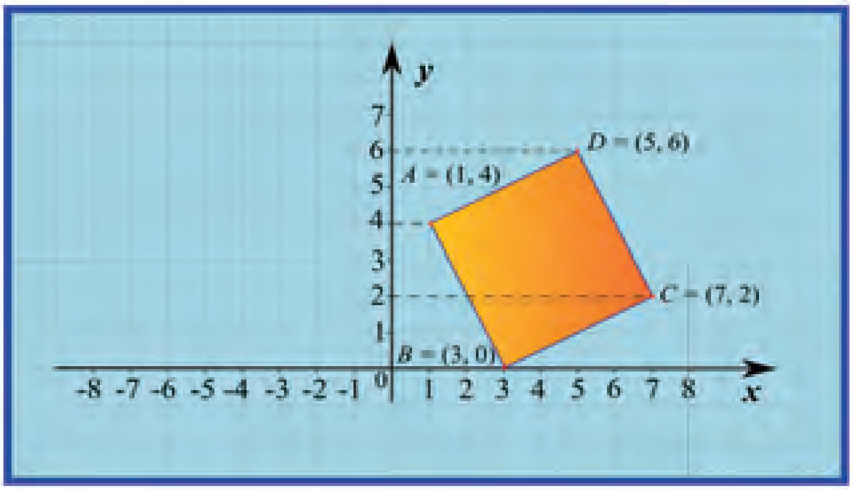


Simetría de reflexión en el plano cartesiano

Para hacer una simetría de reflexión de una figura geométrica en el plano cartesiano debemos hacer lo siguiente:

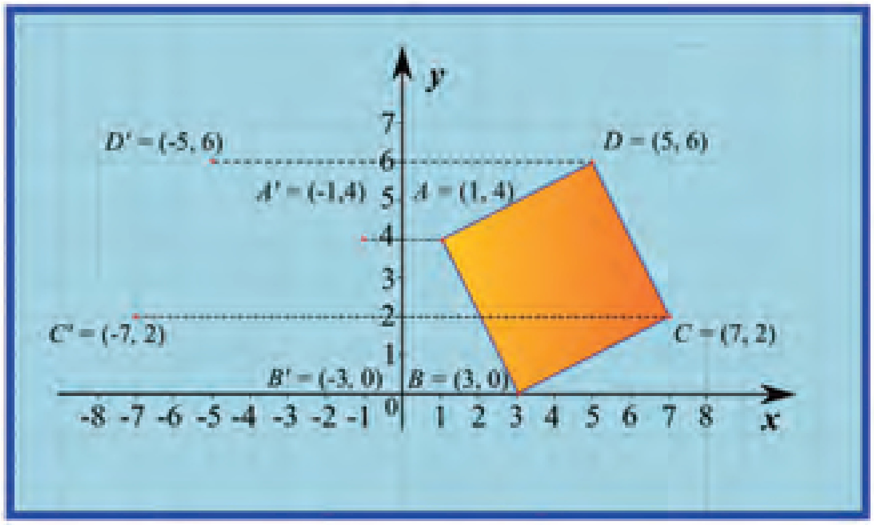


Se identifican los valores que tienen los puntos de los vértices que forman la figura.

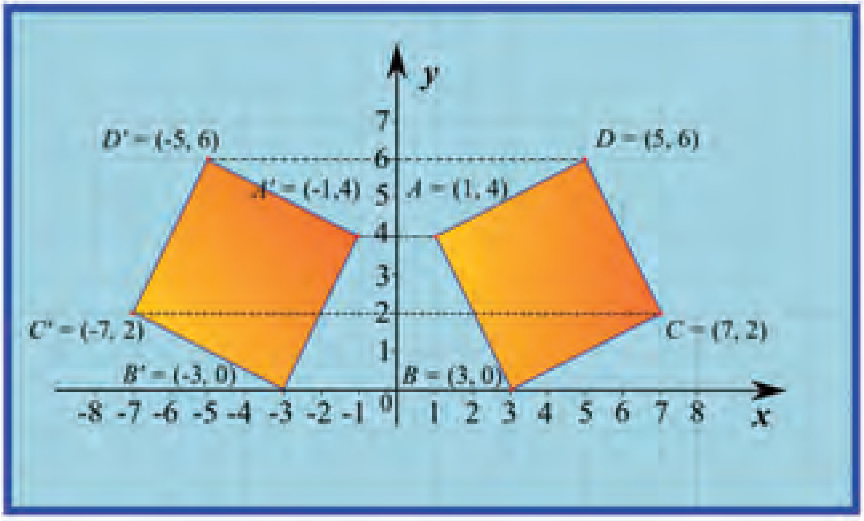


Se identifica la coordenada que funciona como eje de simetría (abscisa u ordenada). En nuestro caso el eje de simetría es el eje y, por tanto las coordenadas de simetría son la segunda componente de cada par ordenado, éstas son: 4, 0, 6 y 2.

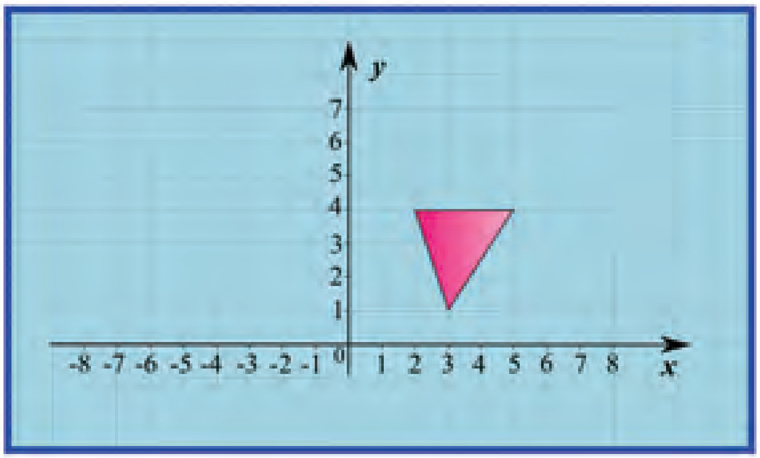
Se ubican los puntos simétricos a los puntos de los vértices de la figura. Por ejemplo, el simétrico del punto $D=(5,6)$ es $D'=(-5,6)$. Se mide desde el punto del eje de simetría (con una línea que llegue en ángulo recto).

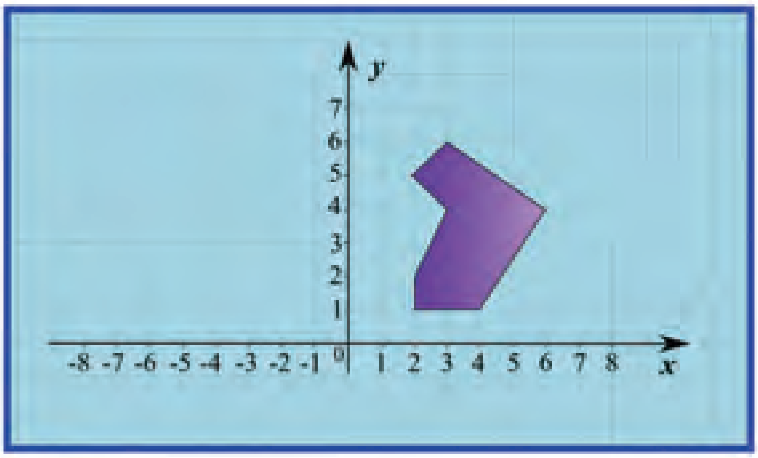


Se conectan mediante segmentos todos los puntos nuevos.



Utilizando las coordenadas de los vértices de cada polígono y utilizando el eje y como eje de simetría, realicen, en sus cuadernos, la simetría de reflexión de las siguientes figuras geométricas. ¿Es posible hacer la simetría de reflexión con respecto al eje x?





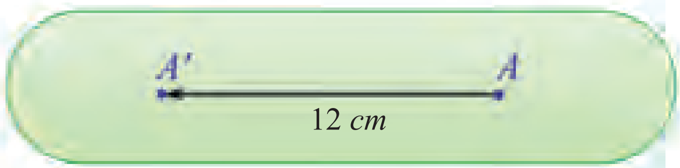
La simetría de traslación

En la construcción de una edificación se utilizan puertas y ventanas corredizas, para dividir espacios y para su ventilación. Veamos en las imágenes siguientes el rectángulo que forma la ventana y la puerta ¿cuándo se deslizan conservan la misma longitud? ¿La misma dirección? ¿La misma magnitud?

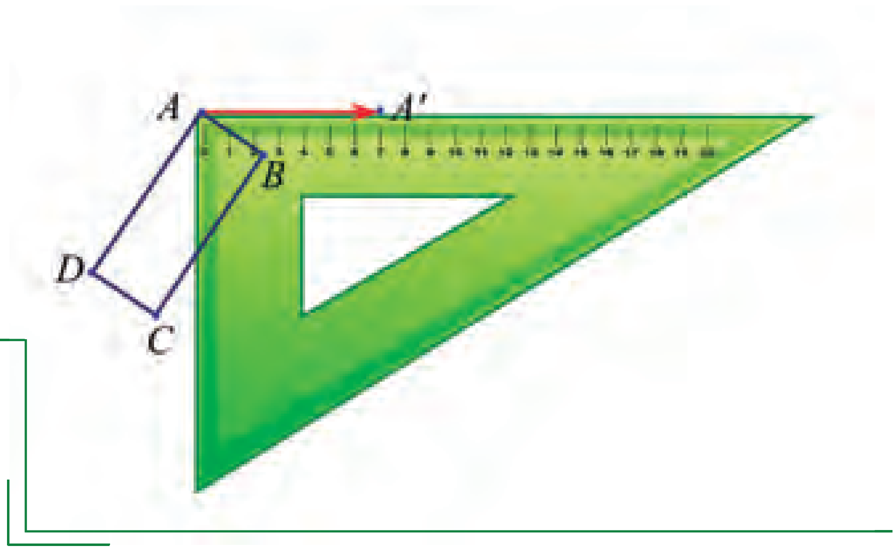
Una transformación por **simetría de traslación** se efectúa cuando hay un cambio de posición de la figura en el plano, este cambio viene dado por un vector $\vec{v}$, por lo tanto, se llama traslación de vector $\vec{v}$ a la isometría que a cada punto A del plano, le hace corresponder un punto del mismo plano, tal que $\overrightarrow{AA'}$ es **igual a** $\vec{v}$. En general, las traslaciones vienen dadas por los siguientes elementos: el módulo, la dirección y el sentido. Un punto y su simétrico por traslación se dice que son homólogos.

Ejemplos:

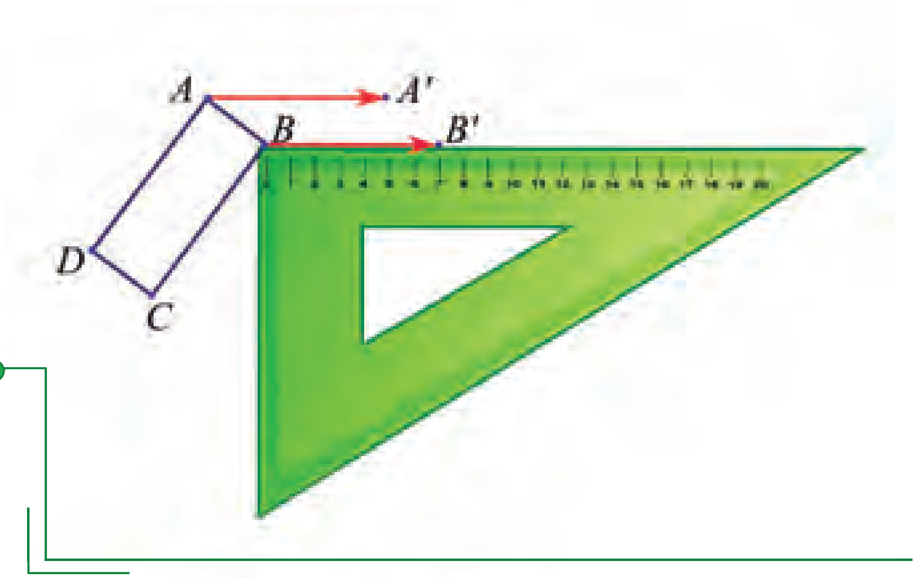
Para trasladar el punto A a una distancia (módulo) de $12\ cm$, en la dirección horizontal y en un sentido hacia la izquierda, procedemos a medir con la regla $12\ cm$ desde el punto A, luego dibujamos el segmento indicando con una flecha el sentido, y le colocamos la letra A con apóstrofe.



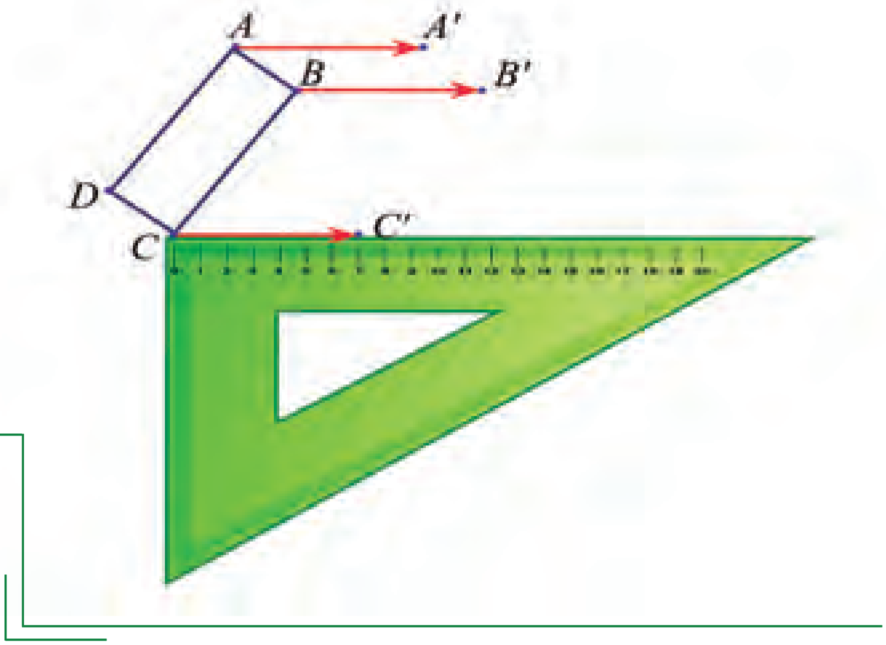
Para trasladar un rectángulo $ABCD$ a la derecha en dirección horizontal con una magnitud de $7\ cm$ procedemos primero a trasladar cada punto.



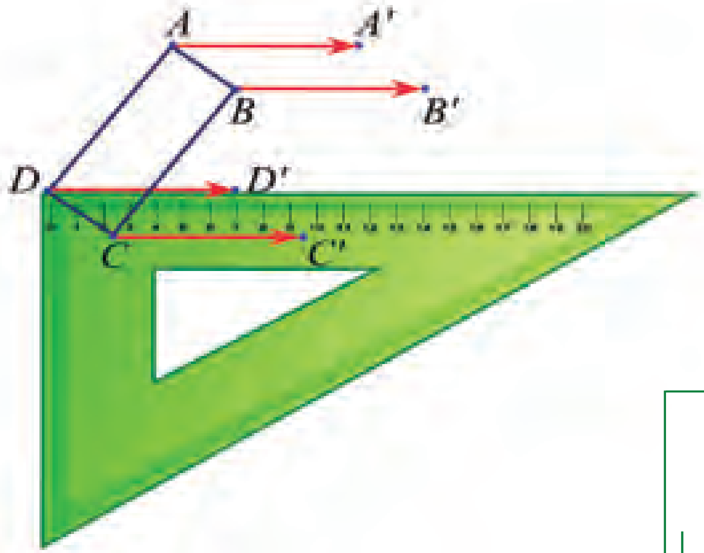
El vértice A' es la imagen del vértice A y está a 7 cm de distancia.



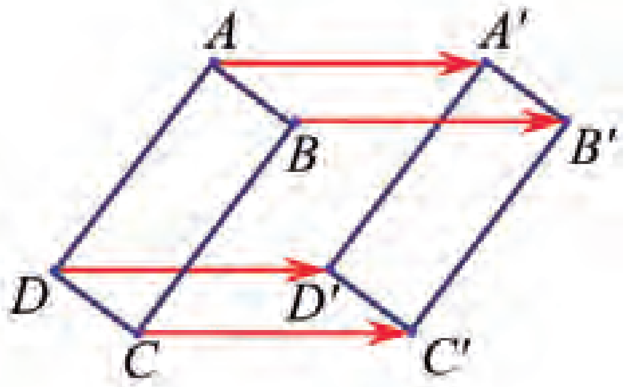
El vértice B' es la imagen del vértice B y está a 7 cm de distancia.



El vértice C' es la imagen del vértice C y está a 7 cm de distancia.



El vértice D' es la imagen del vértice D y está a $7\ cm$ de distancia.



Trazamos el rectángulo $A'B'C'D'$.

Los rectángulos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son congruentes.

Simetría de traslación en el plano cartesiano

Cuando trasladamos respecto a un sistema de ejes coordenadas rectangulares se necesita de un vector $\vec{v}$ de traslación. Este se representa por un par ordenado $\vec{v}\,(x, y)$, donde x representa el desplazamiento horizontal e y representa el desplazamiento vertical respecto a la abscisa (primera coordenada), el signo positivo indica el movimiento hacia la derecha y el signo negativo, hacia la izquierda.

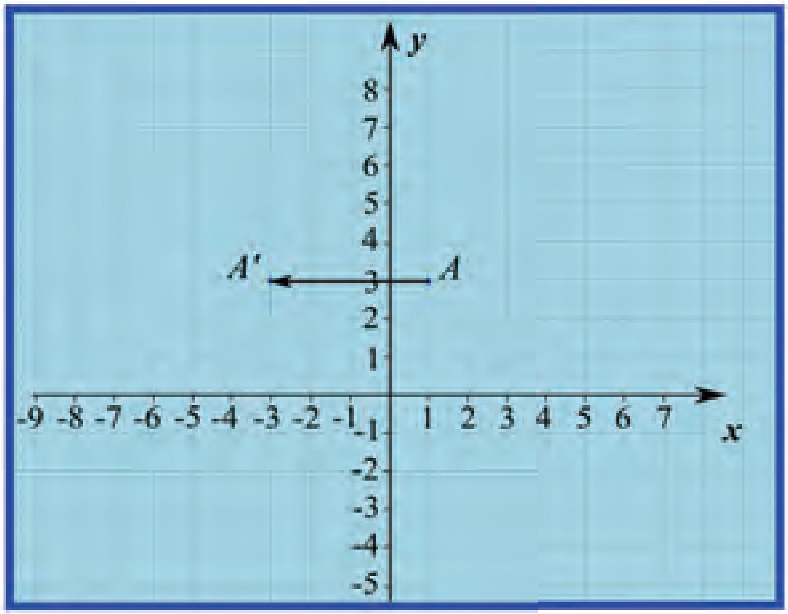
Respecto a la ordenada (segunda coordenada), el signo positivo indica el movimiento hacia arriba y el signo negativo, hacia abajo.

Para hacer una simetría de traslación de una figura geométrica en el plano cartesiano, procedemos de la siguiente manera:

- Se identifican los puntos de cada vértice de la figura en el plano cartesiano.
- Se define el vector $\vec{v}$ de traslación.
- El vector definido se suma algebraicamente con cada punto que conforman los vértices de la figura.
- Se grafican los puntos obtenidos y se unen con segmentos, originándose la figura trasladada.

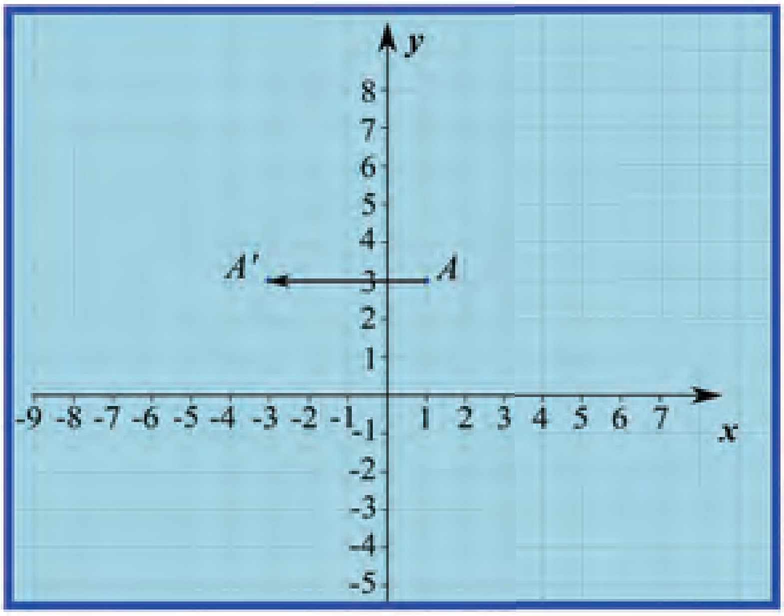
Veamos un ejemplo:

En un sistema de coordenadas rectangulares trasladar el punto $A(1,3)$ según $\vec{v}\,(-4,0)$.

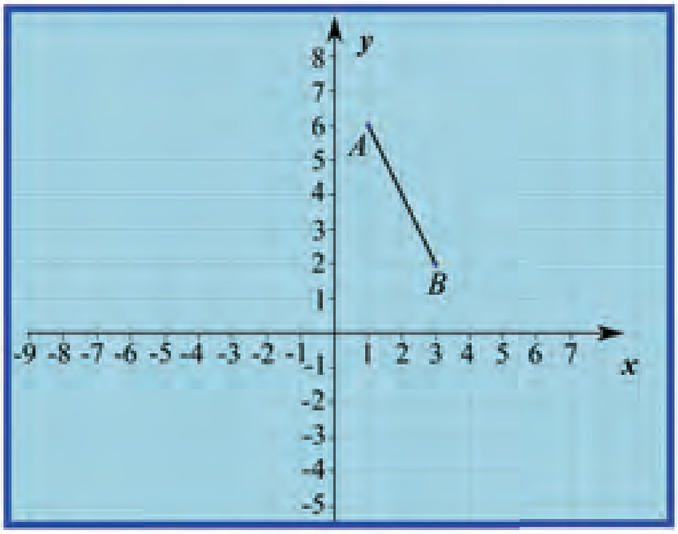


La traslación se realiza según un $\vec{v}$ $(-4,0)$, por lo tanto, el punto $A(1,3)$ se traslada al punto $A'(-3,3)$. Porque la primera componente del punto se suma algebraicamente con la primera del vector y la segunda componente del punto se debe sumar con la segunda del vector:

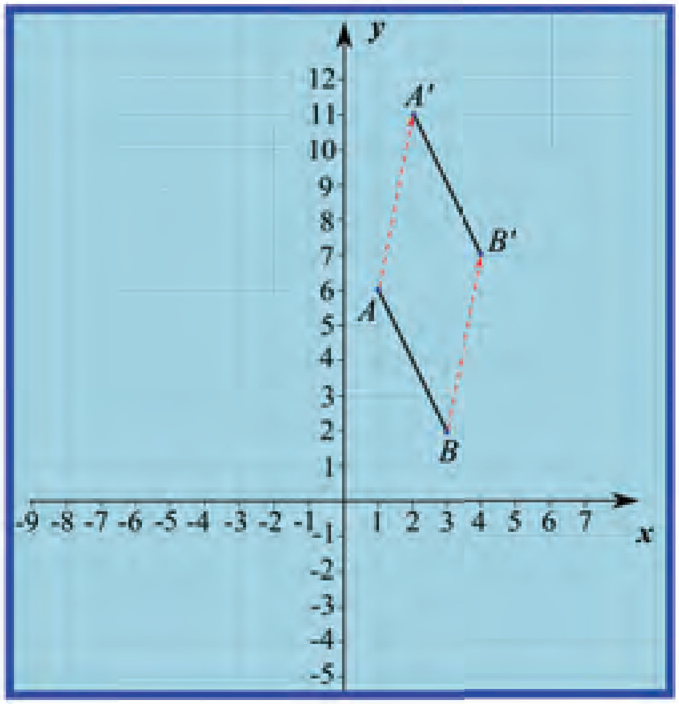
$$\begin{aligned}\vec{v}+A&=(-4,0)+(1,3)\\&=(-4+1,0+3)\\&=(-3,3)\end{aligned}$$



Traslación de un segmento en el plano cartesiano



La traslación $\vec{v}(1,5)$ del segmento $\overline{AB}$ cuyos extremos tienen coordenadas $A\ (1,6)$ y $B\ (3,2)$ en el sistema de coordenadas cartesiano se realiza de forma algebraica de la siguiente manera.



Sumamos a las coordenadas de los extremos las coordenadas del vector de traslación.

$A' = A + \vec{v} = (1,6) + (1,5) = (1+1, 6+5)$

$A'\ (2,11)$

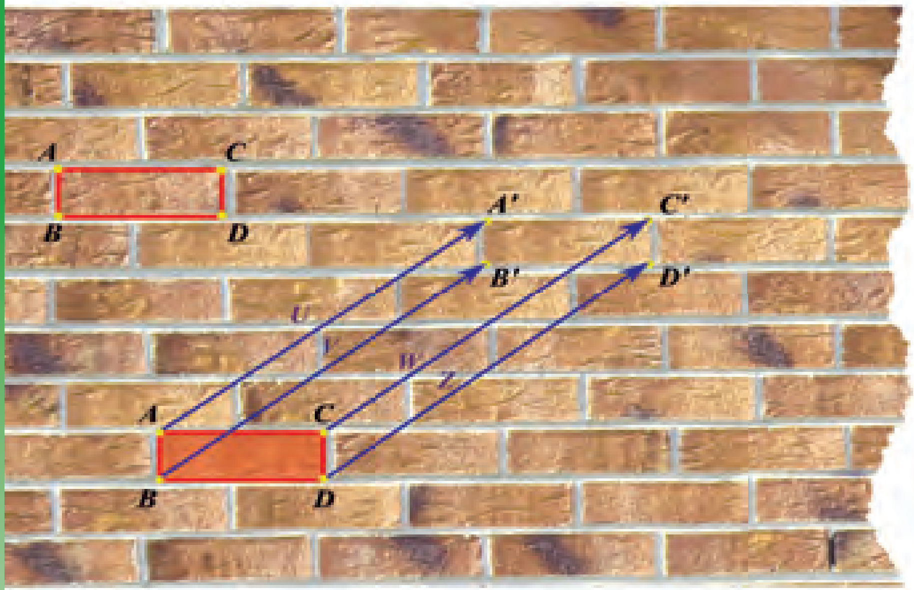
$B' = B + \vec{v} = (3,2) + (1,5) = (3+1, 2+5)$

$B'\ (4,7)$

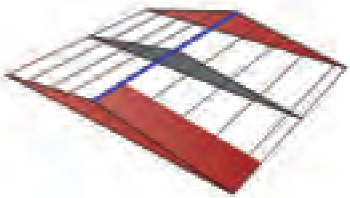
Luego ubicamos los puntos en el sistema de coordenadas cartesiano y se traza el segmento.

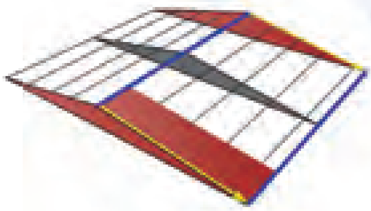
La traslación la podemos visualizar en las diferentes construcciones, solamente hace falta hacerlas visibles al ojo humano, por ejemplo, una pared de ladrillos o de bloques es una fiel representación de la traslación a través de vectores.

Si tomamos una cara de un ladrillo de vértices $ABCD$ podemos suponer que las caras de los demás ladrillos son traslaciones del primero.



Análogamente pueden existir las traslaciones en los techos de las viviendas, si se consideran a las vigas como si fueran segmentos.





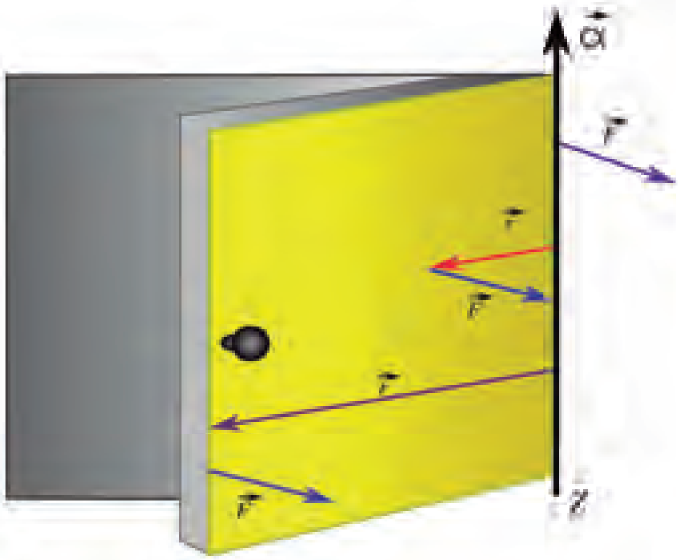
En el campo de la arquitectura se diseñan edificaciones donde se plasma el ingenio humano. Ejemplo de esto es **El Monumento a la Espiga**, el cual está ubicado en Acarigua, estado Portuguesa y fue diseñado por el Arquitecto Gustavo Legorburu en 1980. El monumento semeja un racimo de plantas con una rotación de 90º en su desarrollo de 40 m de altura.

El Monumento a la Espiga Acarigua, edo. Portuguesa

En la fuente de la plaza de Higuerote, que está ubicada en el municipio Brión del estado Miranda se utilizaron óvalos cuya posición representa la rotación del mismo

En las construcciones, tenemos el uso de puertas que permiten el acceso a ellas, esto lo podemos observar en el plano inicial indicado con curvas unidas a una recta, donde la recta es la puerta y la curva su trayectoria.

¿Qué fenómeno geométrico realiza la puerta al abrirla?

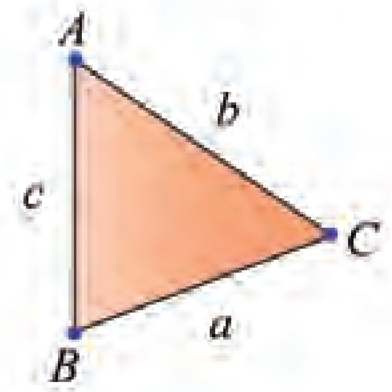


Simetría de Rotación: una **rotación**, en geometría, es un movimiento de cambio en la orientación de un cuerpo o una figura; de manera que, dado un punto cualquiera del mismo, éste permanece a una distancia constante de un punto fijo, y tiene las siguientes características: un punto denominado centro de rotación, un ángulo ($\measuredangle$) y un sentido de rotación.

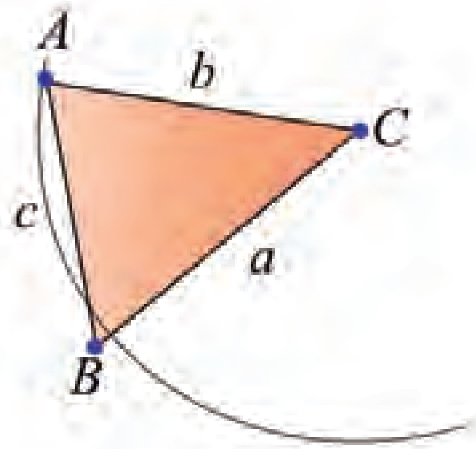
Estas transformaciones por rotación pueden ser positivas o negativas dependiendo del sentido de giro. Para el primer caso debe ser un giro en sentido contrario a las manecillas de un reloj de derecha a izquierda y será negativo el giro cuando sea en sentido de las manecillas de izquierda a derecha.

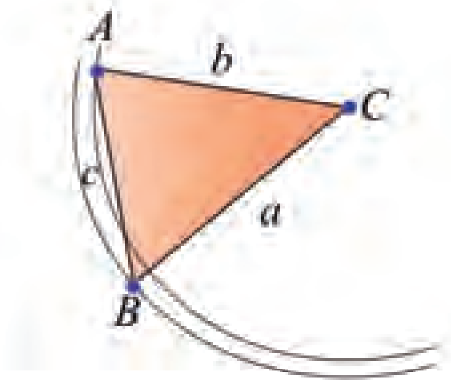
En el proceso de rotación se utilizan los instrumentos de geometría, fundamentalmente el compás y el transportador. El primero de ellos sirve para trazar los arcos de circunferencias que permiten girar en torno al centro de rotación, y el segundo, para medir los ángulos a los cuales queremos rotar.

Veamos cómo realizamos la rotación del siguiente triángulo girándolo un ángulo de $80°$. Después de tener el ángulo de rotación, debemos saber cuál será nuestro centro de rotación, escogeremos el punto C. Sabemos que como el ángulo es positivo lo giramos al contrario de las manecillas del reloj.

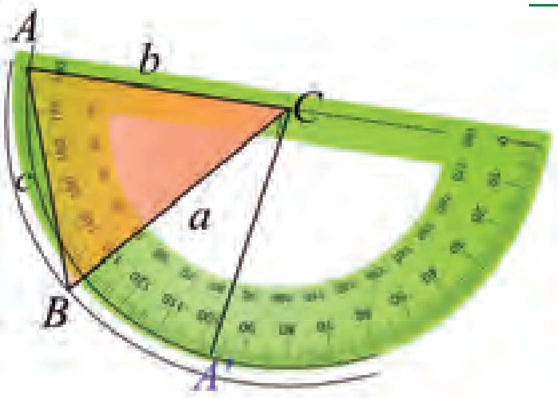


Haciendo centro en C y con abertura C, A, trazamos un arco lo suficientemente grande que abarque la rotación solicitada.

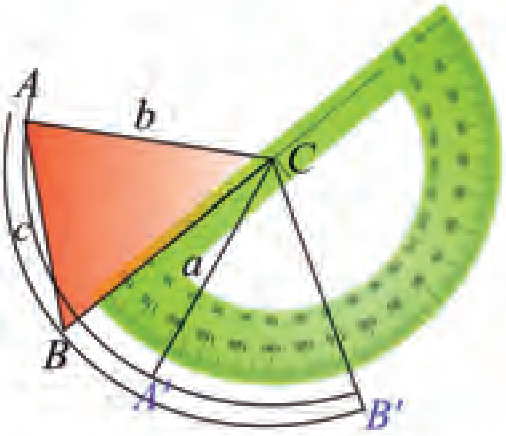




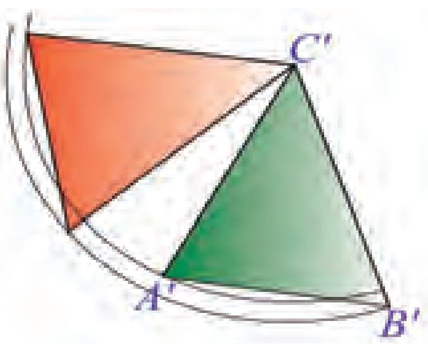
Luego, haciendo centro en C y con abertura C,B trazamos un arco similar al anterior.



Utilizando el transportador y teniendo como centro el punto C y como eje el segmento medimos el ángulo de rotación marcándolo $\overline{CA}$ en el primer arco trazando el punto A'.



Posteriormente, utilizando el mismo transportador, teniendo como centro el punto C y como eje el segmento $\overline{CB}$, medimos el ángulo de rotación, marcamos el punto B' en el segundo arco trazado.



El triángulo $A'B'C$ es el triángulo que resulta de rotar al triángulo ABC teniendo a C como centro de rotación.

Las construcciones en la comunidad

Con los integrantes de la familia o de la comunidad que trabajen en el área de construcción como albañiles, maestros de obra, ingenieros civiles u otros, debatan y analicen las siguientes preguntas:

¿Por qué las columnas de una casa tienen que ser verticales y formar ángulos de $90°$ con el piso?

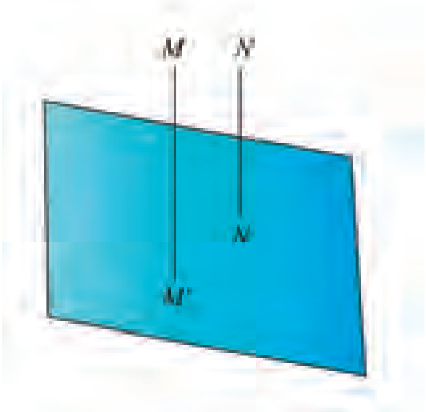
¿Cómo se sostiene una casa construida en la inclinación de un cerro?

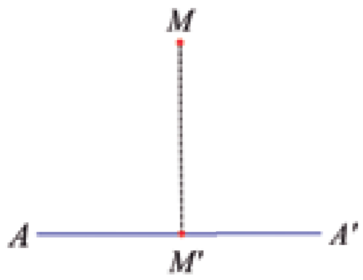
¿Qué conocimientos geométricos poseen nuestros indígenas, que les permiten construir los palafitos?

En una construcción, las columnas son elementos estructurales que sirven para soportar la carga de vigas y del techo, su linealidad permite la trasmisión de la carga al suelo, las columnas son perpendiculares (ángulo de $90°$) con respecto al piso (plano).

Proyección ortogonal

Las columnas son ejemplo de proyección ortogonal con respecto al plano que forma la placa del piso, podemos decir que es una proyección ortogonal de un punto en una recta.



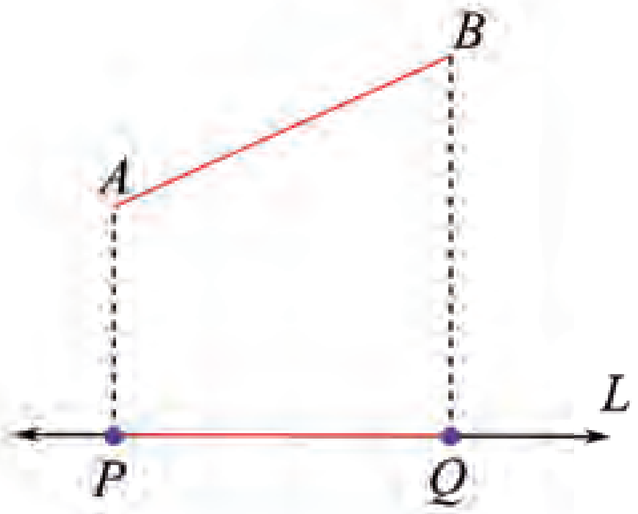


La viga de carga o corona en la construcción de una casa. ¿Qué representa geométricamente su proyección en el piso?

La estructura de los rectángulos que conforman la cercha de techo ¿qué figuras proyecta su sombra en el piso?, ¿en qué posición inciden los rayos del sol en ese momento para que se dé esa proyección?, ¿a qué se debe esto geométricamente?

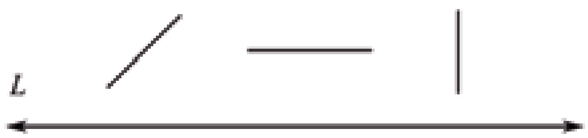
En el diseño de la planta de una vivienda se reflejan las bases de las fundaciones a través de las columnas para la construcción estructural de la obra, la cual se realiza en proyección ortogonal hacia arriba.

Se obtiene la proyección ortogonal de un segmento sobre una recta con solo proyectar ortogonalmente los extremos del segmento. La proyección de un segmento inclinado tiene menor longitud. La proyección de un segmento paralelo es de igual longitud.



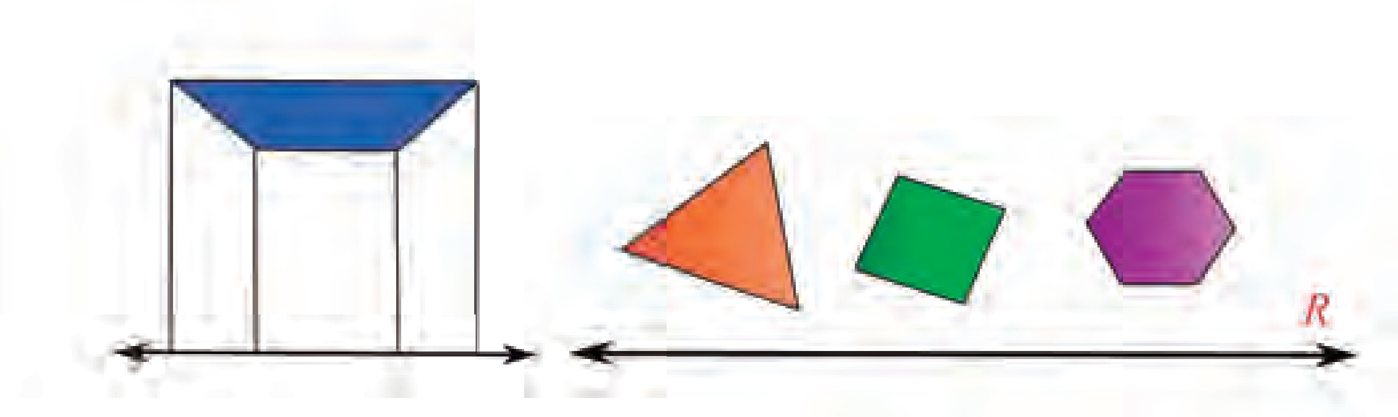
Actividad

1. En sus cuadernos realicen las proyecciones ortogonales de los siguientes segmentos en la recta L.



La proyección ortogonal de una figura geométrica sobre una recta es el conjunto de los puntos que son proyecciones ortogonales de los puntos de la figura. Para **proyectar ortogonalmente una figura geométrica sobre una recta en un plano** solo se necesita proyectar los extremos de la figura, su proyección siempre será un segmento.

2 En sus cuadernos realicen la proyección ortogonal de las siguientes figuras en la recta ***R***.



Observen la siguiente casa:

- ¿Cómo se vería desde cierta altura estuvieran encima de ella? ¿Cómo se vería si estuvieran en frente de ella?
- ¿Cómo se vería si se ubicaran al frente de la lateral derecha de ella?
- Dibujen en sus cuadernos las diferentes vistas de la casa que observaron.

3 En sus cuadernos construyan un rombo y hagan una reflexión respecto de un punto que esté fuera del rombo.

4 Construyan un trapezoide y hagan una reflexión respecto de un vértice.

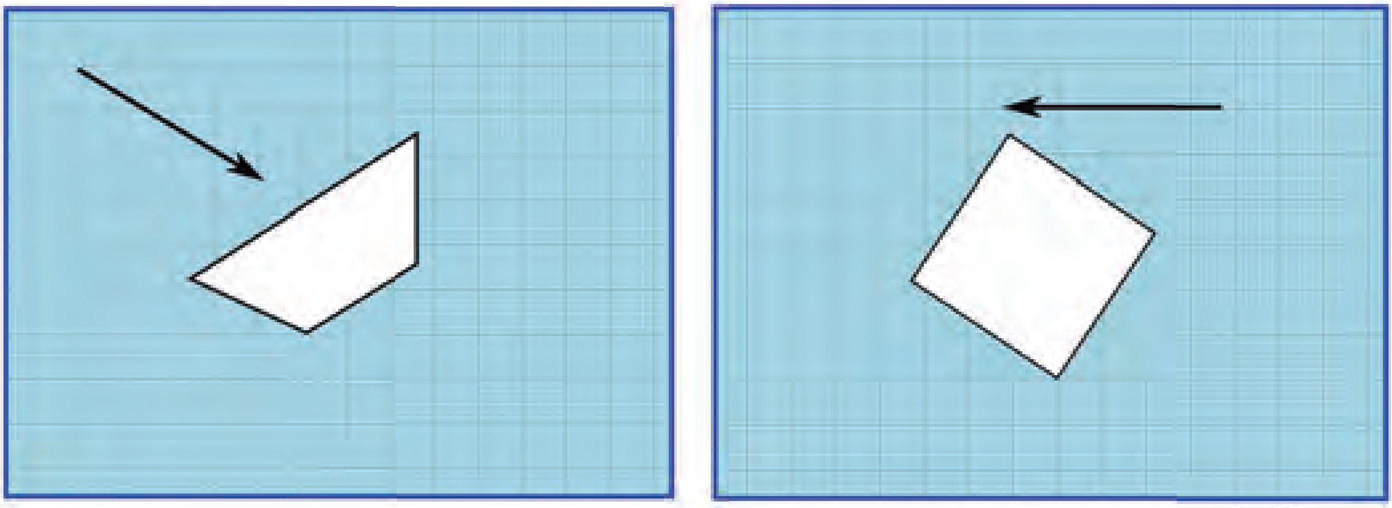
5 En un sistema de coordenadas rectangulares, dado un segmento $\overleftrightarrow{PQ}$ de coordenadas $P\ (-2,-2)$, $Q\ (3,5)$ trasládenlo en dirección del vector $\vec{v}(-5,0)$ y determinen los puntos del nuevo segmento $\overline{P'Q'}$.

6 En un sistema de coordenadas rectangulares, trasladen el triángulo ΔABC de coordenadas $A\ (1,1)\ B\ (2,4),\ C\ (5,1)$ según el $\vec{v} = (-6,\ 1)$. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los vértices del triángulo? Dibujen el nuevo triángulo $A'B'C'$.

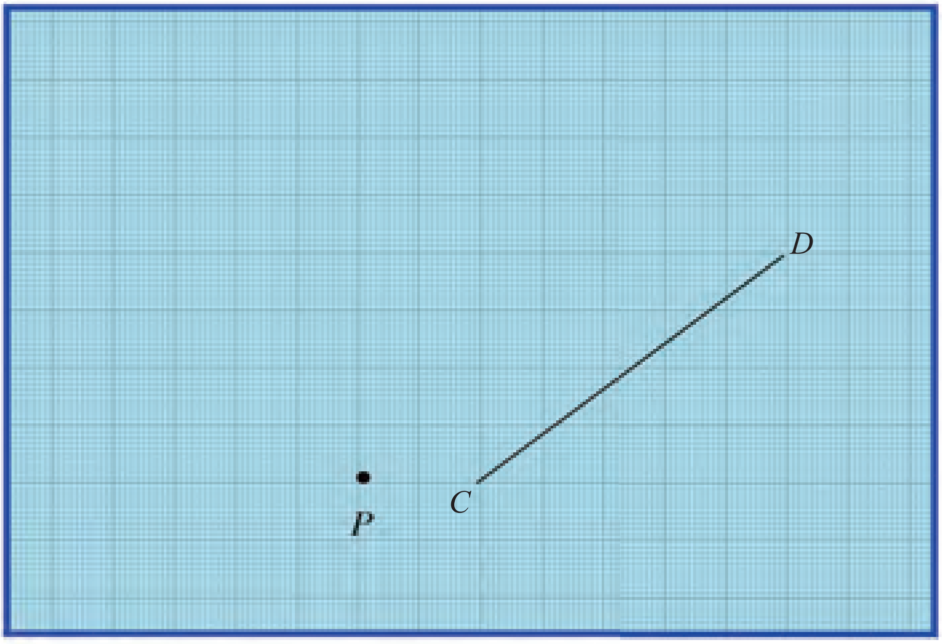
7 En un sistema de coordenadas rectangulares, trasladen el cuadrilátero $ABCD$ de coordenadas $A\ (1,1),\ B\ (2,4),C\ (4,4),\ D\ (5,1)$ según el vector $\vec{v} = (-8,\ -5)$. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los vértices del cuadrilátero? Además, representen el cuadrilátero $A'B'C'D'$.

8) En un sistema de coordenadas rectangulares, trasladen el triángulo ΔABC de coordenadas $A\ (2,4)$, $B\ (3,6)$, $C\ (4,3)$ según el vector $\vec{v} = (-5,\ -2)$. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los vértices del triángulo? Y dibujen el nuevo triángulo $A'B'C'$.

9) Realicen las siguientes traslaciones tomando en cuenta el vector dado.



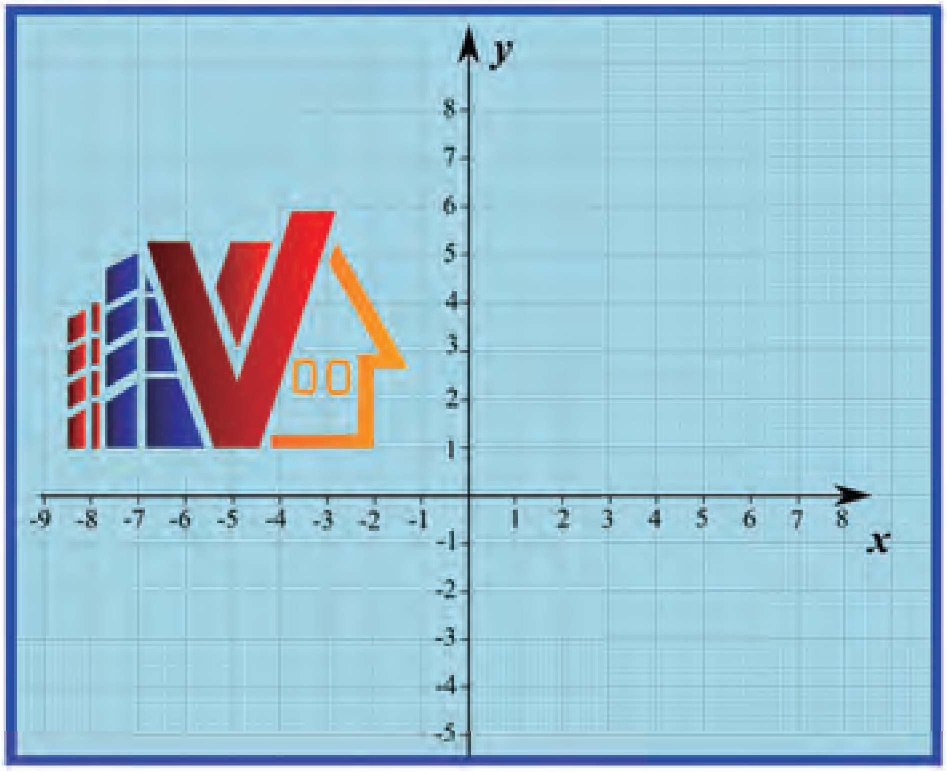
10) Roten el segmento $\overrightarrow{CD}$ tomando como centro de rotación al punto P, con un giro de $80°$.



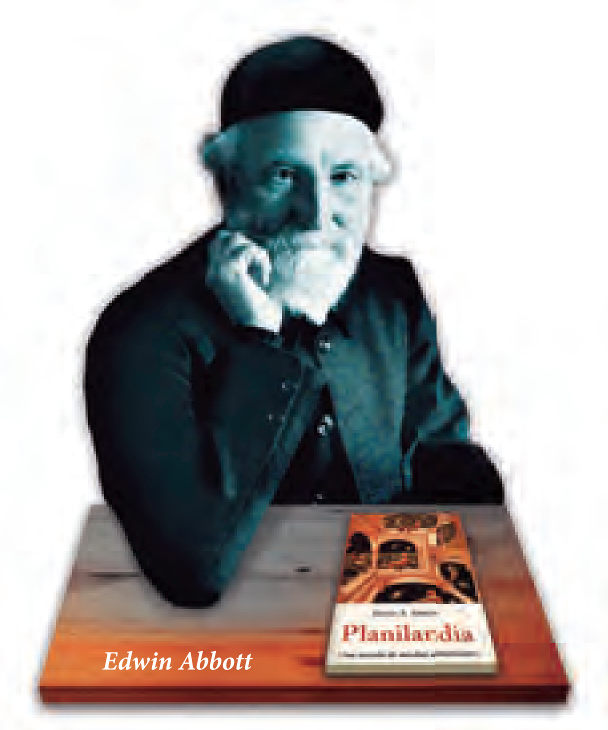
11 Completen la siguiente tabla indicando las coordenadas del punto al aplicar la rotación indicada.

Puntos	Rotar 90°	Rotar 180°	Rotar 270°	Rotar 360°
E (3,2)				
F (4,5)				
G (-3,2)				
H (5,5)				

12 Con la ayuda de la regla, realicen la reflexión de la siguiente figura en el I cuadrante del plano cartesiano.



Explorando *Planilandia*



Edwin Abbott

Planilandia es un libro de ciencia-ficción, el cual nos introduce en un mundo de dos dimensiones. El tener que adaptar nuestro pensamiento y puntos de vista a los seres bidimensionales, a los unidimensionales (seres de Linelandia) y a los tridimensionales, nos obliga a realizar ejercicios de imaginación que nos introduce de forma intuitiva en la teoría de la relatividad.

El protagonista termina en la cárcel por tratar de hacer comprender, a sus conciudadanos de Planilandia, la existencia de un mundo tridimensional.

Exploremos por un momento este mundo fantástico bidimensional.

Habla el protagonista:

"...nada era visible... para nosotros, excepto las líneas rectas; y me apresuraré a demostrar la necesidad de esto".

Tomen una moneda y colóquenla en una de nuestras mesas tridimensionales, ¿qué forma geométrica tiene la moneda? ¿Un círculo, verdad? Ahora, coloquen la moneda al borde de la mesa y sitúense de forma tal que su ojo coincida con la orilla de la mesa. La moneda habrá dejado de ser oval y se presentará antes nuestros ojos como una línea recta (ver dibujo).

Abbott, E.A. (1976), Planilandia. Madrid: Ediciones Guadarrama, S.A.

Les recomendamos la lectura de esta obra. Mientras tanto pueden conversar con sus compañeras, compañeros y docente, sobre cómo se visualizaría una esfera pasando por *Planilandia*, es decir, cruzando el plano de la tabla superior de la mesa.

Propuesta de vivienda para tu consejo comunal

Las familias venezolanas de algunas regiones del país como los estados Miranda, Zulia, Falcón y Mérida, vienen sufriendo de frecuentes vaguadas que traen como consecuencia la pérdida o deterioro de la infraestructura de sus viviendas. Frente a esta problemática, realicen un diseño en una hoja cuadriculada, de una vivienda que sea una propuesta de un posible proyecto el cual puedan plantear a su consejo comunal.

Investiguen los tipos de viviendas más usados en otros países con esta misma problemática; ¿Qué conocimientos estudiados están presentes en el diseño? ¿Con qué conocimientos matemáticos representan la fachada de una casa? ¿En qué partes de la casa utilizan la rotación y la traslación? ¿Cuánto mide el ángulo de rotación utilizado? ¿Cuántos ejes de simetría pueden trazar al diseño?

Teatro Nacional
Caracas, Distrito Capital

4

Congruencia de figuras planas.
Segmentos y ángulos congruentes

¿Iguales o parecidos?

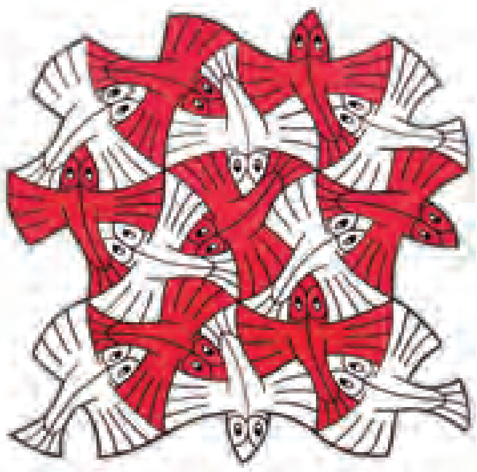
Congruencia

Todos nos parecemos a nuestros hermanos, a nuestros padres o a algún familiar en particular, ese parecido a veces puede ser muy pronunciado, pero si hemos visto a hermanos gemelos entendemos por qué algunas personas dicen que "son igualitos", lo que se quiere decir es que si comparamos los rasgos de esas personas gemelas, sus orejas, sus ojos, su boca, podemos decir que las tienen iguales. La igualdad o la **congruencia** es un concepto muy unido a nuestras vidas, en el arte, la arquitectura, la ingeniería, la costura y muchos otros artes u oficios está presente esta noción.

Maurits Cornelius Escher

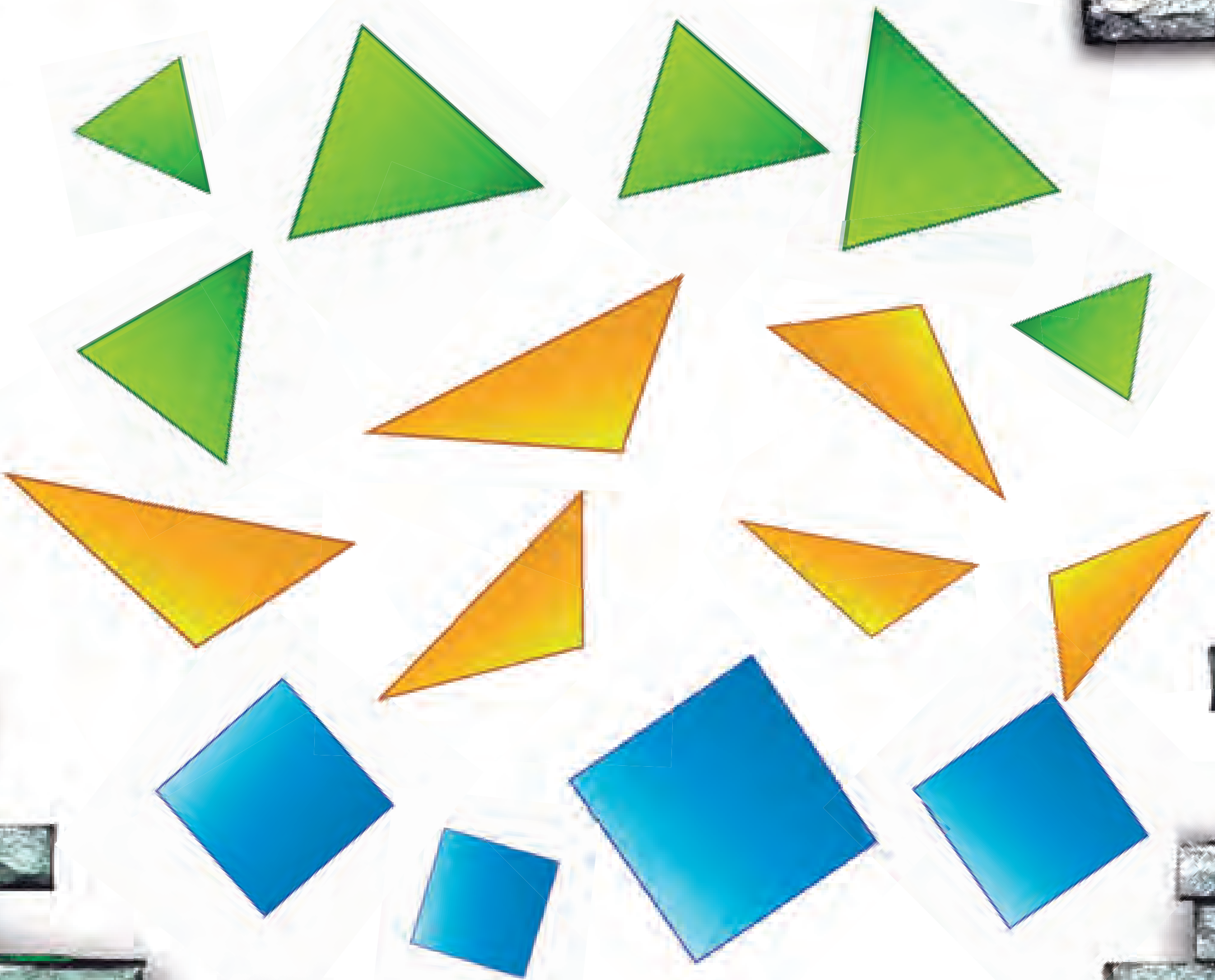
(17 Junio 1898 – 27 Marzo 1972)

Es el artista plástico holandés que mejor ha reflejado gráficamente el pensamiento matemático moderno. Aún sin ser matemático, sus obras muestran un interés y una profunda comprensión de los conceptos geométricos, desde la perspectiva a los espacios curvos, pasando por la división del plano en figuras congruentes y semejantes.



¿Cuáles de las de las figuras que observaron tienen la misma forma y tamaño? ¿Y cuáles, a pesar de tener la misma forma, tienen diferente tamaño y orientación? Socializa tus reflexiones con compañeras, compañeros y docentes.

Observen ahora las siguientes figuras geométricas y escriban en sus cuadernos las observaciones sobre las figuras vistas.



¿Cuáles de las de las figuras geométricas que observaron tienen la misma forma y tamaño? y, ¿cuáles tienen diferente tamaño y orientación? Socializa tus reflexiones con compañeras, compañeros y docentes.

Dos figuras geométricas son **congruentes** si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas.

Dos figuras geométricas son **semejantes** cuando, aunque se cambie su tamaño y orientación, no se altera su forma.

Segmentos y ángulos congruentes

Así como tenemos figuras congruentes, es decir, que tienen la misma forma y tamaño, también encontramos segmentos y ángulos congruentes

Realicemos la siguiente actividad:

Midan los segmentos que se presentan en la *figura 1* e indiquen cuáles segmentos tienen la misma longitud.

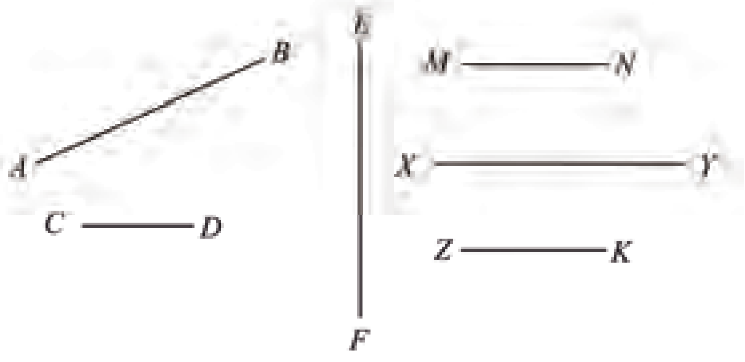


Figura 1

Como han podido evidenciar en la actividad anterior, hay segmentos que tienen la misma longitud, a estos los llamamos **segmentos congruentes**. Recordemos que la longitud de cualquier segmento $\overline{AB}$ se denota como AB. Para indicar que dos objetos son congruentes se utiliza el símbolo siguiente: $\cong$. Simbólicamente podemos, entonces, hacer la siguiente definición de segmentos congruentes:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ si, y sólo si, } AB = CD$$

Realicemos ahora la siguiente actividad:

Midan los ángulos que se presentan en la *figura 2* e indiquen cuáles de ellos tienen la misma medida.

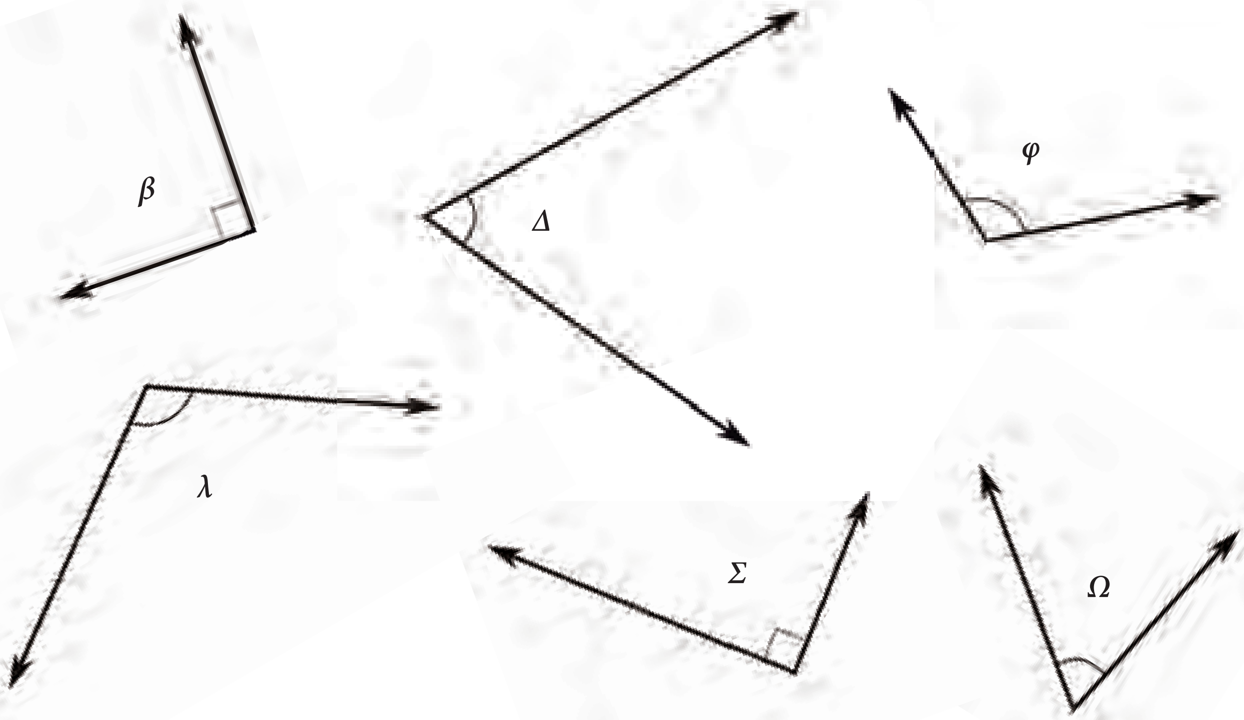


Figura 2

Como han podido evidenciar en la actividad anterior, hay ángulos que tienen la misma medida, a estos los llamamos **ángulos congruentes**. Recordemos que la medida de cualquier ángulo $\angle ABC$ se denota como $m\angle ABC$. Simbólicamente podemos, entonces, hacer la siguiente definición de ángulos congruentes:

$\angle ABC \cong \angle DEF$ si, y sólo si, $m\angle ABC = m\angle DEF$

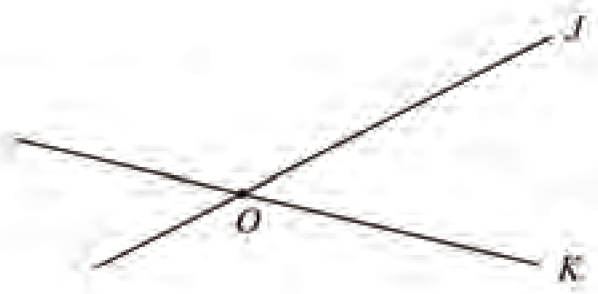
Algunas construcciones geométricas

- Dado el segmento $\overline{AB}$, construir un segmento congruente al mismo mediante dos métodos:
  - Usando una regla graduada.
  - Usando una regla no graduada, es decir sin marcas, y un compás.
- Dado un radio $\overline{PQ}$ construir dos círculos que sean congruentes.

Ahora vamos a trabajar con líneas paralelas cortadas por una secante y ángulos congruentes.

Rectas paralelas y secantes

En un plano, dos rectas distintas tienen un único punto en común o ninguno. En el primer caso, se dice que tales rectas son secantes, y en el segundo, que esas rectas son paralelas. El gráfico que sigue ilustra estos conceptos.



Rectas secantes

Rectas paralelas

Si las rectas L y M son paralelas, podemos escribir: $L \| M$ (lo cual se lee “L es paralela a M”).

Además, hay tres propiedades importantes que verifica la relación de paralelismo entre rectas: (1) una recta L es paralela a sí misma (esta es la propiedad **reflexiva**). (2) Si una recta L es paralela a una recta M, entonces M es paralela a L (esta es la propiedad **simétrica**). Y (3) si L es paralela a M y M es paralela a N, entonces L es paralela a N (propiedad **transitiva**). Todo esto lo podemos escribir simbólicamente de la siguiente manera:

Propiedad reflexiva: $L \| L$

Propiedad simétrica: si $L \| M$ **, entonces** $M \| L$

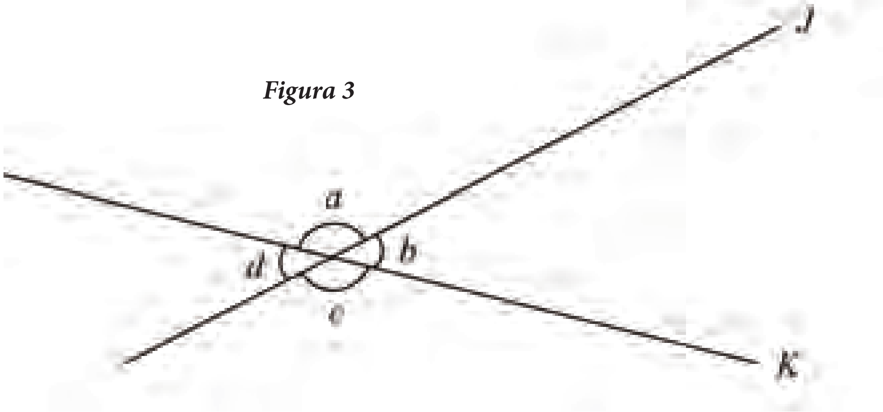
Propiedad transitiva: si $L \| M$ **y** $M \| N$ **, entonces** $L \| N$

Ahora, en el caso de dos rectas secantes, se forman cuatro ángulos en el punto donde se intersecan. En la *figura 3* hemos llamado a estos ángulos a, b, c y d, mídanlos con su transportador y saquen sus propias conclusiones. ¿Cuánto es la suma de las medidas de estos cuatro ángulos?

Al sumar las medidas de los cuatro ángulos deben obtener.

$m\sphericalangle a + m\sphericalangle b + m\sphericalangle c + m\sphericalangle d = 360^o$ (Aquí la m indica la medida del ángulo dado).

Figura 3



Dos ángulos son **consecutivos** si tienen un vértice y un lado en común.
Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es $180°$ (justo el ángulo llano).
Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es $90°$ (justo el ángulo recto).

Actividad

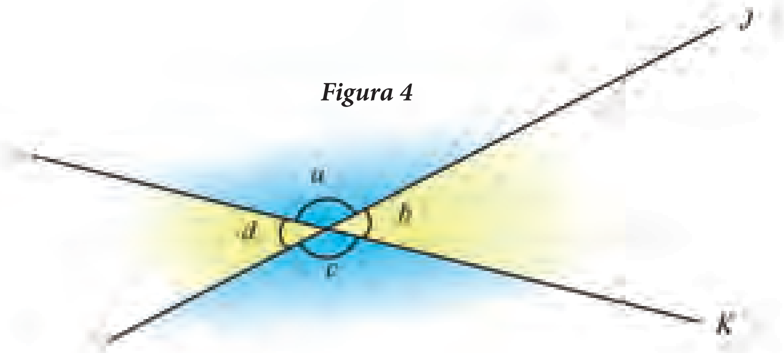
Observen la *figura 3* e indiquen en sus cuadernos, ¿cuáles de esos ángulos son consecutivos, cuáles son suplementarios y cuáles complementarios?

Tracen en sus cuadernos ángulos:

- Consecutivos-suplementarios.
- Consecutivos- complementarios.
- Consecutivos que no sean ni suplementarios, ni complementarios.

Ángulos opuestos por el vértice

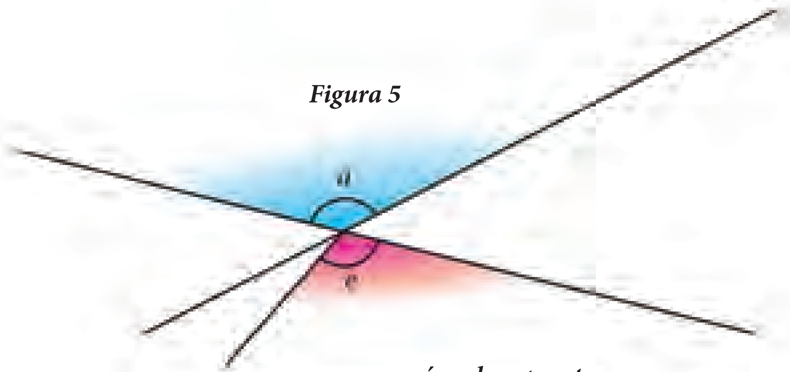
Figura 4



Ángulos opuestos por el vértice

En la *figura 4*, $\measuredangle a$ y $\measuredangle c$ son ángulos opuestos por el vértice, pues tienen un vértice común (que es precisamente el punto donde se intersecan las rectas J y K) y los lados de cada ángulo se prolongan en los del otro ángulo. Del mismo modo, $\measuredangle d$ y $\measuredangle b$ son opuestos por el vértice.

Figura 5



a y e no son ángulos opuestos por el vértice

En la *figura 5*, los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$ no son opuestos por el vértice (observemos que uno de los lados del ángulo $\measuredangle e$ no se prolonga en ninguno de los lados del ángulo $\measuredangle a$).

Dos ángulos opuestos por el vértice siempre tienen la misma medida. Por tanto, $m\measuredangle a = m\measuredangle c$ y $m\measuredangle d = m\measuredangle b$. Y como tienen la misma medida, entonces son congruentes: $\measuredangle a \cong \measuredangle c$ y $\measuredangle d \cong \measuredangle b$.

Ángulos alternos internos, ángulos alternos externos y ángulos correspondientes

Consideremos ahora tres rectas L, M y K no concurrentes, es decir una de las rectas, digamos K, corta a las otras en dos puntos distintos (*figura 6*). En este caso a la recta K se le denomina **recta transversal**.

Ahora, nos interesa comparar los ángulos que se forman entre las rectas no concurrentes. Observemos que en cada punto donde se intersecan las rectas L y M con la recta transversal, se tienen cuatro ángulos. Las medidas de estos cuatro ángulos suman $360°$, tal como vimos antes.

Los pares de ángulos $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$, y también $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$, se denominan **ángulos alternos internos**. Se les llama así pues se encuentran a lados distintos de la recta transversal y están "entre" las rectas L y M. Los pares de ángulos $\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$, así como $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$, son **ángulos alternos externos** (fíjense que se encuentran a lados distintos de la recta transversal y están "fuera" de las rectas L y M).

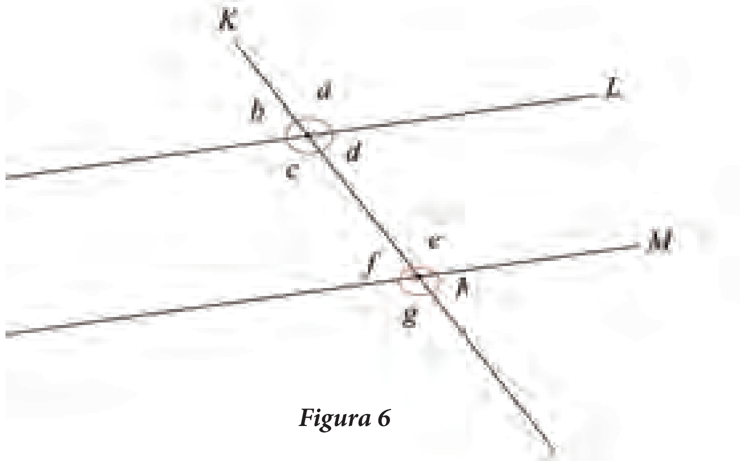


Figura 6

Ángulos congruentes

Con la ayuda del transportador midan los ángulos a, b, c, d, c, e, f, g y h. ¿Cuáles de ellos tienen igual medida?

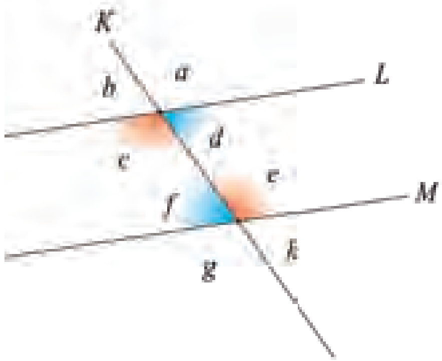
Se dice que dos **ángulos** son **congruentes** si y solo si tienen la misma medida.

Además, los pares de ángulos:

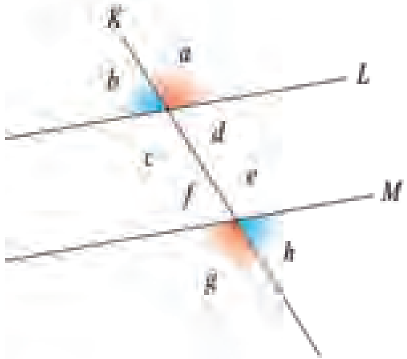
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle e$
$\sphericalangle d$ y $\sphericalangle h$
$\sphericalangle b$ y $\sphericalangle f$ Son **ángulos correspondientes**.
$\sphericalangle c$ y $\sphericalangle g$

Si $L \| M$, entonces cualquier par de ángulos alternos internos, alternos externos o correspondientes son congruentes entre sí. Y recíprocamente, si sabemos que un par de ángulos alternos internos, alternos externos o correspondientes son congruentes, entonces las rectas L y M deben ser paralelas.

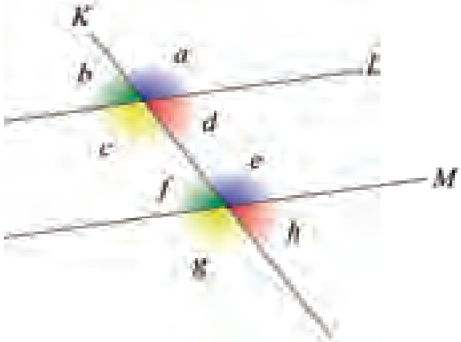
Veamos ahora en las rectas paralelas L y M, los pares de ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes. Verifiquen que estos sean congruentes entre sí.



Ángulos alternos internos



Ángulos alternos externos

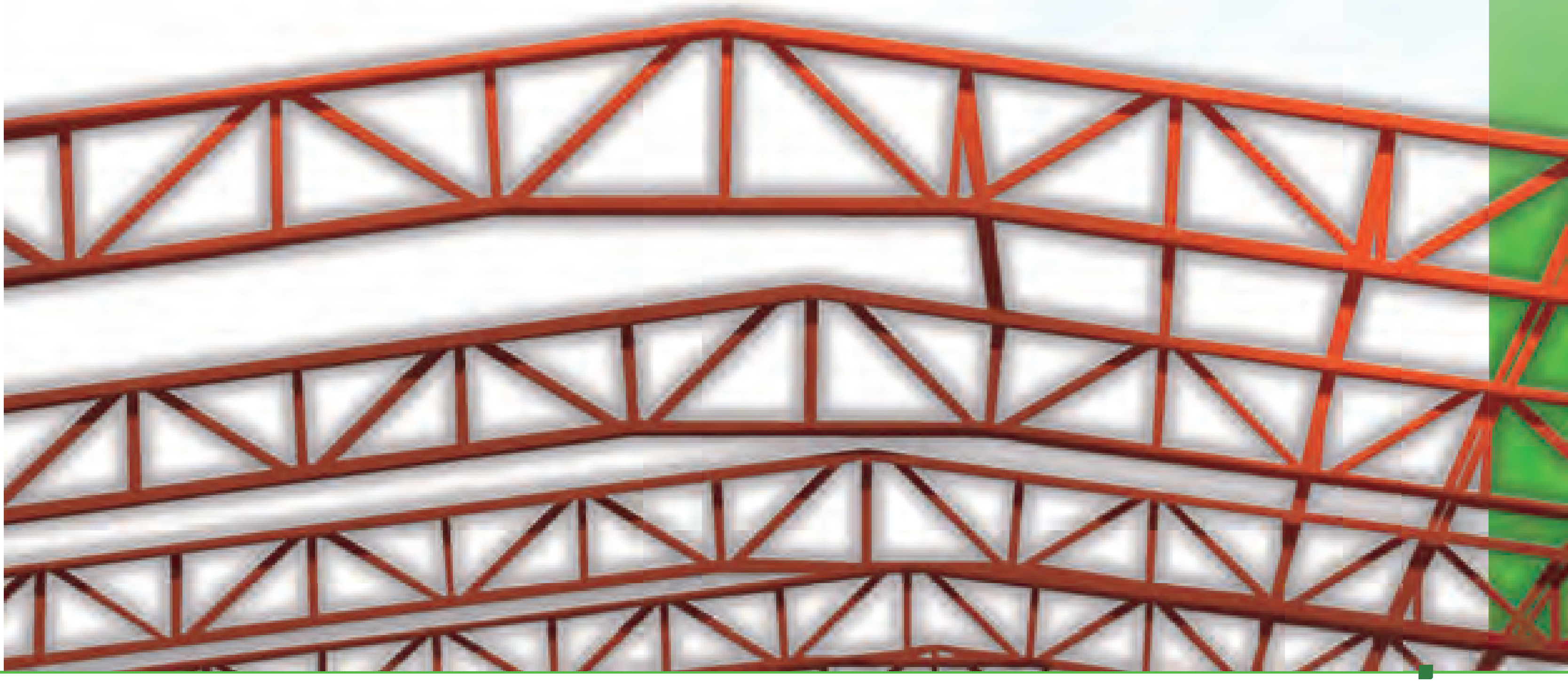


Ángulos correspondientes

De igual forma, si como se muestra en la *figura 7* tenemos que $\sphericalangle d \cong \sphericalangle f$ (es decir, que los ángulos d y f son congruentes), entonces las rectas L y M son paralelas.

Figura 7

Así que la propiedad ya mencionada es importante para deducir si dos rectas son paralelas o no.



Actividad

Representen dos ángulos no consecutivos. Socialicen esto con sus compañeras y compañeros.

Con base en la *figura 8*, indiquen cuáles ángulos son opuestos por el vértice, cuáles son complementarios y cuáles suplementarios.

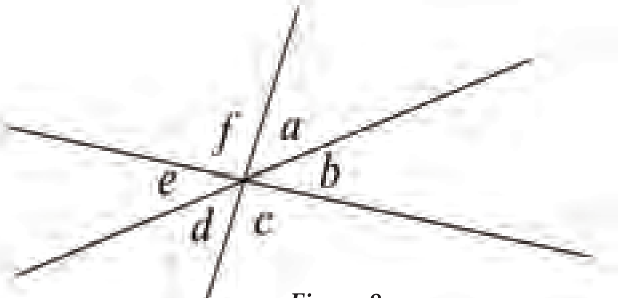


Figura 8

Fíjense en la *figura 9*. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos internos del triángulo ΔABC? Consideren que $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$.

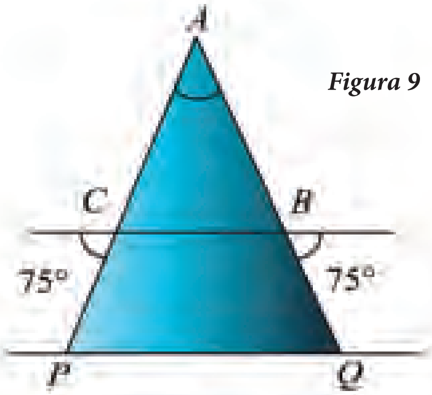
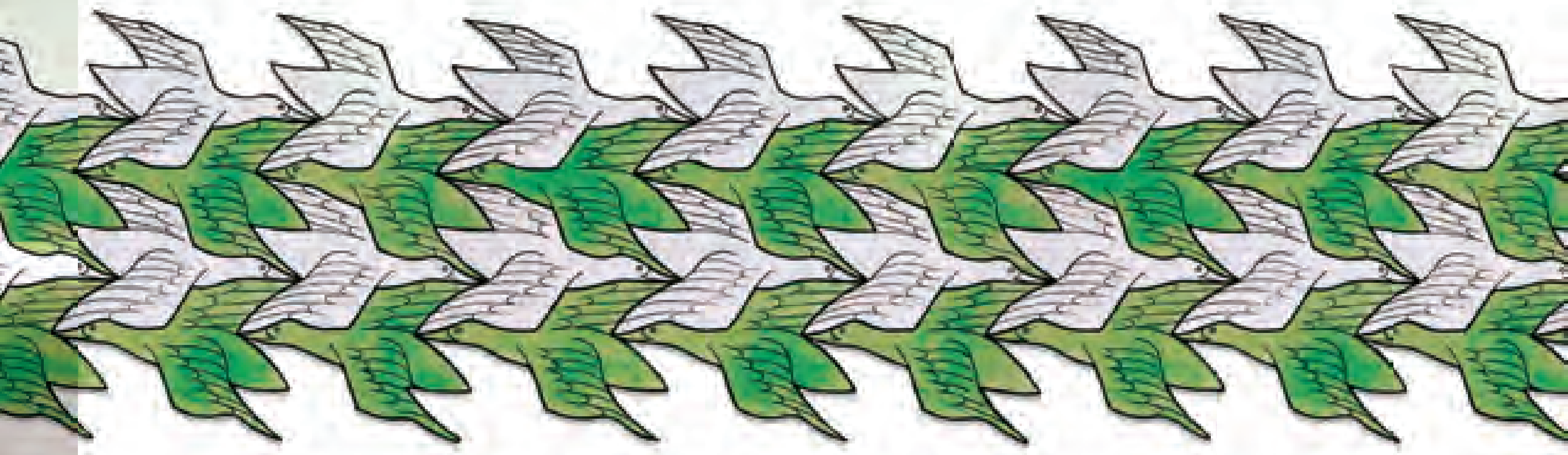


Figura 9

En esta lección hemos estudiado segmentos y ángulos congruentes, también encontramos en la realidad figuras congruentes, como las que mostramos a continuación:



Veamos ahora si en geometría podemos encontrar figuras congruentes. Como hemos estudiado en otros grados, los triángulos son figuras muy utilizadas en la construcción. ¿Sabes por qué ocurre esto?

Figura 10

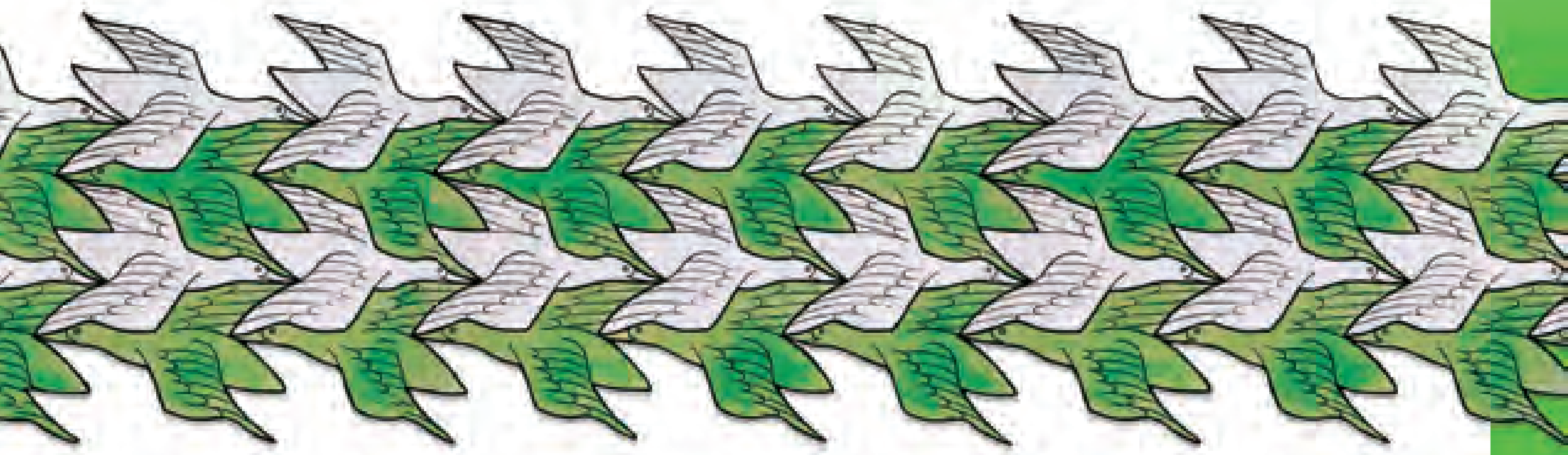
Existen muchas estructuras de metal formadas por triángulos unidos entre sí, la rigidez que adquieren estas estructuras las hacen ideales para realizar construcciones que no tienen grandes pilares. Muchos de estos triángulos tienen una característica especial, es decir son congruentes.

Para visualizar lo explicado con respecto a los triángulos y las construcciones realicemos la siguiente actividad:

Recorten tres pedazos de igual tamaño de un palito de altura (utilizados en arreglos florales) y peguen sus extremos. Recorten de otro palito cuatro pedazos de igual tamaño para construir una figura con forma de cuadrado y un tercer palito en cinco pedazos siguiendo el mismo procedimiento anterior, esta vez para construir una figura con forma de pentágono.

Presiona cada una de las figuras realizadas aplicándoles una fuerza en donde se indica con la flecha.

Al realizar esta actividad podrán observar que la figura que mejor resiste la presión es el triángulo. ¿Pueden investigar a qué se debe esto?



Cuando se aplica una fuerza a uno de los vértices de un triángulo, los dos lados de la figura que convergen en ese vértice quedan sometidos a la fuerza y el tercer lado, quedará sometido a una fuerza de tracción. Esto no pasa con otras figuras con forma de polígonos distintos al triángulo. Investiguen por qué pasa esto.

Es así como el triángulo pasa a ser la figura más utilizada al construir andamios, puentes y muchas otras estructuras. Así mismo, cuando se utilizan otras formas geométricas, para hacerlas más resistentes estas se deben triangular, como se muestra en la *figura 10*.

Triángulos congruentes

Recordemos, como dijimos anteriormente, que dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Veamos un par de triángulos y verifiquemos si son o no congruentes.

Observen los triángulos que se muestran en la figura, ¿cómo podemos verificar que ambos triángulos son congruentes?

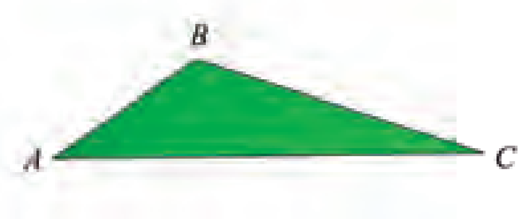


Figura 11

En la lección anterior estudiamos varias isometrías: traslaciones, rotaciones y simetrías axiales. Utilizando estas transformaciones en el plano, ¿podremos hacer coincidir el ΔABC con el ΔXYZ? En ese caso, uno de los triángulos será imagen del otro, y podremos decir que ambos **triángulos** son **congruentes**.

Si observamos atentamente lo que acabamos de realizar, podemos ver que, cuando hacemos coincidir un triángulo con el otro, establecemos una correspondencia entre segmentos (lados de los triángulos) y también entre vértices. Así, los **lados correspondientes** de estos dos triángulos congruentes tienen la misma longitud, y los **ángulos correspondientes** tienen la misma medida.

Completen en su cuaderno la tabla que les presentamos.

Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ son congruentes si y solo si:
$\angle A \cong \angle X$ ó $m\angle A = m\angle X$
$\angle B \cong$
$\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ ó $AC = XZ$
$\overline{AB} \cong \overline{XY}$

Como hemos visto, estos dos triángulos son congruentes porque los lados y ángulos de uno de los triángulos son congruentes con los lados y ángulos correspondientes del segundo triángulo. Para evitar confusiones, al denotar la congruencia de dos triángulos debemos hacer que coincidan los ángulos y lados correspondientes. En nuestro caso, al decir que: $\Delta\ ABC \cong \Delta\ XYZ$, tenemos que el vértice A coincide con el vértice X, el B con el Y y el C con el Z. Con lo realizado hasta ahora podemos presentar la siguiente definición:

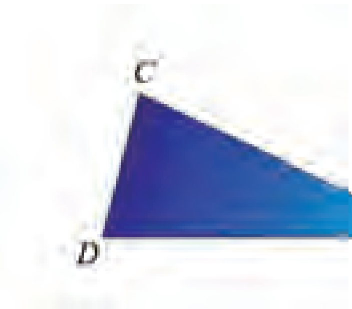
$\Delta\ ABC$ es congruente con $\Delta\ XYZ$, que denotamos $\Delta\ ABC \cong \Delta\ XYZ$, si y solo si,

$$\angle A \cong \angle X, \angle B \cong \angle Y, \angle C \cong \angle Z,\ \overline{AB} \cong \overline{XY}, \overline{BC} \cong \overline{YZ}\ \ y\ \ \overline{AC} \cong \overline{XZ}.$$

Pero, ¿necesitamos hacer coincidir mediante transformaciones o isometrías un triángulo con otro, para saber si son o no congruentes? Veamos algunas condiciones que nos permiten determinar cuándo dos triángulos son congruentes o no.

Actividad

1 Midan la longitud de los lados de los triángulos presentados. ¿Los lados correspondientes tienen la misma medida?



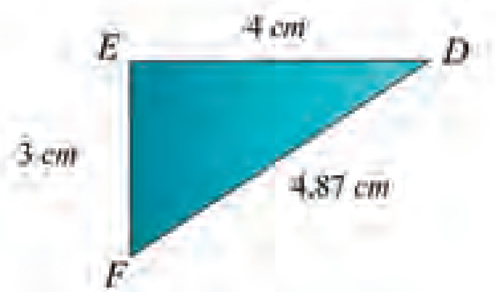
Si su respuesta es positiva, entonces: $\Delta CDE \cong \Delta LMN$.

Podemos entonces concluir que se cumple que:

Dos triángulos son **congruentes** si y solo si los tres lados de uno de los triángulos son congruentes, respectivamente, con los tres lados correspondientes del otro triángulo.

Esta condición se conoce como el **criterio** LLL (lado, lado, lado).

2 Explica por qué los triángulos de la *figura 12* son congruentes, haciendo uso del **criterio** LLL.



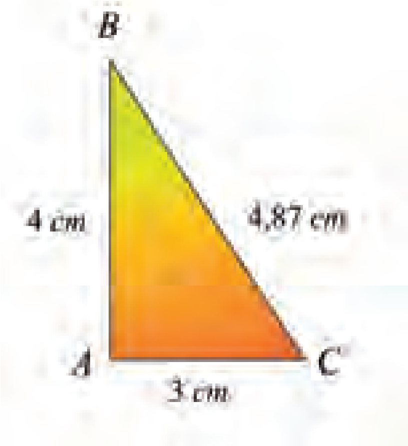


Figura 12

Sin embargo, esta no es la única manera que tenemos de determinar si dos triángulos son congruentes o no. Veamos la siguiente actividad:

Actividad

1) En los triángulos que se muestran en la *figura 13*, midan los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ y el $\angle DEF$ comprendido entre ellos del ΔDEF. Ahora midan los lados $\overline{OP}$ y $\overline{PQ}$ y el $\angle OPQ$ comprendido entre ellos del ΔOPQ . Comparen los resultados de las mediciones efectuadas en ambos triángulos.

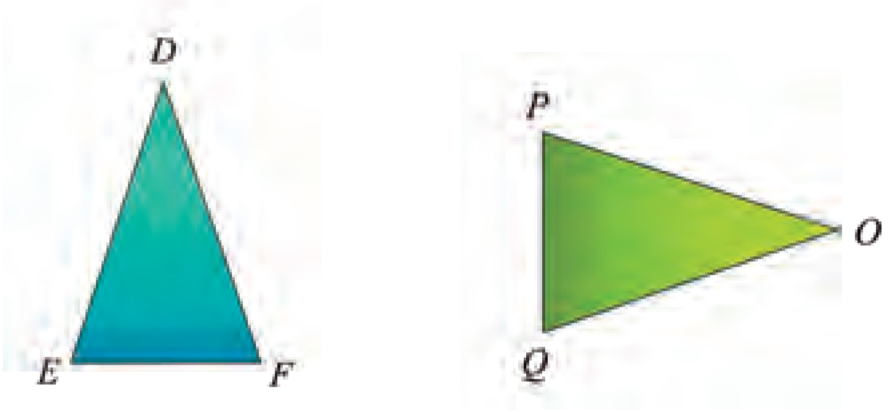


Figura 13

Deben haber concluido que $\overline{DE} \cong \overline{OP}$, $\overline{EF} \cong \overline{PQ}$ y que el $\angle DEF \cong \angle OPQ$, por lo tanto, tenemos que el:

$$\Delta DEF \cong \Delta OPQ$$

2)

Realicen esta misma actividad, para los triángulos dados, con otro par de lados y el ángulo comprendido entre ellos y verifiquen que la condición de congruencia estudiada se cumple.

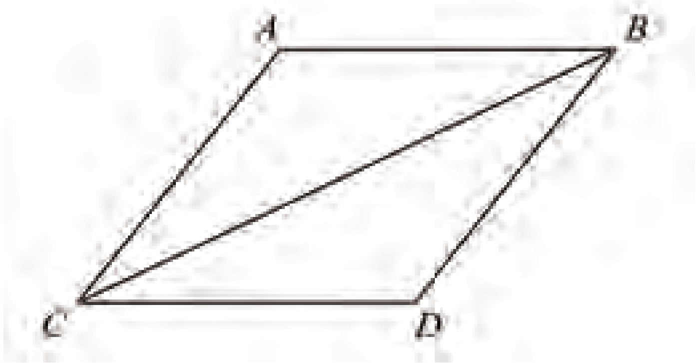
Por lo tanto, podemos afirmar que:

Dos triángulos son congruentes si y solo si dos lados del primer triángulo y el ángulo comprendido entre estos son congruentes con dos lados correspondientes del segundo triángulo y el ángulo comprendido entre estos dos lados.

Esta condición se denomina **criterio *LAL*** (lado, ángulo, lado).

Resolvamos problemas

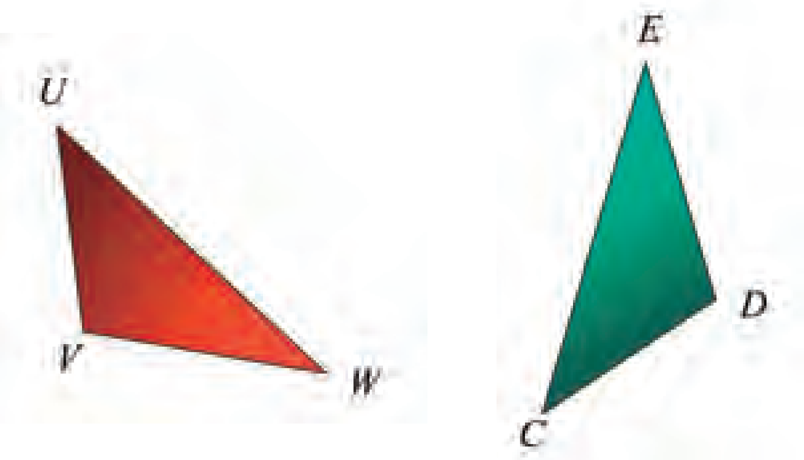
Explica cuáles triángulos de la figura dada son congruentes, haciendo uso del criterio LAL y conociendo que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

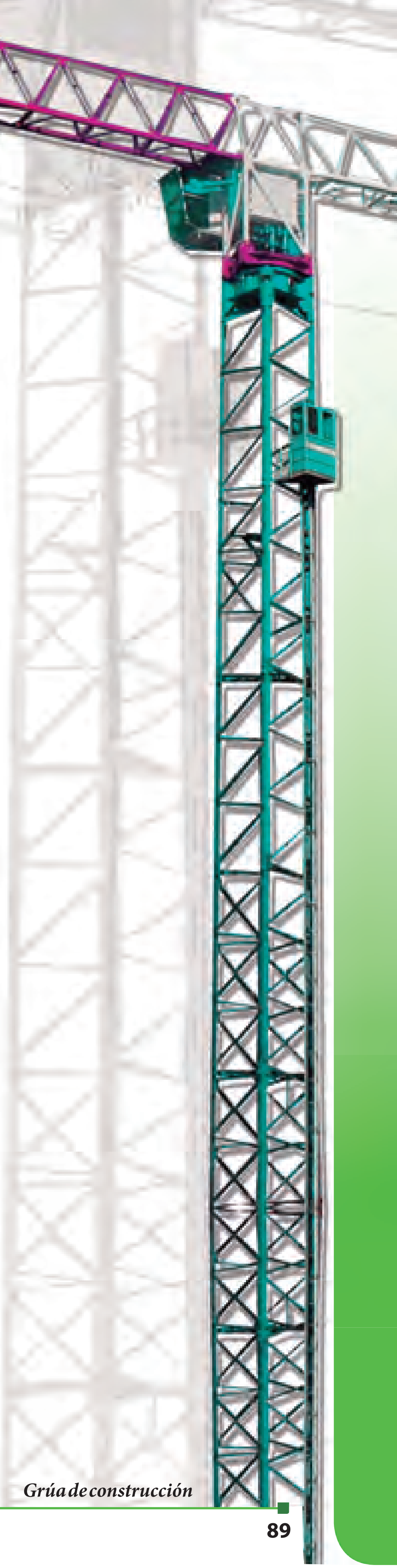


Veremos ahora un último criterio que nos permitirá determinar si dos triángulos son o no congruentes.

Actividad

1 En esta actividad midan los ángulos: $\angle C$ y $\angle D$ del ΔCDE y el lado comprendido entre ellos, ¿pueden indicar cuál es ese lado? Midan ahora y comparen los resultados obtenidos al medir los ángulos correspondientes a C y D en el ΔUVW y el lado comprendido entre estos ángulos.





Grúa de construcción

Si los resultados indican que $\angle C \cong \angle U$, $\angle D \cong \angle V$ y los lados $\overline{CD} \cong \overline{UV}$, entonces podemos afirmar que ambos triángulos son congruentes. Es decir, que:

$$\Delta CDE \cong \Delta UVW$$

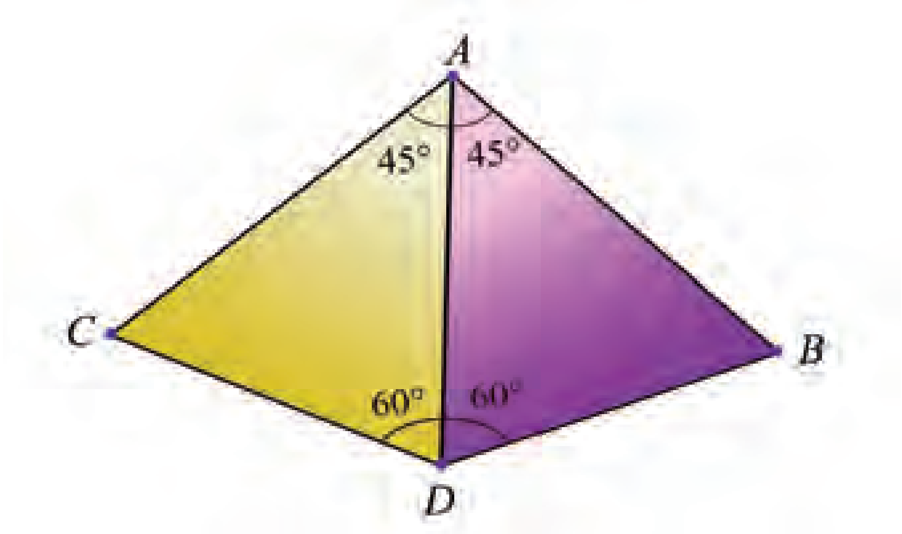
Por tanto, podemos afirmar que :

Dos triángulos son congruentes si y solo si, dos ángulos del primer tríangulo y el lado comprendido entre ellos, son congruentes con los ángulos correspondientes del segundo tríangulo y el lado correspondiente entre ellos.

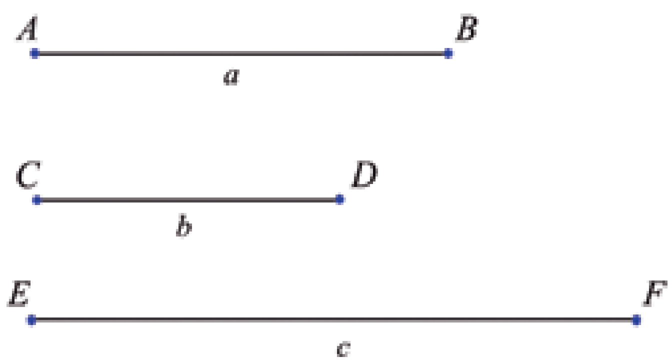
Esta condición se denomina **criterio *ALA*** (ángulo, lado, ángulo).

Resolvamos problemas

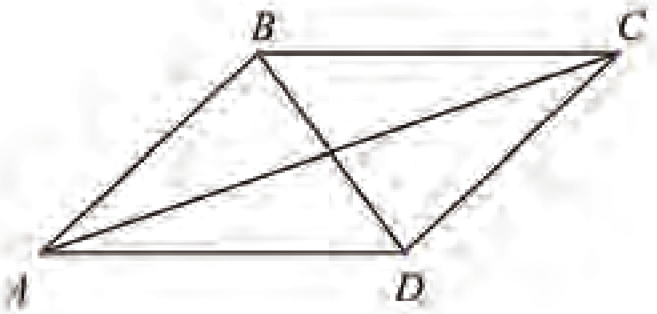
2 Explica cuáles triángulos de la figura son congruentes, haciendo uso del criterio *ALA*.



3 De ser posible, construyan un triángulo que tenga como lados los tres segmentos que se muestran a continuación. Si no es posible, expliquen el por qué.



4. Sea el paralelogramo $ABCD$:



Utiliza los criterios de congruencia de triángulos para justificar las siguientes afirmaciones:

- $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$. Es decir, los ángulos opuestos del paralelogramo son congruentes.
- $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Es decir, los lados opuestos del paralelogramo son congruentes.

5. ¿Es posible construir dos triángulos cuyos lados correspondientes midan $40°$, $65°$ y $75°$, y que no sean congruntes? Expliquen su respuesta mediante un ejemplo gráfico.

Una vida en mi vientre

Un problema nacional

Aquellos embarazos ocurridos a edades menores a 18 años se denominan embarazos adolescentes, e incluso, infantiles. Nuestro país tiene un índice alto en esta materia, de hecho, es uno de los más altos de Latinoamérica y el Caribe, constituyéndose así en un factor importante que incide en aspectos demográficos, alimentarios-nutricionales, laborales-productivos, educativos-culturales, en coeficientes como el Gini (una medida de desigualdad económica basada en el ingreso per cápita en el hogar), en la vivienda de la población venezolana y en la maternidad sin la presencia del padre biológico.

Ahora bien, ¿qué fuentes podemos consultar para obtener datos sobre este tema? Ciertamente, las prefecturas locales, los centros de salud, las referencias bibliográficas especializadas (libros y revistas), las reseñas en prensa y las estadísticas nacionales son algunas de ellas.

Es de hacer notar que no pocas referencias disponibles en internet, tanto en ciertos medios de información digital como en páginas de algunas organizaciones no gubernamentales vinculadas con el tema, no citan las fuentes de los datos numéricos y no numéricos (cualitativos) que exponen. Este tipo de fuentes carecen de valor para un estudio de la Matemática que se encuentra en este problema real. Para esta lección nos apoyamos en los datos que al respecto publicó el Instituto Nacional de Estadísticas (*www.ine.gob.ve*), en especial, los datos sobre el número de nacimientos con buen término en madres de menos de 15 años. Veamos la tabla que sigue:

Sexo del niño y año de registro	Total	Grupos de edad de la madre									
		Menos de 15	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	35 - 39	45 - 49	50 y más	No declarado
TOTAL											
2003	555.614	6.005	114.216	164.813	124.857	82.576	41.861	12.235	1.693	431	6.927
2004	637.799	7.332	131.104	183.483	136.604	87.541	44.294	13.270	1.770	404	31.997
2005	665.997	7.459	142.634	198.544	149.549	94.455	47.931	14.227	1.936	255	9.007
2006	646.225	7.707	139.254	190.038	145.261	90.409	45.710	12.908	1.635	388	12.915
2007	615.371	7.402	133.508	182.051	140.049	87.546	43.865	12.225	1.457	463	6.805
2008	581.480	6.988	126.671	168.556	133.639	84.255	41.538	11.471	1.438	445	6.479
2009	593.845	7.737	130.976	171.738	136.607	87.326	42.367	11.257	1.305	367	4.165
Hombres											
2003	287.634	3.068	59.168	85.394	64.684	42.769	21.573	6.301	856	226	3.595
2004	327.726	3.867	67.561	94.557	70.143	45.124	22.797	6.834	895	211	15.737
2005	343.410	3.824	73.756	102.336	76.873	48.689	24.606	7.370	958	131	4.867
2006	332.785	3.977	71.962	97.904	74.873	46.275	23.378	6.711	891	195	6.619
2007	316.636	3.838	68.656	93.787	72.079	45.200	22.372	6.245	732	208	3.509
2008	292.107	3.525	63.600	84.880	67.058	42.179	20.981	5.744	714	192	3.234
2009	305.015	3.984	67.315	88.319	70.055	44.671	21.747	5.777	680	177	2.290
Mujeres											
2003	267.980	2.937	55.048	79.419	60.173	39.807	20.288	5.934	837	205	3.332
2004	310.073	3.465	63.543	88.926	66.461	42.417	21.497	6.436	875	193	16.260
2005	322.587	3.635	68.878	96.208	72.676	45.766	23.325	6.857	978	124	4.140
2006	313.440	3.730	67.292	92.134	70.388	44.134	22.332	6.197	744	193	6.296
2007	298.735	3.564	64.842	88.264	67.970	42.346	21.493	5.980	725	255	3.296
2008	289.373	3.463	63.071	83.676	66.581	42.076	20.557	5.727	724	253	3.245
2009	288.830	3.753	63.661	83.419	66.552	42.655	20.620	5.480	625	190	1.875

Número de nacimientos vivos por género del niña/niño, año y edad de la madre.
Fuente: www.ine.gob.ve

Observemos que la tabla nos muestra el total de niñas y niños nacidos y nacidas entre 2003 y 2009 en Venezuela, y además se discrimina este número de acuerdo con la edad de la madre. En las filas siguientes se exponen los datos atendiendo al género (indicado en la tabla como "hombre" y "mujer"). Es de nuestro interés, entonces, la columna correspondiente a:

Menos de 15

Antes de proseguir recomendamos que socialicen con sus compañeras y compañeros de clase:

- ¿Qué representan los datos de la última columna?
- ¿Estos valores afectan los de las demás columnas?
- Si es así, ¿de qué manera lo hacen?
- ¿Qué porcentaje del total de nacimientos por año se asocia a cada uno de estos valores?

Trabajando con los datos

Consideremos al grupo de las madres menores a 15 años. Partiendo de la tabla podemos construir un **gráfico de dispersión**, es decir, un gráfico que nos muestre los puntos que corresponden a estos datos. Cada punto estará dado por dos **coordenadas:** una para el año y otra para el número de nacimientos en madres menores a 15 años. ¿Cuáles son? Veamos:

(años , datos)
(2003 , 6.005)
(2004 , 7.332)
(2005 , 7.459)
(2006 , 7.707)
(2007 , 7.402)
(2008 , 6.988)
(2009 , 7.737)

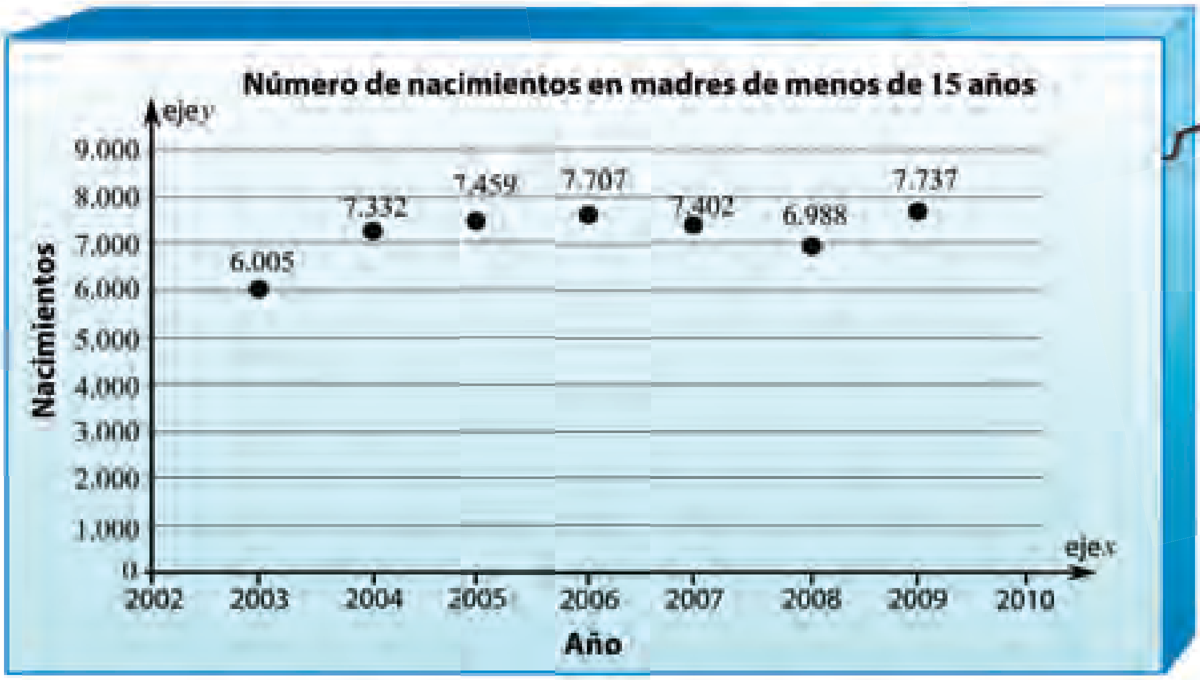
La coma solo indica que a su izquierda se encuentra la primera coordenada y a su derecha la segunda coordenada del punto. Los paréntesis son una manera de agrupar estas coordenadas. Construyamos el gráfico:

¿Cómo hacemos las marcas en los ejes vertical y horizontal? (ver el gráfico adjunto): fijémonos en que el dato mínimo en el período 2003-2009, que simplemente llamaremos mínimo, es 6.005 (para el año 2003) y el máximo es 7.737 (alcanzado en 2009). Con esto sabemos que debemos hacer marcas en el eje vertical que alcance, al menos, el valor 8.000. Nosotros hemos hecho marcas para las unidades de mil. Y como el período que consideramos abarca desde 2003 hasta 2009, entonces disponemos marcas para cada uno de estos años en el eje horizontal.

Representamos cada uno de los puntos (atendiendo a sus coordenadas).

Ahora, les sugerimos representar otros puntos en el plano a manera de ensayo. Para ello les sugerimos utilizar papel milimetrado y una regla.

Hagan todas las preguntas que consideren a sus compañeras, compañeros y docente hasta que manejen a la perfección la representación de puntos en el plano.

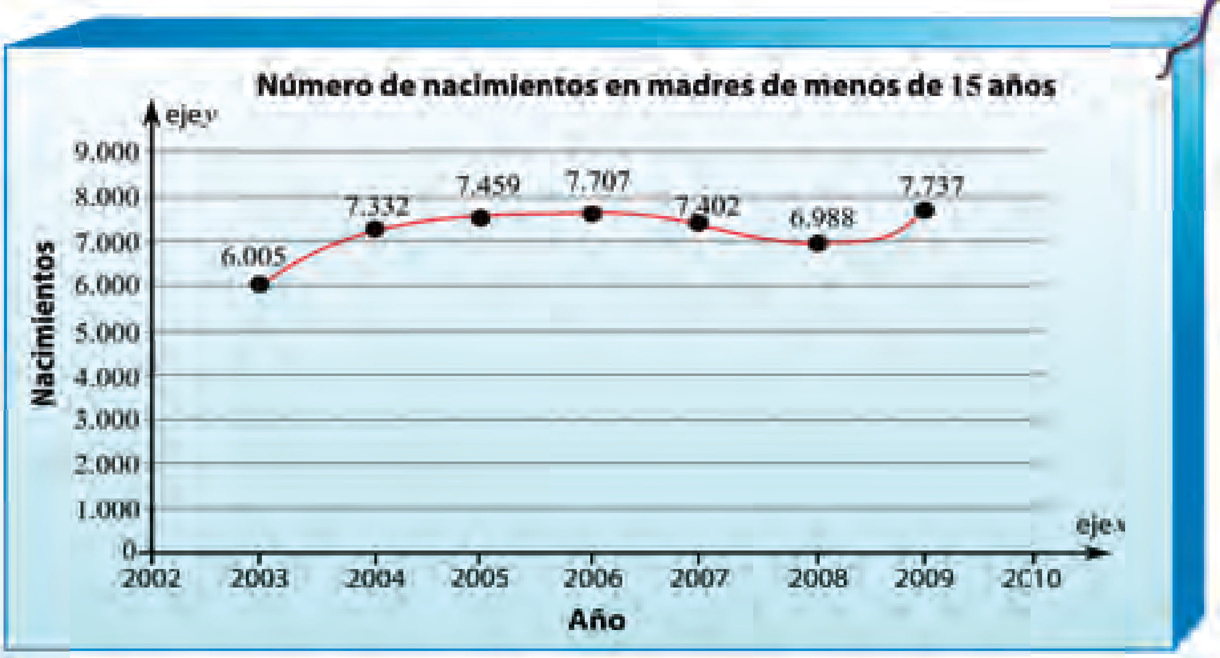


Ahora bien, observemos que entre 2003 y 2006 los nacimientos son 6.005, 7.332, 7.459 y 7707. Y como:

$$6.005 < 7.332 < 7.459 < 7.707$$

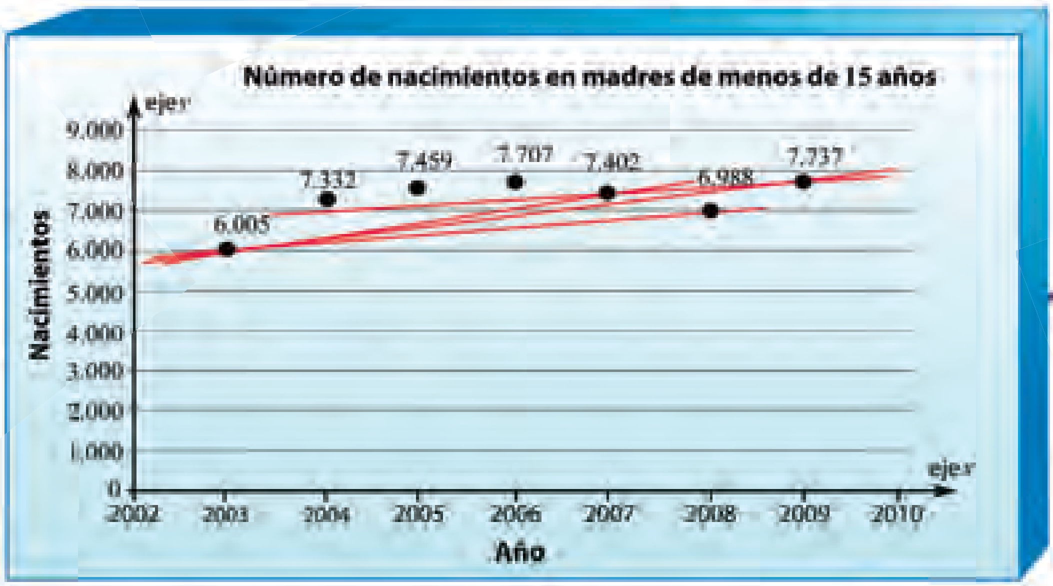
Entonces este comportamiento es **creciente** (es decir, aumenta en ese intervalo de tiempo).

Pero en 2007 y 2008 esta cifra disminuye, llegando a 6.988, y por último crece nuevamente. Una de las curvas que describe (se aproxima a) este comportamiento es la que se tiene a continuación (ver el gráfico adjunto). Aunque también podemos pensar en mostrar este comportamiento a través de una recta, pues estos datos se prestan a ello, como veremos en la sección que sigue.



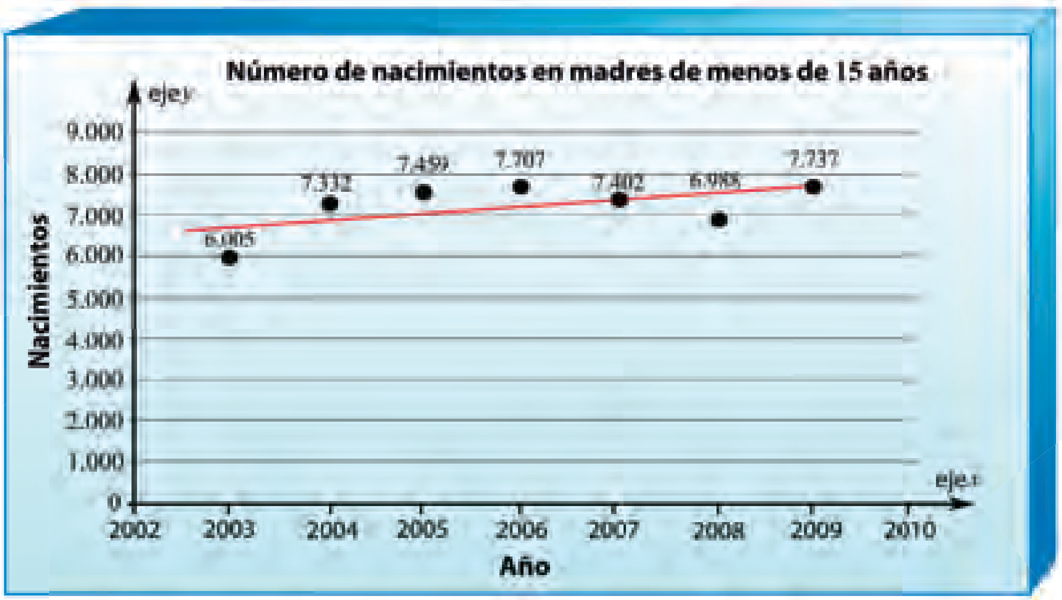
Ajustando rectas

Para estos datos existen varias rectas que se aproximan a los datos. Veamos:



Naturalmente, no todas dan el mismo grado de aproximación. Siempre existirá alguna que da la mejor aproximación posible al comportamiento de los datos que hemos tomado. ¿Cuál de ellas tiene mayor crecimiento? ¿Y el menor? Les dejamos la actividad de representar otras rectas que no se ajusten al comportamiento dado y de responder: ¿por qué no lo hacen? Socialicen esta idea con sus compañeras y compañeros de clase.

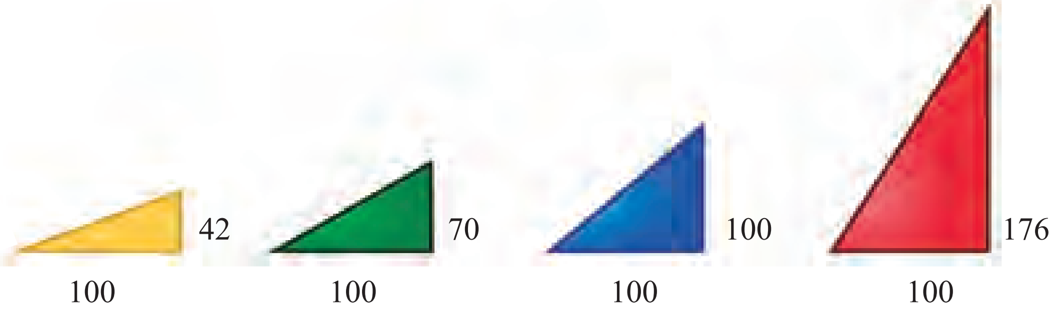
Aquí tomaremos una de tales rectas: justo la que pasa por los puntos (2007 , 7.402) y (2009 , 7.737).



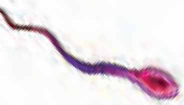
Hasta ahora hemos representado puntos en el plano, correspondientes a los datos sobre el número de nacimientos con buen término en madres de menos de 15 años, y además ajustamos rectas a tal comportamiento. En lo que sigue estudiaremos la idea de "inclinación" (o pendiente) de una recta.

Pendiente de una recta

Cualquier recta puede describirse exponiendo dos de sus puntos, tal como hemos hecho; pero ahora iremos un poco más allá, pensaremos en cuál es su **pendiente.** Para ello consideremos una situación que se presenta a menudo en nuestra cotidianidad. Como sabemos, la **pendiente** de una rampa, o bien, de una calle, facilita o no que subamos por ella sin tanto esfuerzo físico. Veamos los casos siguientes, a manera de ejemplo:



Las medidas representan *cm*. En todos los casos expuestos el segmento horizontal es perpendicular al segmento vertical. Se advierte de inmediato que la rampa que será más fácil de subir es la primera de la izquierda, aquella cuya altura es 42 *cm*. De allí en adelante, la dificultad para subir va en aumento. Pero esta relación la reflejan los cocientes que resultan de dividir la altura entre la medida de la proyección de la rampa sobre una horizontal imaginaria:

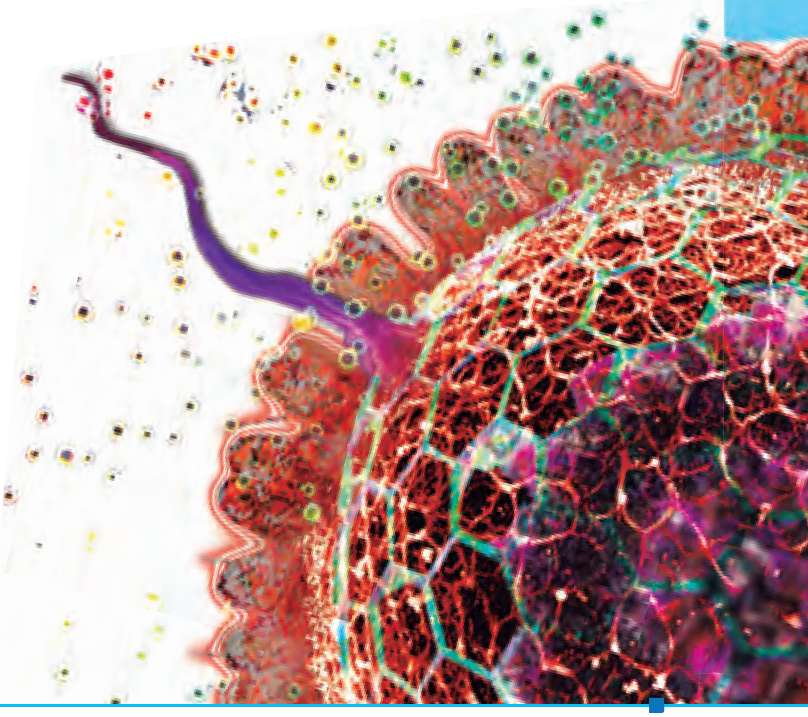


$$\frac{42}{100} = 0,42$$

$$\frac{70}{100} = 0,7$$

$$\frac{100}{100} = 1$$

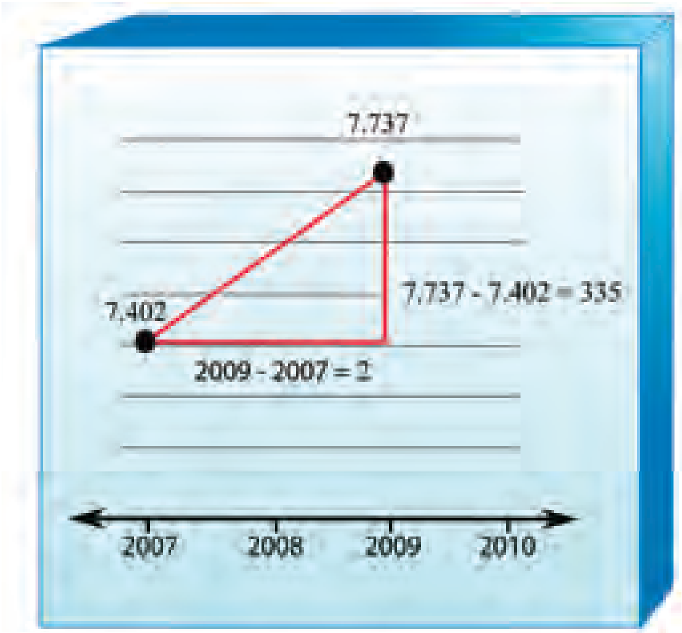
$$\frac{176}{100} = 1,76$$



Observemos que a menor pendiente resultará más cómodo subir por la rampa (o calle):

$$0,42 < 0,7 < 1 < 1,76$$

Con estas ideas ya podemos calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2007 , 7.402) y (2009 , 7.737). (Observen el gráfico adjunto).



- Para ello hemos trazado una horizontal imaginaria que pasa por el punto (2007 , 7.402).
- Una vertical que pasa por el punto (2009 , 7.737).

Los puntos dados junto con el punto donde se intersecan estas rectas que acabamos de trazar determinan un triángulo en el que uno de sus lados es perpendicular al otro. Justo lo que necesitábamos para calcular la pendiente de la recta dada. La cual se obtiene con el cociente:

$$\frac{7.737-7.402}{2009-2007}=\frac{335}{2}=167,5$$

En resumen, de la recta seleccionada, una de las que se ajusta al comportamiento del número de nacimientos en madres menores a 15 años en nuestro país, sabemos que:

- Pasa por los puntos (2007 , 7.402) y (2009 , 7.737).
- Tiene pendiente igual a 167,5.

¿Qué significa la pendiente en nuestro problema? Con ella podemos hacer **predicciones,** naturalmente con cierto margen de error, del número de nacimientos en madres menores de 15 años para los años siguientes. Una pendiente de 167,5 nos informa que cada año se incrementa en 167,5 el número de tales nacimientos. En efecto:

$$7.402+167,5=7.569,5$$
$$7.569,5+167,5=7.737$$

Este último número es el dato que tenemos para 2009. Así, para 2010, 2011, 2012 y 2013 se proyectan:

$$7.737+167,5=7.904,5$$
$$7.904,5+167,5=8.072$$
$$8.072+167,5=8.239,5$$
$$8.239,5+167,5=8.407$$

Es decir, entre 2010 y 2013, para esos cuatro años, se proyectan, según el modelo de recta que hemos seguido, 32.623 **nuevos nacimientos:** ¡treinta y dos mil nacimientos en madres con menos de 15 años! He allí la relevancia del problema que comentamos al comienzo de esta lección. La Matemática como hemos advertido nos da una mirada profunda de tal tipo de problemas.

Lo cual puede compararse con las informaciones oficiales, por ejemplo, las del censo venezolano de 2011. En lo que hemos hecho, el número de nacimientos en madres con menos de 15 años es una variable que está en función de la variable tiempo.

El concepto de función lineal

Las ideas que trabajamos se basan en el siguiente concepto:

Una **función lineal** f de un conjunto A en un conjunto B:

- Es una relación que hace corresponder cada elemento x del conjunto A con un elemento $f(x)$ del conjunto B.
- Esta relación es de la forma $f(x) = ax + b$.

En nuestro caso, la variable "el número de nacimientos vivos en madres de menos de 15 años" está en función del año, es decir, depende del año.

Hay varias observaciones que haremos. *Sobre la primera condición:* es claro que los conjuntos A y B deben tener elementos, es decir, deben ser no vacíos. Por otra parte, si al elemento x en el conjunto A la función f le hace corresponder el elemento $f(x)$ en B, entonces ese x no está asociado a ningún otro elemento de B. *Sobre las condiciones segunda y tecera:* **toda función de forma $f(x) = ax + b$ se dice lineal siempre que $a \neq 0$. Lo que significa que los puntos de su gráfica están alineados**, de allí su nombre, como las que hemos considerado en el ajuste para los datos sobre el número de nacimientos en madres menores a 15 años.

Veamos todo esto con un ejemplo:

Sea f una función del conjunto $\mathbb{Z}$ en el mismo conjunto $\mathbb{Z}$ (el conjunto de los números enteros) dada por la regla o relación:

$$f(x) = 3x + 1$$

Construyamos su gráfica. Para ello necesitamos elaborar una tabla de valores. Si bien bastan dos puntos para determinar una recta, haremos una lista más amplia de puntos para visualizar que todos ellos se encuentran alineados. Así,

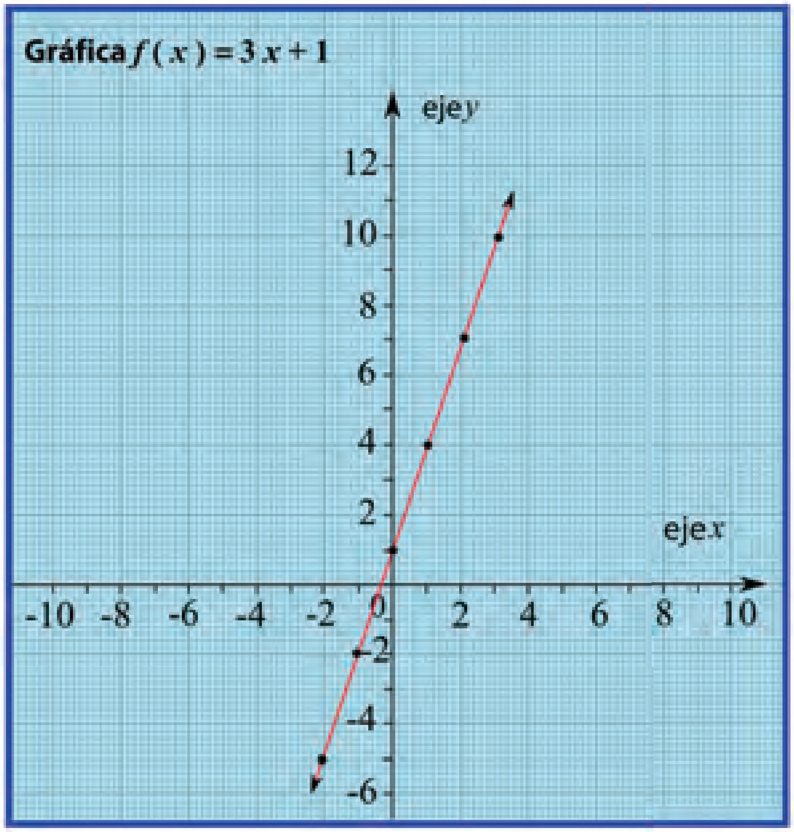
x	$f(x)=3x+1$	Punto a graficar
-2	$f(-2)=3(-2)+1=-6+1=-5$	$(-2,-5)$
-1	$f(-1)=3(-1)+1=-3+1=-2$	$(-1,-2)$
0	$f(0)=3(0)+1=0+1=1$	$(0,1)$
1	$f(1)=3(1)+1=3+1=4$	$(1,4)$
2	$f(2)=3(2)+1=6+1=7$	$(2,7)$
3	$f(3)=3(3)+1=9+1=10$	$(3,10)$

Por tanto, el gráfico es el que sigue.

Como habíamos comentado, los puntos están alineados. Es importante señalar que se han expuesto cálculos para algunos valores de $\mathbb{Z}$, desde -2 hasta 3, y no para todos los elementos de $\mathbb{Z}$, de hecho son infinitos. Pero los que se han representado son suficientes para observar el comportamiento lineal de la función dada por la regla $f(x)=3x+1$.

Fijémonos en que:

- Si trazamos una recta que pase por dos de tales puntos, esta recta también pasará por todos los demás puntos. Es decir, **todos los puntos están alineados.**
- Como, $-5<-2<1<4<7<10$ entonces una inferencia fuerte es que la función es **creciente**. Lo cual se ve en el gráfico adjunto.
- Y más interesante aún: ¿cuál es la **pendiente** de recta que pasa por estos puntos? Con lo que socializamos acerca de la pendiente de las rampas o calles, se advierte que debemos escoger dos puntos cualesquiera. Por ejemplo $(0,1)$ y $(1,4)$:



Entonces, la pendiente o inclinación de tal recta es:

$$\frac{4-1}{1-0}=\frac{3}{1}=3$$

Observen que:

$$\begin{aligned} -5+3&=-2\\ -2+3&=1\\ 1+3&=4\\ 4+3&=7\\ 7+3&=10 \end{aligned}$$

Y estos resultados son precisamente las segundas coordenadas de los puntos de la tabla y del gráfico.

Así, es fácil ver que para 4, $f(4)=13$ (sólo sumamos $10+3$).

El gráfico también nos informa que el corte de la recta con el eje vertical se da en 1. Y el 1 está justo en la regla que define a la función de nuestro ejemplo:

$$f(x)=\overset{\textit{pendiente}}{\overset{\downarrow}{3}}x+\underset{\textit{corte con el eje } y}{\underset{\uparrow}{1}}$$

Con base en nuestra discusión podemos definir la pendiente de una recta:

Si $(x\,,y)$ y $(j\,,k)$ son dos puntos de una recta, entonces la **pendiente** de tal recta está dada por la ecuación $\dfrac{k-y}{j-x}$.

Escojan dos puntos del primer gráfico y calculen la pendiente de la recta que pasa por ellos.

Dada la siguiente gráfica.

Si deseamos saber qué función la genera debemos escoger dos puntos cualesquiera, por ejemplo (2, 2) y (4, 3). En este caso $(x, y) = (2, 2)$ y $(j, k) = (4, 3)$. Entonces la pendiente m de la recta viene dada por:

$$m = \frac{k-y}{j-x}$$

es decir,

$$m = \frac{k-y}{j-x} = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte, la expresión $m = \frac{k-y}{j-x}$ puede ser reescrita como:

$$m(j-x) = k-y$$

Y ésta a su vez como:

$$y = mx - mj + k$$

y sacando factor común m, la expresión queda:

$$y = mx - (mj - k)$$

Como sabemos que:

$$y = f(x)$$

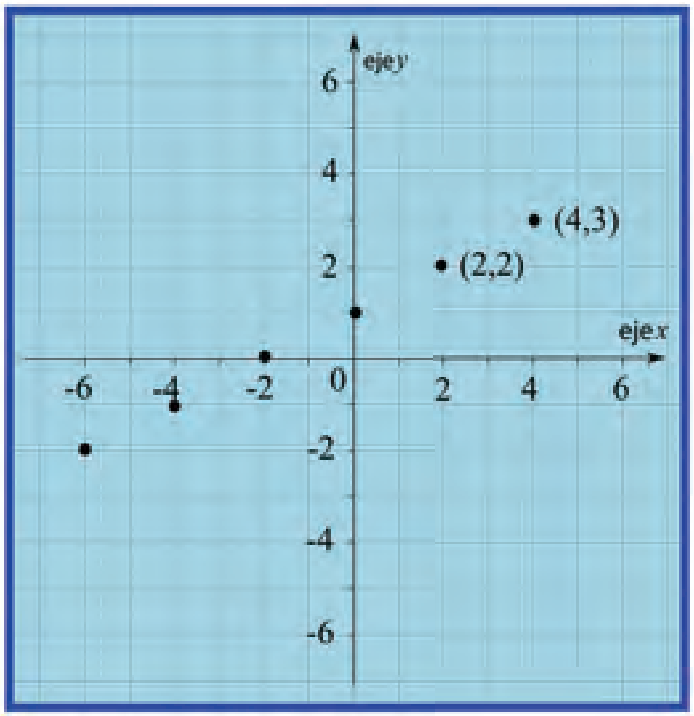
entonces se obtiene que:

$$f(x) = mx - (mj - k)$$

Que en nuestro caso es:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 3\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$



Investiguemos

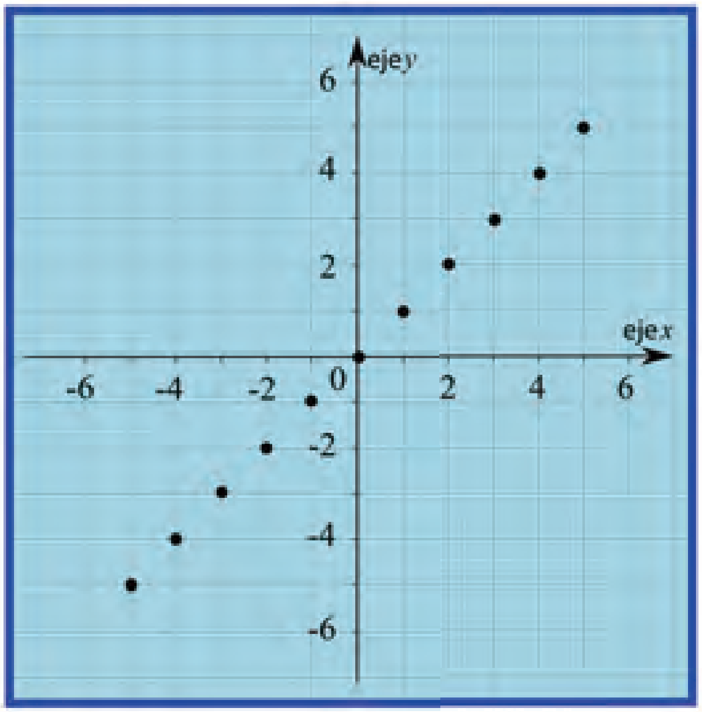
1 Construyan las gráficas de las siguientes funciones definidas de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

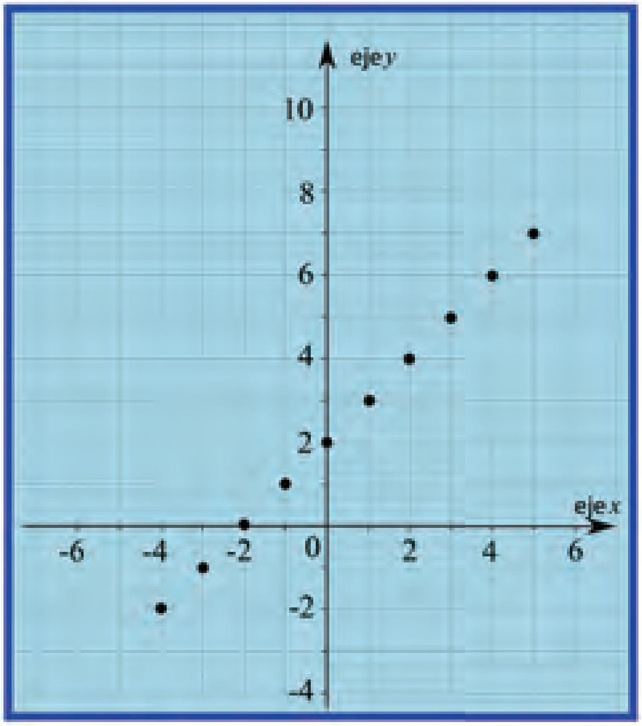
$$f(x) = -x$$
$$f(x) = -2x$$
$$f(x) = -3x$$
$$f(x) = 1$$

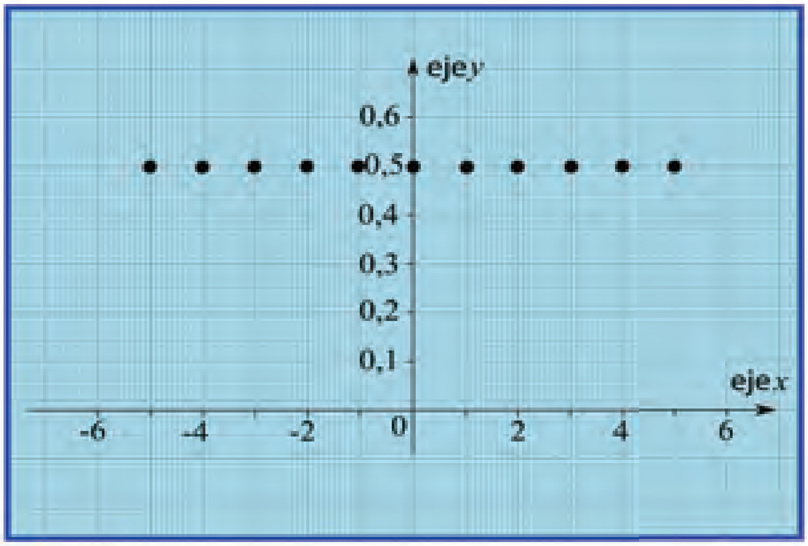
2 ¿Cuál es la pendiente de la recta en cada caso? ¿Qué inferencia pueden hacer? Respondan las mismas preguntas, pero ahora considerando las funciones.

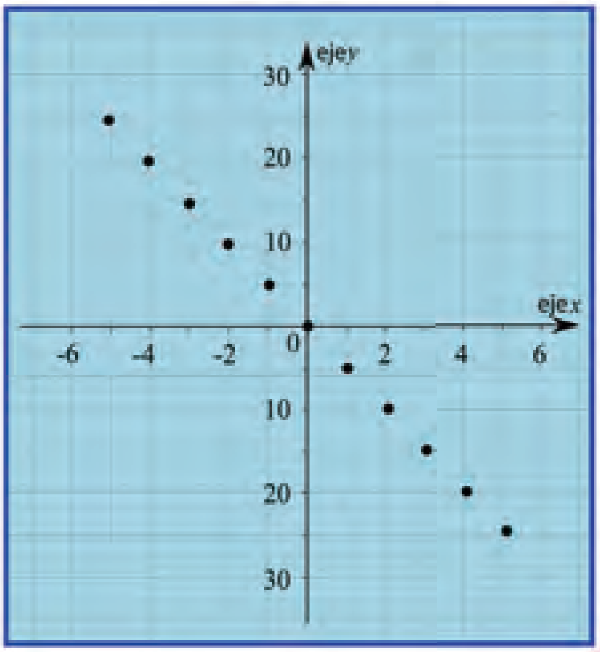
$$f(x) = x + 1$$
$$f(x) = 3x + 2$$
$$f(x) = 3x - 1$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}$$

3 Observen las siguientes gráficas:





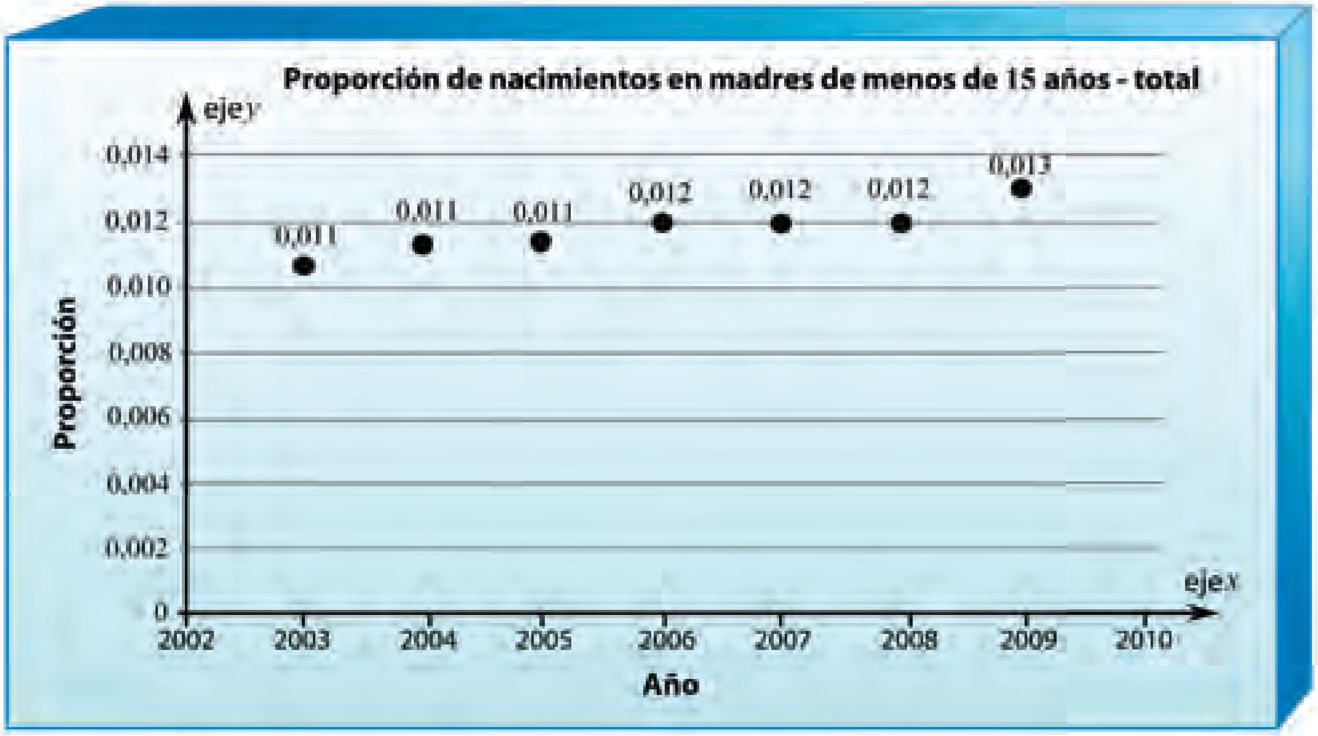

eje y
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
eje x
-6
-4
-2
0
2
4
6


eje y
30
20
10
eje x
-6
-4
-2
0
2
4
6
10
20
30

4) Deduzcan cuáles son las funciones que las generan, ¿son crecientes, decrecientes o constantes? Consideren ahora las rectas que pasan por estos puntos y describan cuál es su pendiente.

5) El siguiente gráfico se basa también en los datos sobre el número de nacimientos en madres de menos de 15 años, justo el problema que abordamos en esta lección. Pero ahora hemos calculado la **proporción** de cada uno de estos valores con respecto al total en cada año. Les pedimos que socialicen con sus compañeras y compañeros y con su docente:

- ¿Cómo calcular estas proporciones?
- ¿Cuál es el significado de estas proporciones?
- ¿Cuáles son algunas de las rectas que se ajustan al comportamiento de estos datos? Analicen esto y comparen con los resultados previos.



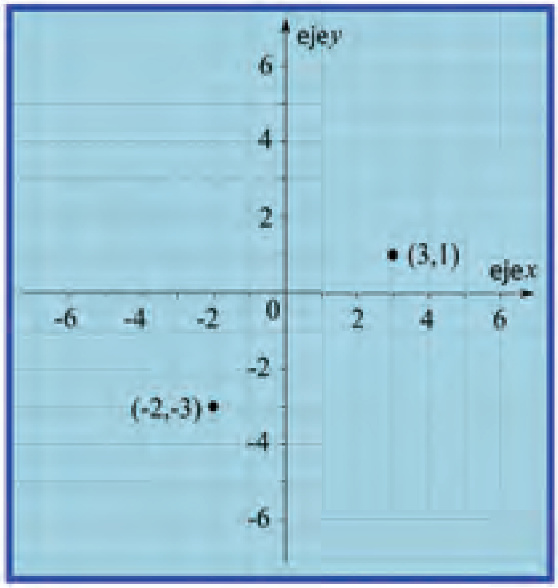
5) Les proponemos investigar el número de embarazos adolescentes en sus localidades (parroquia o municipio, por ejemplo). ¿Qué fuentes de información deben consultar? Debatan esto con sus compañeras y compañeros, familiares, vecinas y vecinos. Construyan un gráfico de dispersión para estos datos en el período que seleccionen para la investigación y observen si tal comportamiento es lineal. En ese caso deben trazar una recta que se aproxime a estos puntos. Tal comportamiento, ¿es creciente, decreciente o constante?

6) Emprendan un proyecto similar pero ahora con los datos de varios países de Latinoamérica y el Caribe. Socialicen cómo presentar estos datos en un mismo gráfico. ¿Son lineales estos comportamientos o no?

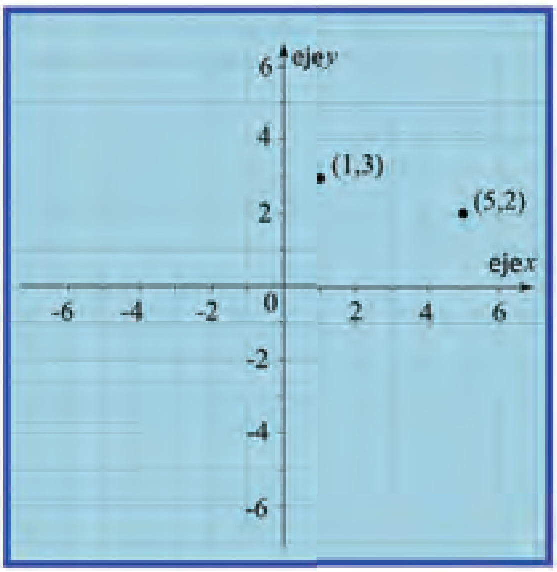
7) Compartan con todo el grupo qué actividades podrían desarrollar para alertar a sus compañeras, compañeros y comunidad sobre el problema del embarazo a temprana edad. En esta tarea, las **funciones**, la idea de **pendiente de una recta**, y los conceptos de **función creciente**, **decreciente** o **constante** pueden jugar un papel importante. Y desarrollen junto con ellos las que resulten viables.

8) ¿Todos los fenómenos tendrán un comportamiento lineal? Argumenten, den ejemplos y debatan su respuesta con compañeras, compañeros y familiares. Socialicen en clase sobre estas ideas.

9) Calculen la ecuación de la recta que pasa por $(3,1)$ y $(-2,-3)$. ¿Es $f(x)$ creciente?



10) Calculen la ecuación de la recta que pasa por $(1, 3)$ y $(5, 2)$. ¿Es $f(x)$ decreciente?



10. Respondan cada una de las siguientes preguntas:

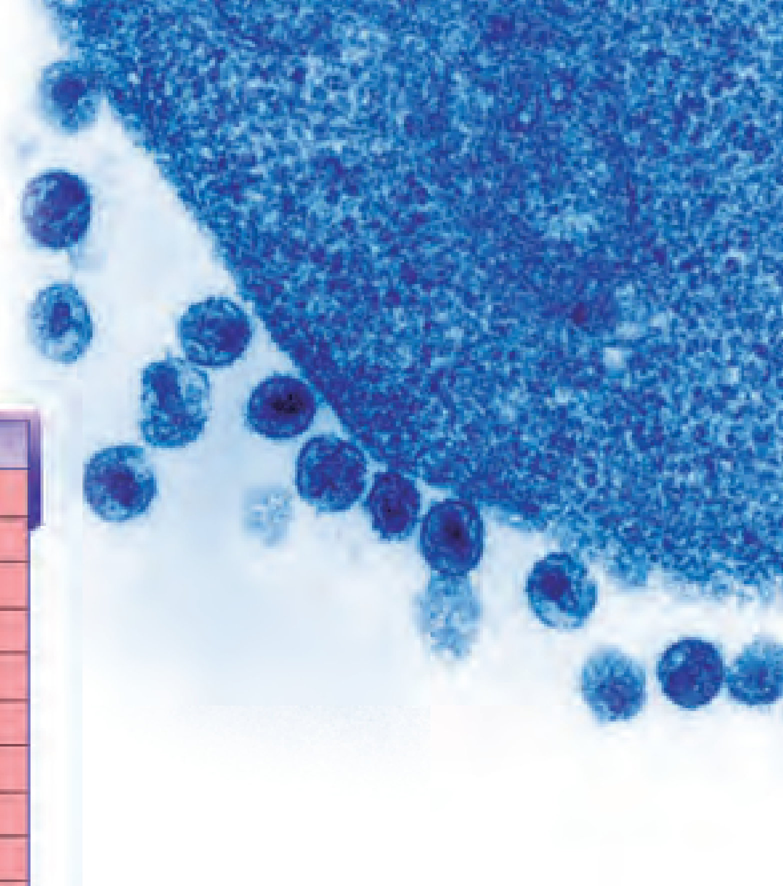
- Si la pendiente m de una recta es positiva. ¿Cómo es $f(x)$?
- Si la pendiente de una recta es negativa. ¿Cómo es $f(x)$?
- Si la pendiente de una recta es constante. ¿Cómo es $f(x)$?
- Si una función lineal $f(x)$ es creciente. ¿Cómo es su pendiente?
- Si una función lineal $f(x)$ es decreciente. ¿Cómo es su pendiente?
- Si una función lineal $f(x)$ es constante. ¿Cómo es su pendiente?

VIH: un problema de salud

6

El contagio del virus VIH en Latinoamérica

Uno de los problemas de salud de mayor impacto en los últimos treinta años ha sido y es el del contagio del virus VIH (Virus de Inmunodeficiencia Humana), justo el causante del SIDA (Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida). Como saben, VIH y SIDA son cosas distintas; a ambos se les vincula, por ejemplo, con la educación y responsabilidad sexual por parte de la familia y en medios como la televisión, con los valores y antivalores (consumo de drogas, promiscuidad, entre otros), así como con las políticas de salud por parte del Estado. Además, las personas con VIH, o SIDA, merecen nuestro respeto al igual que cualquier otra persona. Aún cuando las estadísticas sobre los contagios por VIH son importantes, resulta difícil obtener datos precisos, pues representa un virus que puede ser asintomático durante cierto tiempo y no todos los casos son reportados a los organismos de salud. Acá hemos tomado datos de la ONU/SIDA sobre el número estimado de personas con VIH en 17 países de Latinoamérica entre 1990 y 2008. Los datos se presentan en la tabla a continuación:



Organización tabular

Número estimado de personas con VIH en 17 países de Latinoamérica entre 1990 y 2008.

	Año	Número
0	1990	710,000
1	1992	820.000
2	1994	950.000
3	1996	1,000,000
4	1998	1.200.000
5	2000	1,300,000
6	2002	1.300.000
7	2004	1,400,000
8	2006	1.400.000
9	2008	1,600,000

Datos estimados con base en: ONU-SIDA Latina

Antes de seguir,

Debatan con sus compañeras y compañeros qué otras fuentes de información podemos consultar.

¡Ah! y un detalle: escriban la expresión decimal de 1 nanómetro.

En un lapso de 10 años, en estos países latinoamericanos se sobrepasó el doble de personas con VIH, pasando de 710.000 (setecientas diez mil) en el año 1990 a 1.600.000 (un millón seiscientas mil) en 2008. Ciertamente muchas otras infecciones virales tienen un crecimiento mucho mayor (tal es el caso de la gripe), pero muchas de éstas tienen un efecto en la salud mucho más bajo, e incluso, mecanismos de control.

Observen que:

Identificamos cada año con un número del 0 al 9.

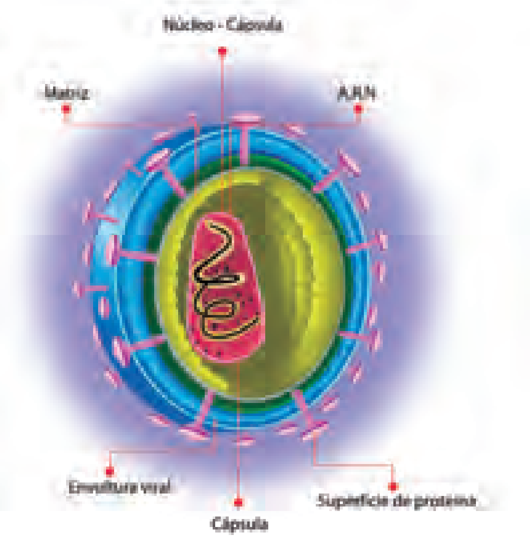
Los datos sobre el número de personas con VIH constituyen una variable que está en "función" del año.

Es decir,

La variable "número de personas con VIH" depende del año.

Recuerden que en la lección “una vida en mi vientre”, la variable “el número de nacimientos vivos en madres con menos de 15 años” estaba en función del año.

	Año	Número	Diferencia
0	1990	710.000	—
1	1992	820.000	110.000
2	1994	950.000	130.000
3	1996	1.000.000	50.000
4	1998	1.200.000	200.000
5	2000	1.300.000	100.000
6	2002	1.300.000	0
7	2004	1.400.000	100.000
8	2006	1.400.000	0
9	2008	1.600.000	200.000
x		y	



Diferencias entre el número de personas con VIH

Las diferencias entre el número estimado de personas con VIH cada dos años (ver la tabla) nos dan ideas de cómo ha sido este crecimiento.

- ¿Entre qué años no hubo aumento del número de personas con VIH?
- ¿Entre qué años el crecimiento es mayor?

Tal como hemos hecho en otras lecciones, representaremos estos datos con la intención de dar una idea gráfica de este crecimiento.

La organización tabular y la representación gráfica son complementos importantes para la interpretación de los datos de cierto fenómeno o problema.

Representación gráfica

De la tabla tomamos los puntos dados por las coordenadas “identificación del año” y “número estimado”. Es decir,

$(0, 710.000)$ $(2, 950.000)$ $(4, 1.200.000)$ $(6, 1.300.000)$ $(8, 1.400.000)$

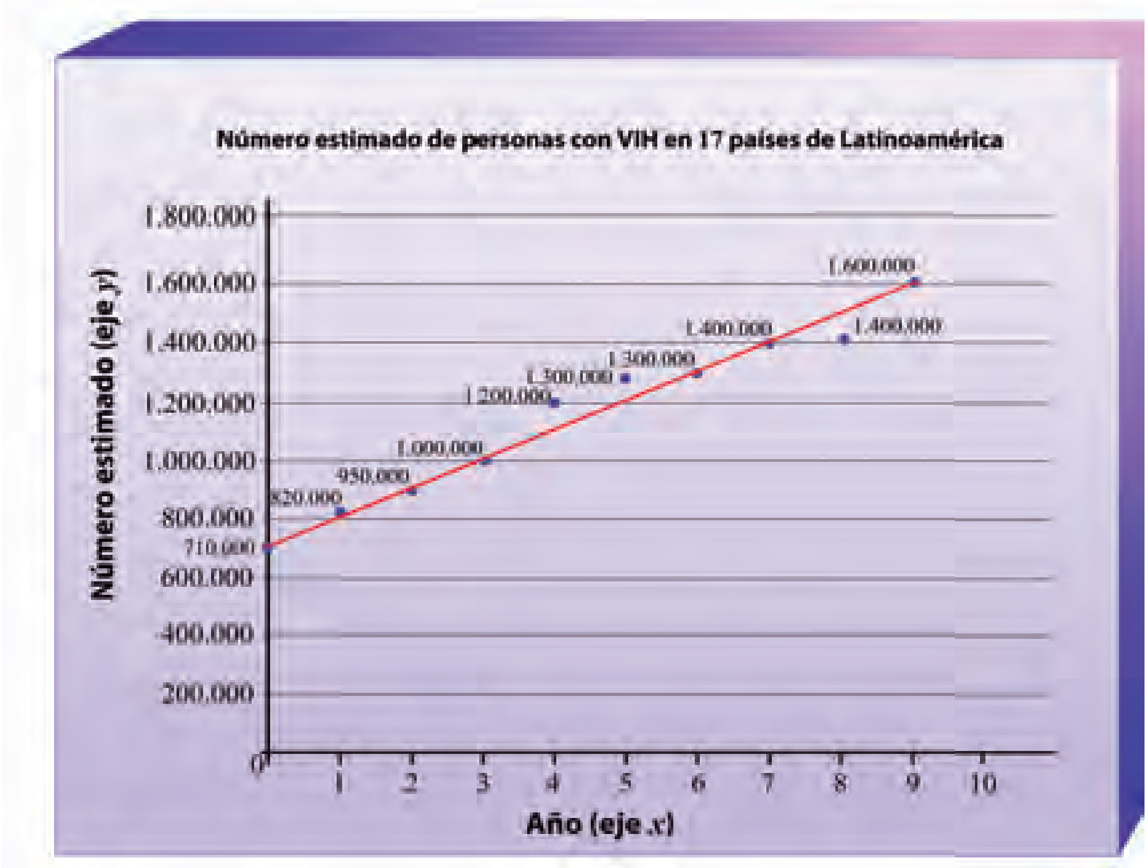
$(1, 820.000)$ $(3, 1.000.000)$ $(5, 1.300.000)$ $(7, 1.400.000)$ $(9, 1.600.000)$

Recordemos aquí que $(0\ ,\ 710.000)$, representa el punto de coordenadas 0 (que identifica al año 1990) y 710.000 (número estimado). Y así con cada uno de los demás puntos.

Para construir el gráfico debemos:

Hacer marcas para los valores de cada eje (como identificamos los años con números del 0 al 9, hicimos estas marcas en el eje x. Y como el mínimo que alcanza y es 710.000 y el máximo es $1.600.000$, hicimos marcas cada dos mil unidades en el eje y, justo así abarcamos todo el **rango** de datos).

Ubiquemos los puntos (con base en sus coordenadas). Luego de esto, tenemos:



Observemos que, considerando que los puntos están cercanos a una recta, trazamos una de las rectas que se aproxima a este comportamiento.

Ya con lo estudiado en la lección anterior, podemos hallar la ecuación de la recta que se aproxima a este comportamiento. La del gráfico adjunto pasa por los puntos:

$$(2\ ,\ 950.000) \text{ y } (9\ ,1.600.000)$$

Y con lo que sabemos sobre la pendiente, podemos calcularla así:

$$\frac{1.600.000 - 950.000}{9-2} = \frac{650.000}{7} \approx 92857{,}1$$

Recuerden que la pendiente de una recta que pasa por los puntos de coordenadas $(x\,,\,y)$ y $(j\,,\,k)$ está dada por la ecuación $m = \dfrac{k-y}{j-x}$.

De esta recta también sabemos que "corta" al eje y en el punto $(0\,,\,710.000)$.

Con todo lo anterior esta función lineal, que sabemos tiene la forma $f(x) = ax + b$, se escribe simbólicamente así:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{pendiente}}}{f(x) = 92.857{,}1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{corte con el eje } y}}{x + 710.000}$$

Haciendo inferencias

Una inferencia es una manera de predecir qué sucederá sobre cierto fenómeno. En nuestro caso, haremos inferencias sobre el número de casos con VIH en el conjunto de los 17 países de Latinoamérica con base en el modelo que encontramos, es decir, con base en la función polinómica $f(x) = 92.857{,}1 \cdot x + 710.000$

Para ello nos apoyaremos en sustituir un número dado en la variable x y efectuar los cálculos correspondientes.

Veamos un ejemplo. **¿Cuál es el número de casos con VIH para el año 2010 según el modelo $f(x) = 92.857{,}1 \cdot x + 710.000$?**

El año 2010 lo identificamos con $x = 10$ (observen la primera tabla de esta lección). Este número (10) lo sustituiremos en la variable del modelo encontrado, y efectuamos los cálculos:

$$\begin{aligned} f(10) &= 92.857{,}1 \cdot (10) + 710.000 \\ &= 92.8571 + 710.000 \\ &= 1.638.571 \end{aligned}$$

¿Y para 2012?

$$\begin{aligned} f(11) &= 92.857{,}1 \cdot (11) + 710.000 \\ &= 1.021.428{,}1 + 710.000 \\ &= 1.731.428{,}1 \\ &\approx 1.731.428 \end{aligned}$$

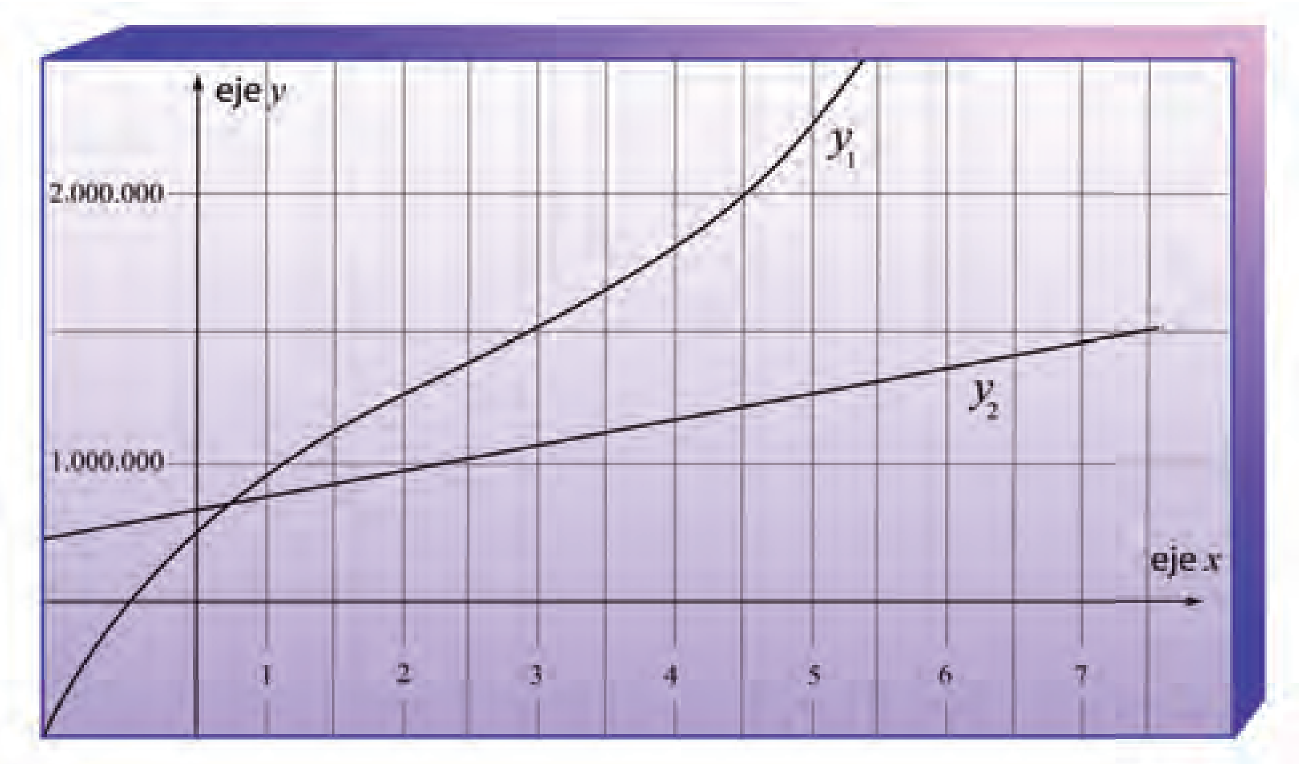
Aproximado al entero más cercano

Con este modelo se estima un millón setecientos treinta y un mil cuatrocientos veintiocho de personas con VIH para el año 2012. Números que reflejan la importancia del tema abordado en el contexto latinoamericano, y en especial en Venezuela. El modelo que hemos encontrado desde las matemáticas debe impulsarnos a pensar en las acciones que podemos llevar a cabo para evitar este virus, e incluso, en el respeto hacia todas aquellas personas que lo tienen. Modelos como éste permiten a los organismos de salud del Estado (tal es el caso de la Farmacia de Medicamentos de Alto Costo ente que los distribuye gratuitamente a todas las personas que los necesiten) estimar la cantidad de medicamentos retrovirales que serán necesarios en los próximos años.

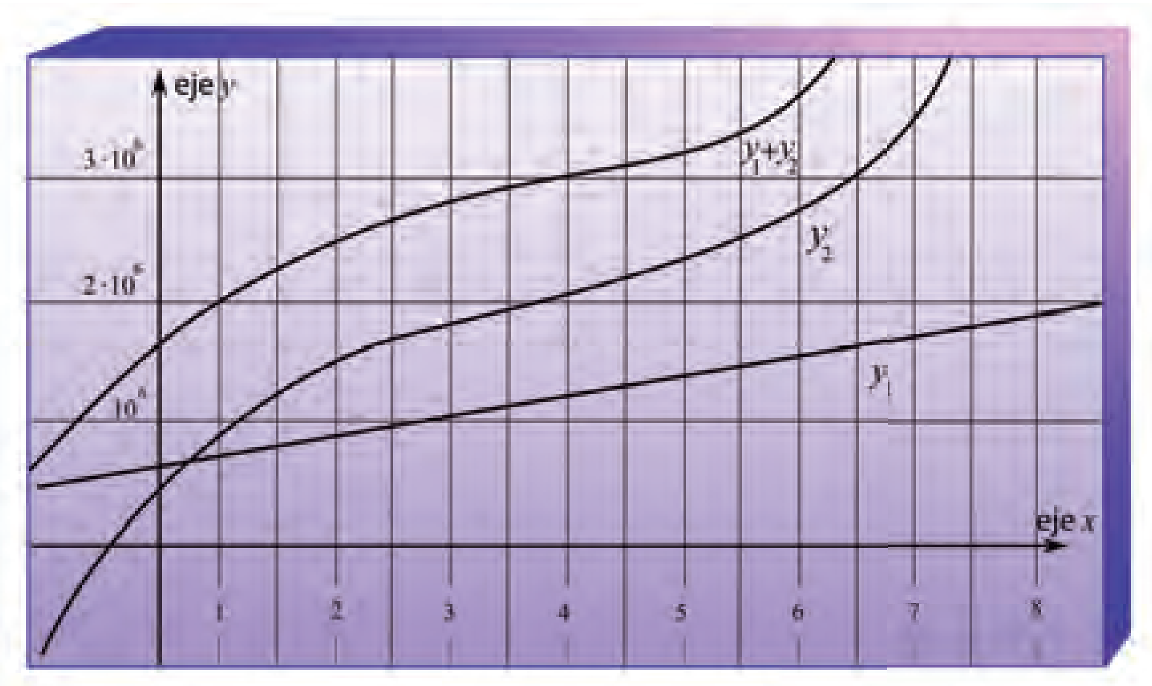
Realicen los cálculos también para los años 2014 y 2016. Comparen sus resultados con los reportes oficiales y debatan con sus compañeras y compañeros.

Sumando funciones

En el gráfico que sigue se muestran dos curvas correspondientes al número de personas con VIH en 17 países de Latinoamérica (etiquetada con y_1) y en Norteamérica (etiquetada con y_2), las cuales están dadas por las funciones: $f(x) = 92.857{,}1 \cdot x + 710.000$ y $g(x) = 27.778x^3 - 273.810x^2 + 1.041.270x + 100.000$.



Número de casos de personas con VIH en17 países de Latinoamérica (y_1) y en Norteamérica (y_2)



y_1+y_2

En el segundo gráfico se encuentra la suma de las dos funciones. La cual da una idea del comportamiento de este fenómeno en las dos regiones conjuntamente.

Noten que en el eje y hemos empleado la notación científica. ¿Qué valores representan?

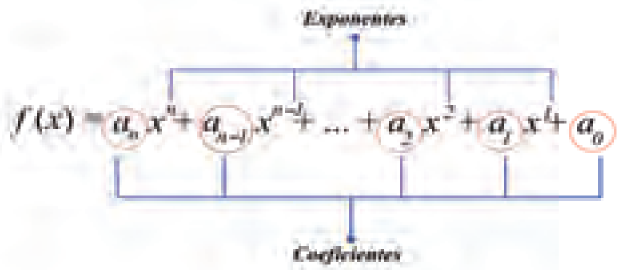
Funciones polinómicas

Las funciones que hemos expuesto en esta lección se denominan **funciones polinómicas** ya que tienen la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Asumiremos que **el dominio** (o conjunto de partida) de esta función es el conjunto $\mathbb{Q}$, y el **codominio** (o conjunto de llegada) también es el conjunto $\mathbb{Q}$.

Aquí x es la variable (y toma valores racionales), los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son llamados coeficientes (y también son números racionales), y los exponentes de la variable x son números naturales.



Algunos ejemplos de funciones polinómicas son:

$$f(x) = 92.857{,}1 \cdot x + 710.000$$

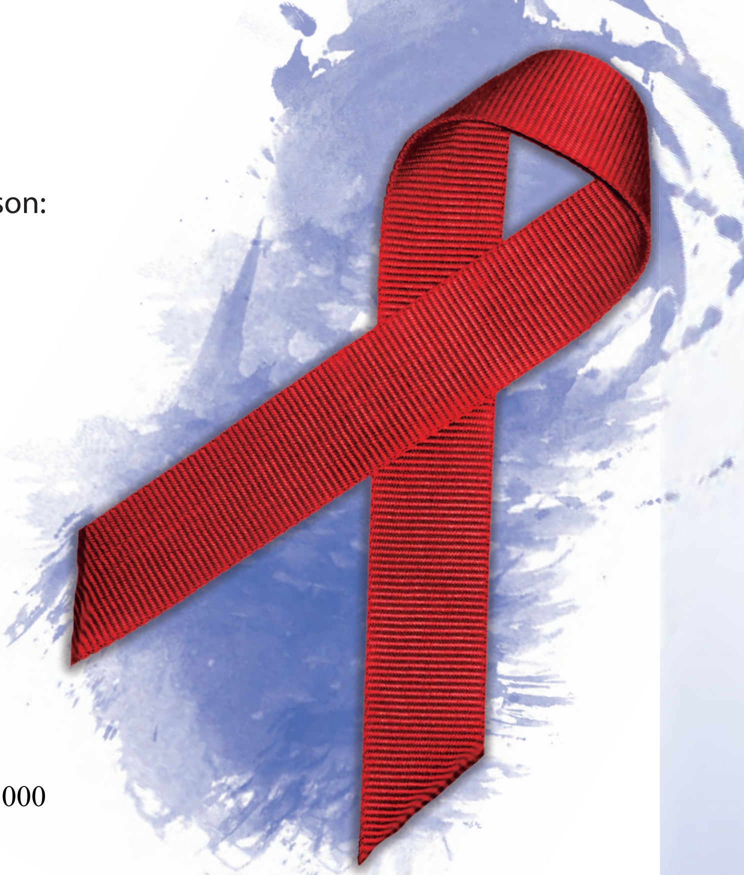
$$f(x) = -3x - 1$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2^2} = \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}x^2$$

$$f(x) = 30x^3 + 3.000$$

$$f(x) = -x^4 + \frac{1}{5}$$

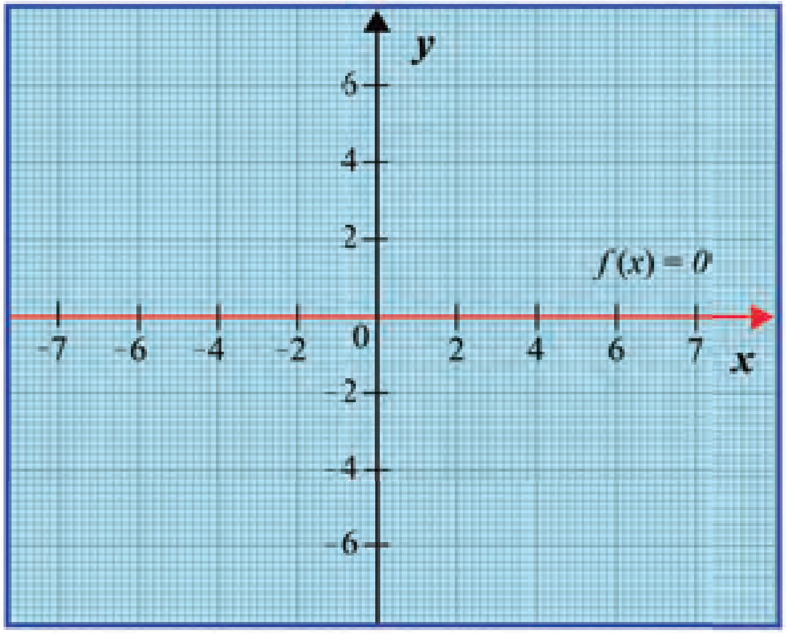
$$f(x) = 27.778x^3 - 273.810x^2 + 1.041.270x + 100.000$$



Les pedimos que den otros ejemplos, señalen en ellos cuáles son sus exponentes y sus coeficientes. Además, socialicen sus resultados con el grupo.

Supongamos que el número de casos de personas con VIH en cierta región y en determinado intervalo de años es 0. Entonces la función polinómica correspondiente es $f(x) = 0$ y tiene por gráfica una recta que coincide con el eje x (ver gráfico adjunto). Esta función se llama función cero. Y es una función constante, ya que para cualquier x en el dominio, su imagen es la misma (de allí el término "constante").

¿Qué otros ejemplos de situaciones reales pueden dar que se correspondan con la función cero? Convérsenlo con sus compañeras, compañeros y docente.



Polinomios

Un **polinomio** en la indeterminada x es una expresión algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

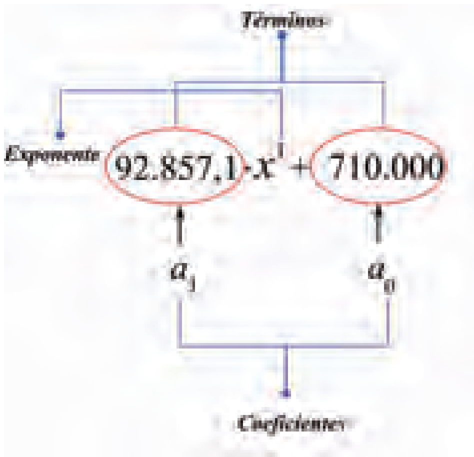
A cada una de las expresiones que siguen:

- $a_n x^n$
- $a_{n-1}x^{n-1}$
- $\vdots$
- $a_2 x^2$
- $a_1 x^1$
- a_0

Se les llama términos del polinomio. El término a_0 , justo el que no está acompañado de la indeterminada x, es el **término independiente**.

Una observación: **en una función polinómica la x se denomina** variable, **en cambio, en un polinomio la x se denomina** indeterminada.

Por ejemplo, los coeficientes, términos y exponente del polinomio son:



Observen que $a_0 = 710.000$ se puede escribir de la siguiente manera:

$710.000 = 710.000 \cdot 1 = 710.000 \cdot x^0$

Ya que el 1 es el neutro o identidad multiplicativa y se puede escribir como:

$1 = x^0$ (siempre y cuando $x \neq 0$).

Nota: Si $x = 0$, *entonces* 0^0 *no está definido.*

El que sigue es un polinomio especial.

El polinomio cero (también llamado nulo)

El **polinomio cero** tiene la forma $0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^2 + 0x^1 + 0 = 0$. Observen que todos sus coeficientes son cero, por ello se anulan sus términos y su suma es cero.

Grado de un polinomio

Si el polinomio no es cero	Si el polinomio es cero
Su grado es el mayor de los exponentes con coeficiente no nulo	No tiene grado

Por ejemplo, si:

$P(x) = -4x^7 + 20x^6 - \frac{1}{2}x + 17$	$P(x) = 0$
Su grado es 7	No tiene grado
Y se escribe: $gr P(x) = 7$	—

La idea de términos semejantes

Dos o más términos son **semejantes** si la indeterminada está elevada al mismo exponente.

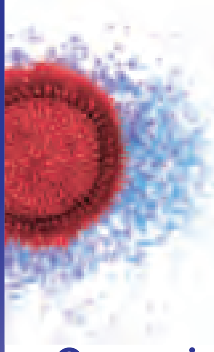
Las expresiones: $-4x^7$ y $\frac{5}{6}x^7$

son términos semejantes (ambos tienen igual exponente. Además, no importa si sus coeficientes son diferentes). Otros ejemplos de términos semejantes son:

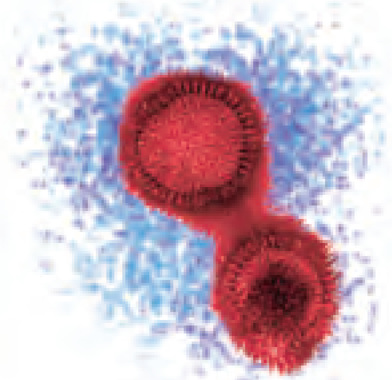
$$-\frac{1}{2}x \text{ y } x$$

Pero, $-4x^7$ y $-4x^8$ no son semejantes, pues no tienen igual exponente; con estas ideas podemos simplificar polinomios sumando sus términos semejantes; veamos.

Ejemplo. Consideremos el polinomio $2x^5-10x^4-8x^5-10+\frac{11}{2}+x^3$. En él observamos que hay dos términos con exponente 5, y otros dos términos que no se acompañan de la indeterminada x. Entonces, reescribiremos este polinomio sumando sus términos semejantes.



$$\begin{aligned} 2x^5-10x^4-8x^5-10+\frac{11}{2}+x^3 &= 2x^5-8x^5-10x^4-10+\frac{11}{2}+x^3 \\ &= (2-8)x^5-10x^4+\left(-10+\frac{11}{2}\right)+x^3 \\ &= -6x^5-10x-\frac{9}{2}+x^3 \end{aligned}$$



Operaciones con polinomios: adición y sustracción

Consideremos los polinomios: $a_mx^m+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$ y $b_nx^n+\cdots+b_2x^2+b_1x^1+b_0$.

Llamémoslos:

$$P(x)=a_mx^m+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

$$Q(x)=b_nx^n+\cdots+b_2x^2+b_1x^1+b_0$$

La **suma** de ellos está dada por el polinomio:

Caso 1: si $m=n$

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= \left(a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\right)+\left(b_nx^n+\cdots+b_2x^2+b_1x^1+b_0\right) \\ &= (a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x^1+(a_0+b_0) \end{aligned}$$

Caso 2: si $m>n$

$$\begin{aligned} &\left(a_mx^m+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\right)+\left(b_nx^n+\cdots+b_2x^2+b_1x^1+b_0\right) \\ &= a_mx^m+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}+(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x^1+(a_0+b_0) \end{aligned}$$

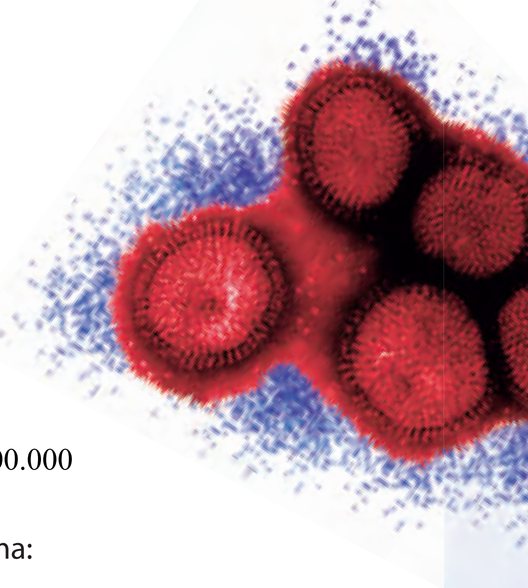
La **resta** está dada por el polinomio:

Caso 1: si $m=n$

$$\begin{aligned} P(x)-Q(x) &= \left(a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\right)-\left(b_nx^n+\cdots+b_2x^2+b_1x^1+b_0\right) \\ &= (a_n-b_n)x^n+\cdots+(a_2-b_2)x^2+(a_1-b_1)x^1+(a_0-b_0) \end{aligned}$$

Caso 2: si $m>n$

$$\begin{aligned} &\left(a_mx^m+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\right)-\left(b_nx^n+\cdots+b_2x^2+b_1x^1+b_0\right) \\ &= a_mx^m+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}+(a_n-b_n)x^n+\cdots+(a_2-b_2)x^2+(a_1-b_1)x^1+(a_0-b_0) \end{aligned}$$



Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo. Consideremos los polinomios:

$$P(x) = 92.857{,}1 \cdot x + 710.000$$

y

$$Q(x) = 27.778x^3 - 273.810x^2 + 1.041.270x + 100.000$$

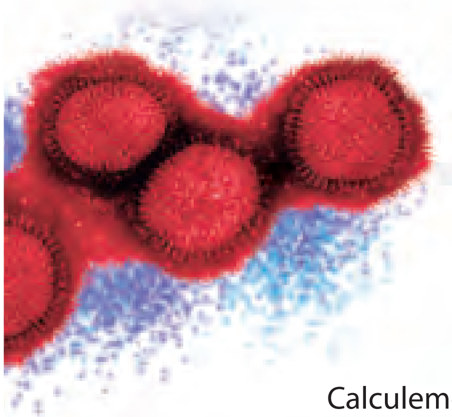
Estos son de grado 1 y 3, respectivamente. Calculemos su suma:

$$\begin{array}{r}
92.857{,}1\,x + 710.000 \\
27.778\,x^3 - 273.810\,x^2 + 1.041.270x + 100.000 \\
\hline
27.778x^3 - 273.810x^2 + 1.134.127{,}1x + 810.000
\end{array}$$

Observen que dispusimos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de manera que los términos del mismo orden quedaran uno debajo del otro. Además, como en el polinomio $P(x)$ no hay términos de grado 3 y 2, esos espacios han quedado en blanco.

Ahora, fíjense en el gráfico titulado $y_1 + y_2$ realizado anteriormente. La suma y la resta de polinomios permiten interpretar ciertos aspectos en el problema que estudiemos.

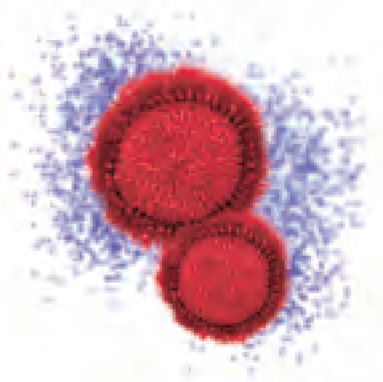
Ejemplo. Consideremos los polinomios:



$$P(x) = -4x^7 + 20x^6 - \frac{1}{2}x + 17$$

y

$$Q(x) = 2x^6 - 10x^5 + x^4 + \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x - 9$$



Calculemos su resta: notemos primero que,

$$-Q(x) = -2x^6 + 10x^5 - x^4 - \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x + 9$$

Aquí multiplicamos por -1 cada término de $Q(x)$.

$-Q(x)$ es el polinomio opuesto a $Q(x)$

$$-4x^7 + 20x^6 \qquad\qquad -\frac{1}{2}x + 17$$

$$-2x^6 + 10x^5 - x^4 - \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x + 9$$

Entonces se obtiene:

$$-4x^7 + 18x^6 + 10x^5 - x^4 - \frac{1}{4}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x + 26$$

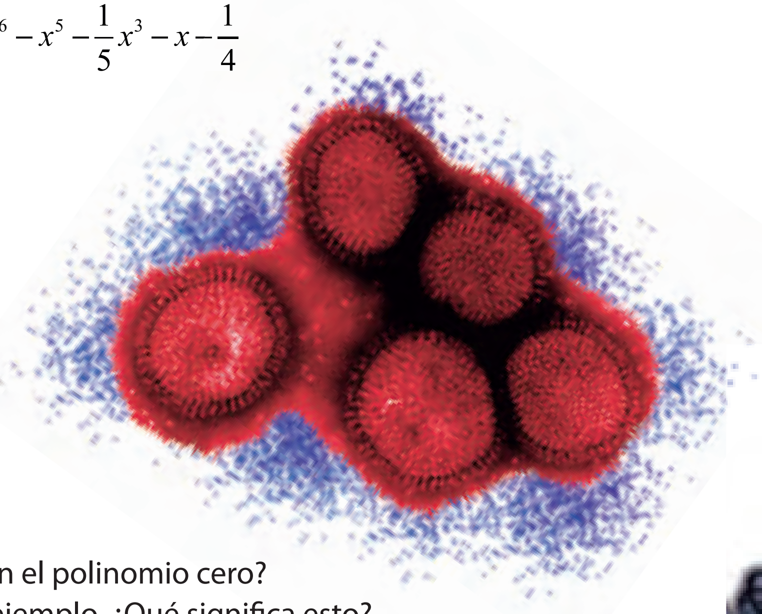
Con ayuda de tu profesora o profesor, calculen la suma y la resta, $P(x)+Q(x)$ y $P(x)-Q(x)$, de los polinomios que siguen hasta que se sientan familiarizadas y familiarizados con estas operaciones.

(a) $P(x)=\frac{2}{3}x^7+2x^6+x^3-x-\frac{3}{4}$ y $Q(x)=x^{10}-x^7+x^6-x^5-\frac{1}{5}x^3-x-\frac{1}{4}$

(b) $P(x)=\frac{4}{9}x^4+\frac{1}{6}x^2+x-\frac{1}{3}$ y $Q(x)=x^4-x^2-x$

(c) $P(x)=\frac{1}{20}x^{10}+2x-\frac{3}{8}$ y $Q(x)=-x^{11}-\frac{1}{20}x^{10}-x+\frac{1}{4}$

(d) $P(x)=-x^5-x^4-x$ y $Q(x)=-5x^6-\frac{5}{6}x^5-3x^3+x$



- ¿Cuál es la suma de un polinomio cualquiera $P(x)$ con el polinomio cero?
- ¿Qué obtenemos al restar $P(x)-P(x)$? Aporten un ejemplo. ¿Qué significa esto?
- Con ayuda de su profesora o profesor **prueben las propiedades conmutativa, asociativa, y la existencia de elemento simétrico (opuesto)** con respecto a la adición de polinomios.
- Presenten su demostración ante todo el curso.

Investiguemos

1 Sobre las funciones polinómicas

- Organícense en pequeños grupos y busquen datos sobre el número de casos de VIH en el mundo.
- Construyan el gráfico de dispersión y encuentren una función polinómica que se aproxime a ese comportamiento. Pidan ayuda a sus familiares y docente.

- Calculen, según el modelo que encontraron, cuántos casos de VIH se estiman para los próximos años en el mundo.
- Presenten sus resultados a todo el curso junto con una reflexión o propuesta de prevención de contagio y anímense a publicarlos en el periódico local o en el de la Institución.

2) Hagan lo mismo para la resta de la curva cuadrática con respecto a la lineal.

3) Discutan las actividades con su docente.

4) Sobre los polinomios:

- ¿Cuál es el grado de los polinomios x y x^1?
- ¿Y el de $2\,x^2$?
- ¿Cuál es el grado del polinomio $P(x)=5$? ¿Y el de $P(x)=-1$? Argumenten su respuesta.
- ¿Cuál es su interpretación gráfica?
- Aporten ejemplos de polinomios de grados 7 y 9 (con al menos 4 términos no nulos). Calculen su suma y resta.
- Identifiquen en ellos su grado, términos, coeficientes y exponentes.
- Hagan lo mismo que en la actividad anterior con polinomios: $P(x)=\frac{2}{3}x^5-x^4+\frac{3}{2}x^3+2x^1-1$ y $Q(x)=11x^5+2x^4-\frac{4}{7}x^3+10x^2-x^1-2$.
- Calculen el valor numérico de los dos últimos polinomios, considerando $x=-1$.

Caminata por la avenida principal de la capital uruguaya

Geometría para el almacenamiento

Cultivo organopónico de tomates

Pedro y María son estudiantes de un liceo bolivariano en el que se está desarrollando un proyecto productivo para un cultivo organopónico de tomates. Debido a la cantidad de tomate que han obtenido este año, no les será posible distribuir todo el tomate fresco. Por lo tanto, han decidido emplear métodos de conservación de alimentos para almacenar la parte de la cosecha que no podrá ser distribuida en este momento.

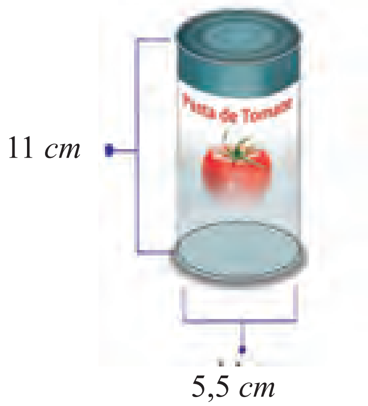
Investiguemos

- ¿En qué consiste un cultivo organopónico?, ¿existen otros tipos de cultivo?, ¿cuáles son?

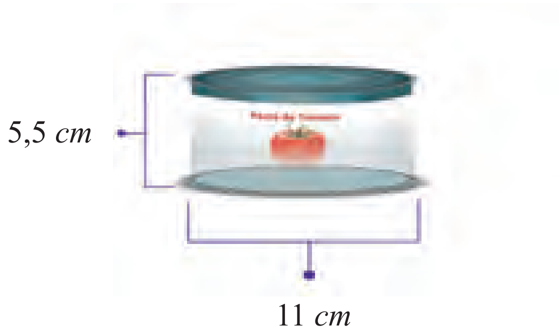
- ¿Conocen algún proceso para la conservación de alimentos? Investiguen el proceso de conservación del tomate y cómo hacer conserva casera de tomates. Consulten con su profesora o profesor de ciencias naturales y con sus familiares.

Los envases para la conserva de tomate

Las y los estudiantes tienen a su disposición dos tipos de envase para el almacenamiento de los tomates en conserva. Por ello, el día de hoy, quieren escoger el que les permita guardar mayor cantidad de tomates. Los envases que tienen a su disposición son los siguientes:



Envase 1 = E1



Envase 2 = E2

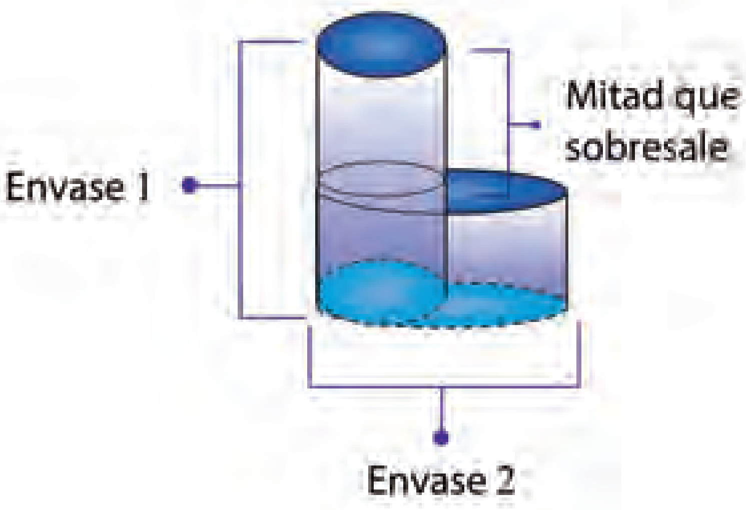
Aunque las y los estudiantes no conocen el volumen de estos recipientes cilíndricos creen que al envase más alto le cabría más tomate. ¿Ustedes qué piensan?

Vamos a ayudarlos a comparar los envases para escoger la opción que permita almacenar mayor cantidad de conserva de tomate por recipiente, de esta manera todos despejaremos nuestras dudas.

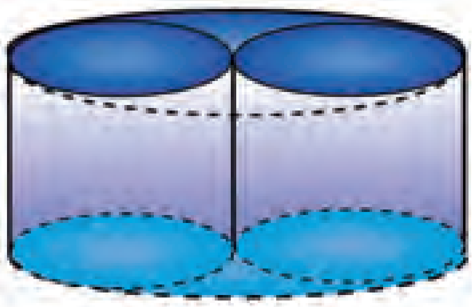
Fíjense que el diámetro de la base de los envases 1 y 2 es $5{,}5\ cm$ y $11\ cm$, respectivamente; mientras que las alturas correspondientes son $11\ cm$ y $5{,}5\ cm$.

Como pueden observar, el diámetro de la base del envase 1 es la mitad del diámetro de la base del envase 2, pero la altura del envase 1 es el doble de la altura del envase 2. Veamos en cuál de los dos cilindros se puede almacenar mayor cantidad de conserva de tomates.

Para comparar los dos cilindros a Pedro y María se les ocurrió introducir el envase 1 dentro del envase 2:



El envase 1 está dividido en dos mitades, la que se encuentra dentro del envase 2 y la que sobresale. Imaginen que pueden insertar dentro del envase 2 la mitad que sobresale del envase 1:



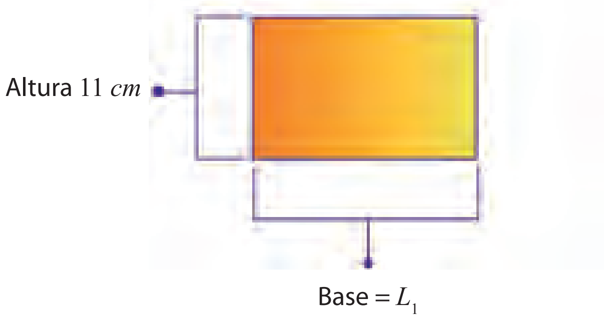
Observen la imagen anterior y socialicen con sus compañeras, compañeros y su profesora o profesor:

- ¿Las dos mitades del envase 1 llenan completamente el envase 2?
- ¿En cuál de los dos envases se podrá almacenar más conserva de tomate?

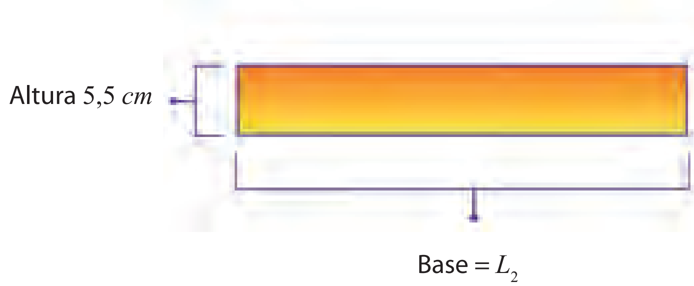
Superficies iguales

Si pudiéramos desdoblar el metal con el que están hechos los envases para saber cuánto mide la superficie lateral de cada uno de estos cilindros, obtendríamos figuras con forma de rectángulos:

Les proponemos hacer uso de material aprovechable como: cartón, cartulina, papel, tela, entre otros, para realizar esta actividad y así obtener las siguientes figuras:



Envase 1 (E1)



Envase 2 (E2)

Ahora bien, recuerden que la medida de la superficie de un rectángulo es el área, y para calcularla se multiplica la longitud de la base del rectángulo por la longitud de su altura.

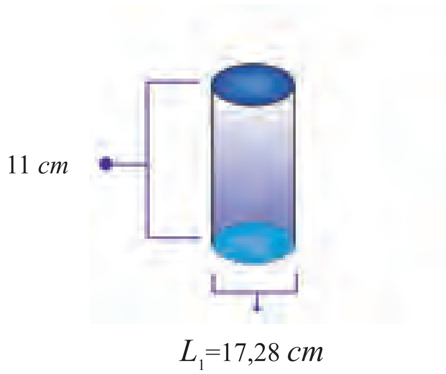
$$A_{rectángulo} = b \cdot h$$

En nuestro caso, ya conocemos la longitud de la altura de los dos rectángulos que conformaban $E1$ y $E2$, ahora tenemos que calcular la longitud de la base de los rectángulos, fíjense que se corresponde con la longitud de la circunferencia de la base de los cilindros. Verifícalo:

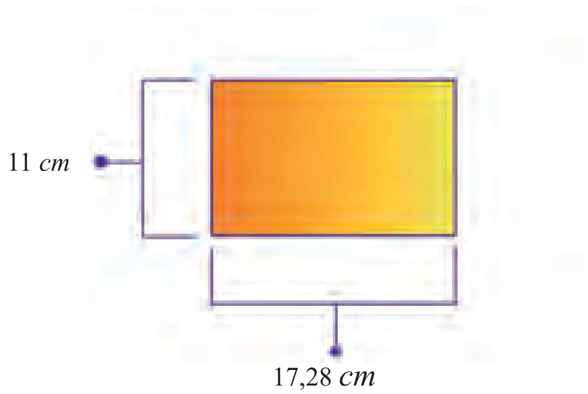
Longitud de la circunferencia de la base del envase 1 (L_1):	Longitud de la circunferencia de la base del envase 2 (L_2):
$L_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1$ Diámetro circunferencia $E1$ = 5,5 cm r_1: radio circunferencia $E1$ = 2,75 cm $\pi \simeq 3{,}1416...$ $L_1 = 2 \cdot (3{,}1416) \cdot (2{,}75)\ cm$ $L_1 = 17{,}28\ cm$	$L_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2$ Diámetro circunferencia $E2$ = 11 cm r_2: radio circunferencia $E2$ = 5,5 cm $\pi \simeq 3{,}1416...$ $L_2 = 2 \cdot (3{,}1416) \cdot (5{,}5)\ cm$ $L_2 = 34{,}56\ cm$

Ya conocemos la altura y la longitud de la circunferencia de la base de los dos envases de jugo de tomate. Ahora podemos calcular el área de la superficie lateral del envase 1 y el envase 2. Veamos:

Superficie del envase 1 (*E*1)



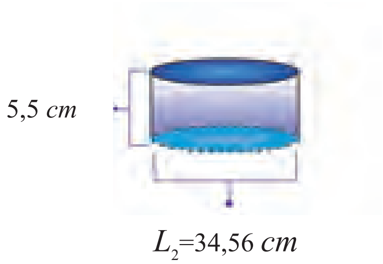
Envase 1 (E1)



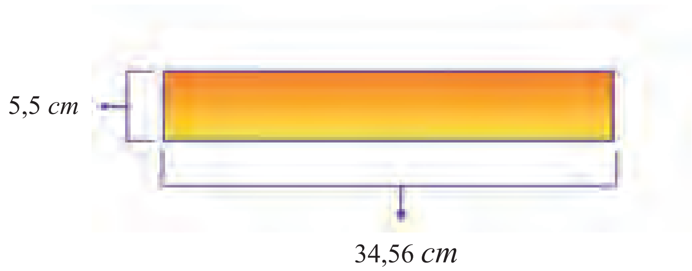
Superficie de E1

Área lateral del envase 1 ($ALE1$): $ALE2 = 11\ cm \cdot 17{,}28\ cm = 190{,}08\ \text{cm}^2$

Superficie del envase 2 (*E*2)



Envase2 (E2)



Superficie de E2

Área lateral del envase 2 ($ALE2$): $ALE2 = 5{,}5\ cm \cdot 34{,}56\ cm = 190{,}08\ \text{cm}^2$

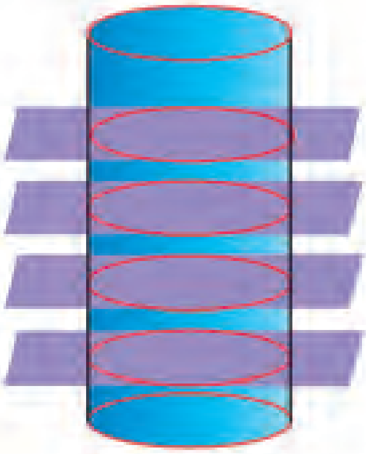
Se pudiera pensar que dos cilindros con igual área lateral deben tener el mismo volumen, pero en este ejemplo nos hemos dado cuenta que no es así. Recuerden que los dos medios del envase 1 no llenaban completamente el envase 2 (quedaban espacios sin llenar), aunque la superficie lateral en ambos casos tiene igual medida.

A partir de esta experiencia conversen con sus compañeras, compañeros y con su profesora o profesor en qué consiste el área de una superficie y qué significa el volumen de un cuerpo.

Calculemos el volumen de los envases de jugo de tomate

Para comparar con mayor precisión los dos envases cilíndricos debemos calcular su volumen. Veamos cómo podemos hacerlo:

Supongan que la **base inferior del cilindro** se traslada, paralelamente, a sí misma hasta llegar a la base superior.



Todo el cilindro ha sido "recorrido" por la base circular, la distancia recorrida es igual a la **altura del cilindro.**

Por lo tanto, el volumen se obtiene al multiplicar el área de la base por la altura. La ecuación del volumen de un cilindro quedaría:

$$V_c = A_{base} \cdot h$$

Donde A_{base} es el área de la base del cilindro y h es su altura.

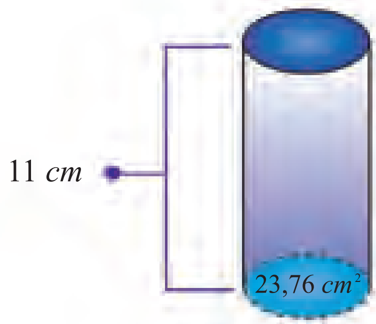
Cálculo del volumen del envase 1

Debemos calcular primero el área de la base circular del envase. Por lo tanto, usaremos la ecuación para el cálculo del área de un círculo que ya hemos estudiado:

$$A_{base} = \pi \cdot r^2$$

Antes recuerden que el radio es $2{,}75\ cm$, ¿por qué?

$$A_{base1} = (3{,}1416) \cdot (2{,}75 \text{ cm})^2 = 23{,}75835\ cm^2 \approx 23{,}76\ cm^2$$



Si aplicamos la ecuación anterior correspondiente al volumen del cilindro, nos queda:

$$V1 = A_{base} \cdot h$$
$$V1 = 19,4\,cm^2 \cdot 24\,cm = 465,6\,cm^3$$

Ahora, calculen el volumen del envase 2 y respondan:

- Conociendo la ecuación para el área de un círculo. ¿De qué otra forma pueden escribir la ecuación del volumen de un cilindro?
- ¿Con cuál envase deberían almacenar los tomates los estudiantes si quieren utilizar la menor cantidad de envases?

Ahora ustedes tomen dos envases de igual características, por ejemplo vasos, llenen de agua el envase 1 y vacíenlo en el envase 2.

¿El contenido de agua del envase 1 llena en su totalidad en envase 2? ¿En cuál de los dos envases pueden almacenar más conserva de tomate?

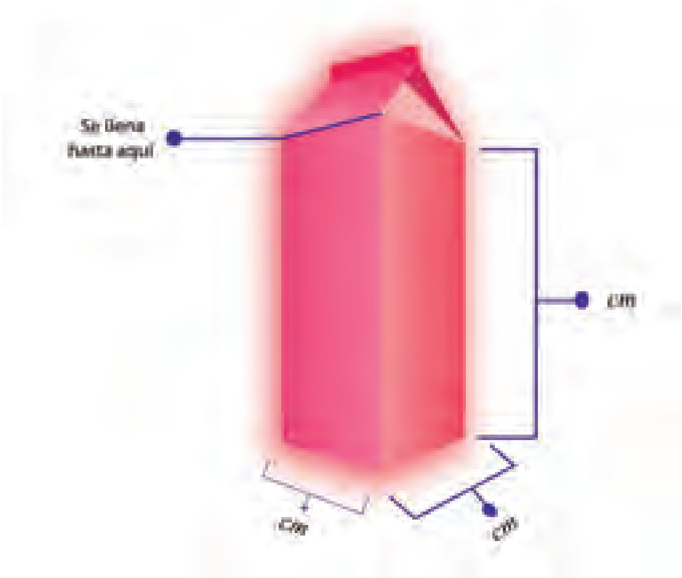
Debatan con sus compañeras, compañeros y docente y establezcan conclusiones.

¿Cuánto jugo trae el cartón de "1 *litro*"?

Ese mismo día de la elección de los envases, cuando María se dirigía a su casa acompañada por Pedro, se paró a comprar un litro de jugo en la bodega. Pedro le preguntó si se había fijado alguna vez en la cantidad de jugo que trae el cartón que llamamos "de un litro".

María extrañada por la pregunta observa el envase del jugo y constata que en realidad son $900\ cm^3$ lo que ha comprado, y a su vez le pregunta a Pedro si allí cabría un litro de jugo. Vamos a ayudarlos a calcular cuál es el volumen del cartón de jugo.

Observen el cartón de jugo de tomate que te presentamos a continuación:



Este tipo de envase solo se puede llenar de líquido hasta la altura señalada, de lo contrario al abrirse podría botarse.

Fíjense que si removemos la parte superior, el cuerpo geométrico que nos queda sería un prisma recto, cuya base es un rectángulo.

Traigan a clases un cartón de jugo "de un litro". Copien en sus cuadernos las medidas del cartón (largo, ancho y altura).

Para calcular el volumen de la parte que podemos llenar del cartón de jugos, imaginen que la **base cuadrada del prisma** se desplaza, paralelamente a ella misma, hasta la base superior, que en este caso es hasta donde podría llenarse el cartón.

La base "recorrió" todo el prisma de cartón desde su posición inicial, esta distancia "recorrida" por la base es igual a la altura del prisma de cartón.

Es decir, la ecuación para calcular el volumen de nuestro prisma de cartón será:

$$V_p = A_{base} \cdot h$$

Como sabemos, la superficie de la base es rectangular, y para calcular su área debemos multiplicar la longitud del largo por la longitud del ancho. La ecuación sería la siguiente:

$$A_{base} = l \cdot a$$

Entonces, la ecuación para calcular el volumen de un prisma de base rectangular se puede escribir así:

$$V_p = l \cdot a \cdot h$$

Ya estamos listos para calcular el volumen del envase de jugo que generalmente llamamos "de un litro".

En la figura adjunta pueden observar las medidas de un envase de jugo "de un litro".

Largo (l) = 7 *cm*
Ancho (a) = 7 *cm*
Altura (h) = 19 *cm*

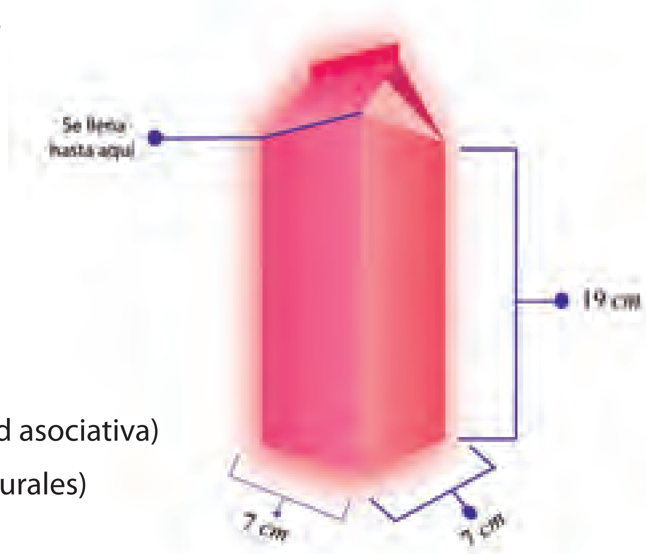
Sustituyendo estos valores en $V_p = l \cdot a \cdot h$ tenemos:

$$V_p = 7\,cm \cdot 7\,cm \cdot 19\,cm$$

$$V_p = (7\,cm \cdot 7\,cm) \cdot 19\,cm$$ (aplicando la propiedad asociativa)

$$V_p = 49\,cm^2 \cdot 19\,cm$$ (multiplicando números naturales)

$$V_p = 931\,cm^3$$



A partir de los cálculos anteriores se puede afirmar que la mayor cantidad de jugo que pudiera contener el envase, que generalmente llamamos "de un litro", es de 931 cm^3. Es decir, 931 ml (recuerden que 1 ml equivale 1 cm^3).

Ahora pensemos en la fábrica de jugos que vierte el líquido en los envases de cartón. Se desea determinar la altura que debe alcanzar el líquido para que el volumen sea 900 cm^3.

Sabemos que el volumen (V) de jugo que hay en el envase cuando se ha llenado hasta la altura h, viene dado por:

$$V(h) = A_{base} \cdot h$$

En este caso el volumen (V) varía a partir de la altura (h) que alcanza el líquido en el envase.

Queremos saber a qué altura el volumen de jugo que hay en el envase es 900 cm^3 aproximadamente. Veamos cómo sería:

Área de la base	Altura (h)	Ecuación	Volumen $V(h)$
49 cm^2	$h_1 = 1\ cm$	$V_{(h_1)}=49\ cm^2 \cdot h_1$	$V_{(h_1)}= 49\ cm^3$
49 cm^2	$h_2 = 2\ cm$	$V_{(h_2)}=49\ cm^2 \cdot h_2$	$V_{(h_2)}= 98\ cm^3$
49 cm^2	$h_3 = 5\ cm$	$V_{(h_3)}=49\ cm^2 \cdot h_3$	$V_{(h_3)}= 245\ cm^3$
49 cm^2	$h_4 = 10\ cm$	$V_{(h_4)}=49\ cm^2 \cdot h_4$	$V_{(h_4)}= 490\ cm^3$
49 cm^2	$h_5 = 15\ cm$	$V_{(h_5)}=49\ cm^2 \cdot h_5$	$V_{(h_5)}= 735\ cm^3$
49 cm^2	$h_6 = 16\ cm$	$V_{(h_6)}=49\ cm^2 \cdot h_6$	$V_{(h_6)}= 784\ cm^3$
49 cm^2	$h_7 = 17\ cm$	$V_{(h_7)}=49\ cm^2 \cdot h_7$	$V_{(h_7)}= 833\ cm^3$
49 cm^2	$h_8 = 18\ cm$	$V_{(h_8)}=49\ cm^2 \cdot h_8$	$V_{(h_8)}= 882\ cm^3$
49 cm^2	$h_9 = 19\ cm$	$V_{(h_9)}=49\ cm^2 \cdot h_9$	$V_{(h_9)}= 931\ cm^3$

En el cuadro pueden observar cuál es el volumen de jugo que hay en el envase a medida que se va llenando. Pero, ¿cuándo el volumen de jugo en el envase es de 900 cm^3 aproximadamente?

Observemos que cuando la altura del líquido en el envase alcanza los 18 cm el volumen de jugo es menor de 900 cm^3. Y cuando la altura es de 19 cm el volumen de líquido que hay en el envase es mayor a 900 cm^3.

Lo anterior permite afirmar que la altura que debe alcanzar el jugo para que el volumen sea $900\ cm^3$, aproximadamente, es un número que está entre 18 y 19. Probemos con $18{,}1$ y vamos aumentando hasta alcanzar un volumen de líquido lo más cercano a $900\ cm^3$.

Área de la base	Altura (h)	Ecuación	Volumen $V(h)$
$49\ cm^2$	$h_{10}=18{,}1\ cm$	$V_{10}=49\ cm^2 \cdot h_{10}$	$V_{10}=886{,}9\ cm^3$
$49\ cm^2$	$h_{11}=18{,}2\ cm$	$V_{11}=49\ cm^2 \cdot h_{11}$	$V_{11}=891{,}8\ cm^3$
$49\ cm^2$	$h_{12}=18{,}3\ cm$	$V_{12}=49\ cm^2 \cdot h_{12}$	$V_{12}=896{,}7\ cm^3$
$49\ cm^2$	$h_{13}=18{,}4\ cm$	$V_{13}=49\ cm^2 \cdot h_{13}$	$V_{13}=901{,}6\ cm^3$

¡Ahora les toca a ustedes!

Ahora podemos ver que la altura que debe alcanzar el líquido en el envase está entre $18{,}3$ y $18{,}4\ cm$, para que el volumen sea, aproximadamente, $900\ cm^3$. Con la ayuda de sus calculadoras sigan aproximándose a la altura que debe alcanzar el jugo en el envase para que el volumen sea $900\ cm^3$.

Hemos visto que el envase de jugo que llamamos "de un litro" no contiene $1.000\ cm^3$ sino $900\ cm^3$. Realicen este mismo análisis con otros productos (leche líquida y en polvo, café, azúcar, arroz, etc.) para conocer si lo que piden al comprar es lo que le dan al pagar.

Con ayuda de sus compañeras y compañeros, construyan un envase de jugo de tomate, como el que hemos estudiado, que pueda contener un litro de líquido.

Un prisma especial

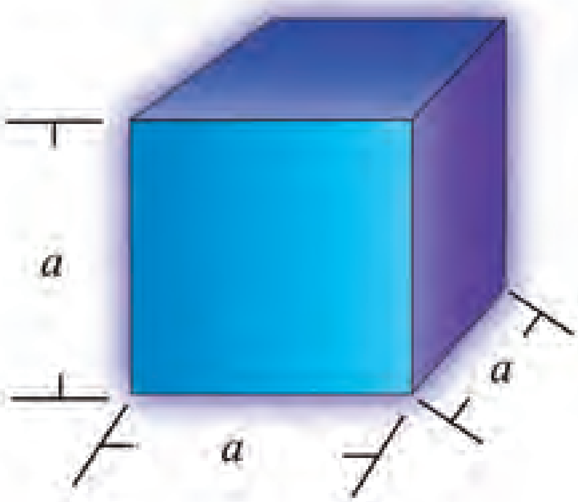
El cubo es un prisma rectangular particular formado por seis caras congruentes con forma de cuadrado.

Debido a que es un prisma su volumen está dado por:

$$V_c = V_p = l \cdot a \cdot h$$

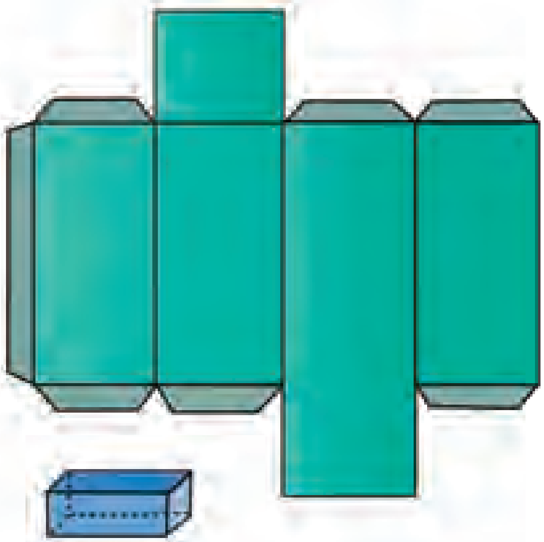
Como el largo, el ancho y la altura tienen igual longitud, se puede decir que el volumen del cubo es:

$$V_c = a \cdot a \cdot a$$
$$V_c = a^3$$

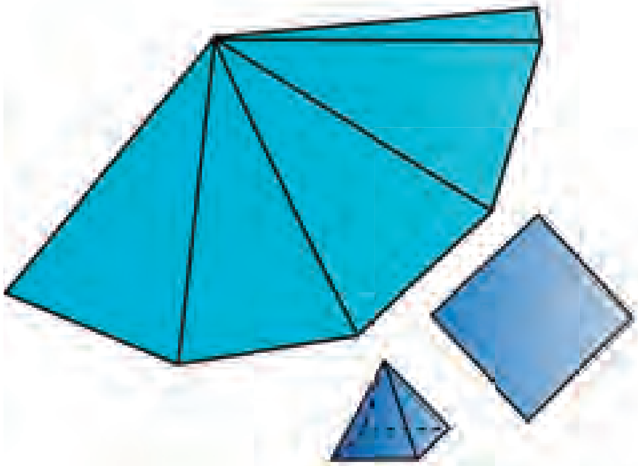


Experimentando

Construyamos un prisma y una pirámide con bases cuadradas de igual área e igual altura. A continuación te presentamos dos plantillas que pueden ayudarte en esta tarea:



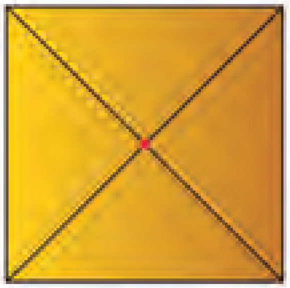
Plantilla para prisma de base cuadrada



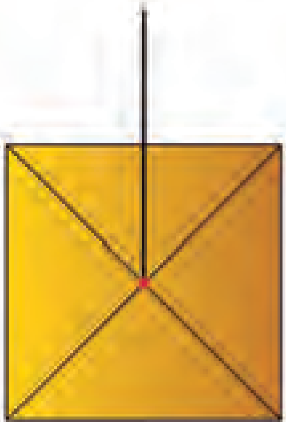
Plantilla para pirámide de base cuadrada

Para construir una pirámide de base cuadrada que tenga la misma altura que el prisma de base cuadrada te recomendamos lo siguiente:

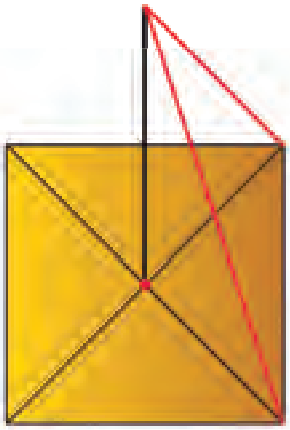
Construyan el cuadrado que será la **base del prisma** y **de la pirámide** en una hoja o cartón.



Determinen el centro del cuadrado trazando sus diagonales.

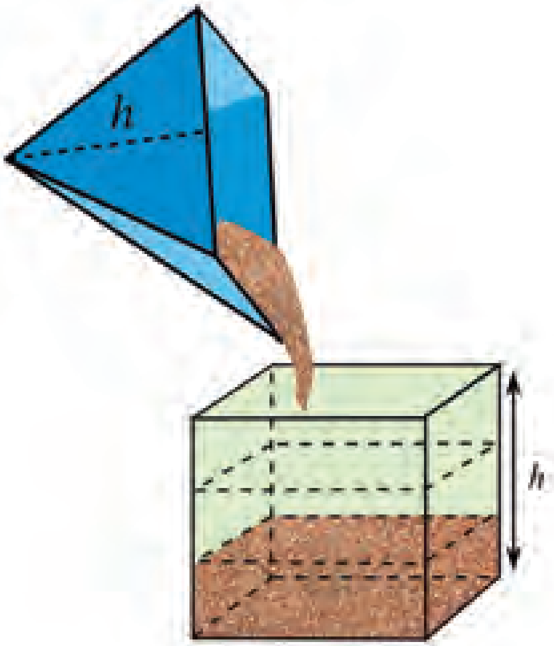


Fijen un palito de altura o pitillo en el centro del cuadrado. Ese palito debe tener la misma medida de la altura del prisma.



Ahora, con ayuda de un pabilo, midan la distancia que hay desde la punta del palito hasta alguno de los vértices del cuadrado.

La longitud que acaban de determinar con el pabilo, será la medida que deberán tener las aristas de las caras triangulares de la pirámide. Ahora pueden trazar y construir el cubo y la pirámide.



Volumen de la pirámide de base cuadrada

Ahora llenen la pirámide que construimos anteriormente con arena fina y vacíenla en el prisma, repitan esta operación hasta que el prisma quede completamente lleno.

A partir de esta actividad respondan:

- ¿Cuántas pirámides llenas de arena se necesitaron para colmar el prisma?

Con base en la respuesta anterior, y considerando la ecuación del volumen de un prisma, deduzcan junto con sus compañeras y compañeros la ecuación del volumen de una pirámide.

La ecuación para calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada es:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$

Volumen del cono

Verifiquen junto a su profesora, profesor, compañeras y compañeros, que la ecuación para calcular el volumen de un cono es $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$. Utilicen como referencia el experimento anterior usando un cono y un cilindro que tengan igual altura e igual base.

Volumen de la esfera

Piensen en objetos como el mingo del juego de bolas criollas, en pelotas de goma y de beisbol, en naranjas, todos estos cuerpos por sus características tienen forma esférica. La esfera es un cuerpo geométrico redondo.

A continuación les presentamos una manera para deducir la ecuación del volumen de una esfera. Revisen, estudien y socialicen cada uno de los pasos y procedimientos y saquen sus conclusiones.

Uno de los métodos que se requiere es el conocido como el "principio de Cavalieri", el cual plantea:

Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, entonces poseen igual volumen.

Para visualizar lo anterior tomen unas monedas de un bolívar y construyan un cuerpo como el que se muestra en la *figura 1*.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) Jesuita y matemático italiano. Fue alumno de Galileo Galilei

Figura 1

Ahora, con el mismo número de monedas forma un cuerpo como se muestra en la *figura 2*.

Figura 2

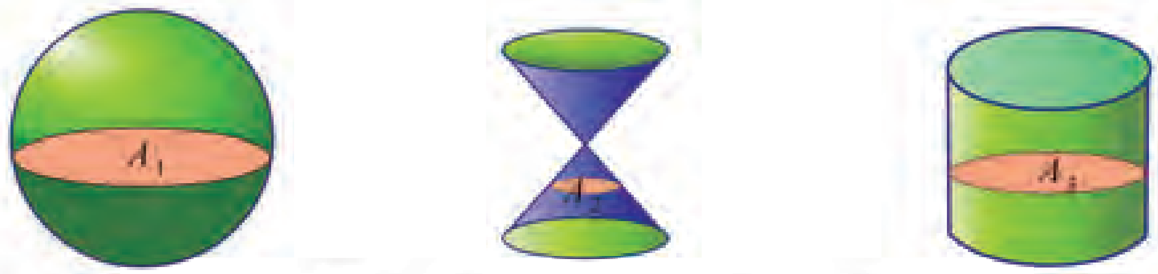
Los dos cuerpos anteriores tienen:

1) Igual altura por estar formado por el mismo número de monedas.
2) Sus secciones planas tienen igual área por ser ambas caras de la moneda.

Por 1) y 2) y el principio de Cavalieri los dos cuerpos anteriores tienen igual volumen.

Veamos ahora la *figura 3*, donde tenemos una esfera, un cono y un cilindro. Ellas cumplen con las siguientes condiciones:

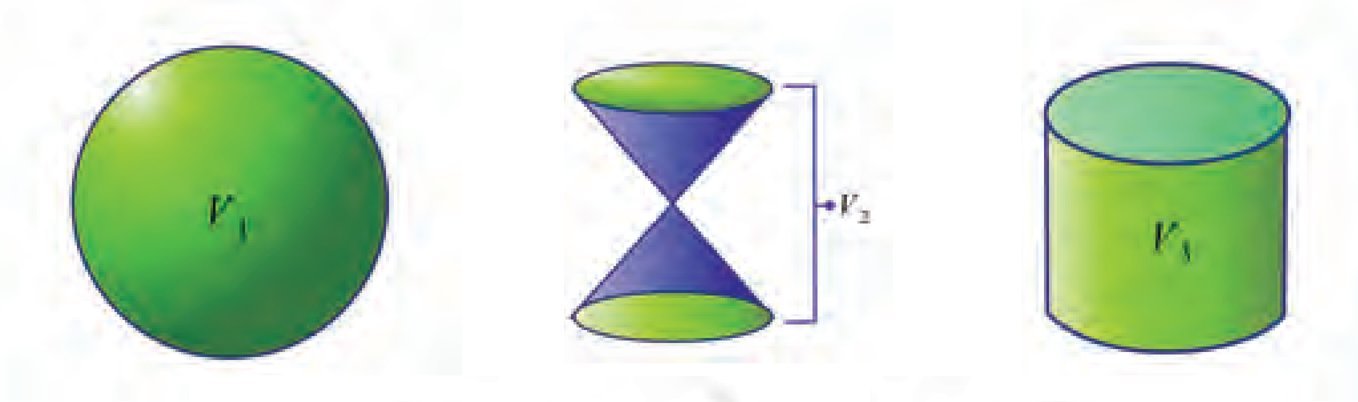
- El radio de las bases de los conos y del cilindro es el mismo que el radio de la esfera.
- La altura del cilindro es el diámetro de la esfera y la altura de cada cono coincide con el radio de la esfera.
- Si cortamos los tres cuerpos por un plano horizontal se tiene que la suma de las áreas de las secciones de la esfera ($A1$) y del cono ($A2$) es igual al área de la sección del cilindro ($A3$).



$$A_1 + A_2 = A_3$$

Figura 3

Por lo tanto, de acuerdo con el principio de Cavalieri, los volúmenes de estos cuerpos cumplen con esta misma relación. Es decir, el volumen de la esfera más el volumen de los dos conos es igual al volumen del cilindro.



$$V_1 + V_2 = V_3$$

$$V_1 = V_3 - V_2$$

Se sabe que:

$$V_3 = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$
$$V_2 = 2\left(\frac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$$

Por lo tanto el volumen de la esfera es:

$V_1 = 2 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$	$V_1 = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\pi \cdot r^3$
$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$	$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Socialicen el principio de Cavalieri y en colectivo elaboren algunos experimentos que les permitan comprender y comprobar este postulado.

Las reservas de gas venezolano

Venezuela cuenta con 4,15 billones de m^3 (147 billones de pies cúbicos) de gas en reservas probadas. Además posee recursos entre 1,13 y 1,69 billones de m^3 (40 y 60 billones de pies cúbicos) por confirmar.

Las reservas probadas de gas de nuestro país representan el 55% de las reservas de la región. Venezuela es el país con más reservas probadas de gas en América Latina.

Para que tengan una mejor idea de cuáles son las reservas probadas de gas de Venezuela utilizaremos la capacidad del tanque de una gandola como las que transportan gasolina y veremos cuántas se pudieran llenar con 4,15 billones de m^3.

Recuerden que estas gandolas tienen un termostato que les permite controlar la temperatura.

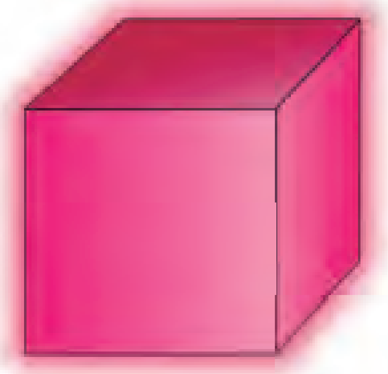
La capacidad del tanque que hemos mencionado antes es de, aproximadamente, 38.000 *litros* lo que equivale a 38 m^3. Debatan junto con sus compañeras, compañeros y profesora o profesor los distintos procedimientos que les permiten obtener esta equivalencia. Queremos saber cuántos tanques pudiéramos llenar con nuestras reservas probadas de gas, para ello debemos calcular cuántas veces está contenido $38\ m^3 = 3{,}8 \cdot 10\ m^3$ (volumen aproximado del tanque) en $4.150.000.000.000\, m^3 = 4{,}15 \cdot 10^{12}\ m^3$ (reservas probadas de gas). Esto es, $4.150.000.000.000\, m^3 = 4{,}15 \cdot 10^{12}$ entre $3{,}8 \cdot 10$. Para hacer esta operación pueden ayudarse con la calculadora.

Operación	¿ Qué aplicamos ?
$4{,}15 \cdot 10^{12} \div 3{,}8 \cdot 10 = 415 \cdot 10^{10} \div 38$	Multiplicando por la unidad seguida de ceros
$4{,}15 \cdot 10^{12} \div 3{,}8 \cdot 10 = 10{,}92 \cdot 10^{10}$	Dividiendo 415 entre 38 y aproximando a la décima más cercana
$4{,}15 \cdot 10^{12} \div 3{,}8 \cdot 10^{10} = 109.200.000.000$	Multiplicando por la unidad seguida de ceros

A partir de estos cálculos nos damos cuenta de que si pudiéramos colocar todo el gas en reservas probadas que posee nuestro país en gandolas, como las que transportan gasolina, necesitaríamos 109.200.000.000 gandolas.

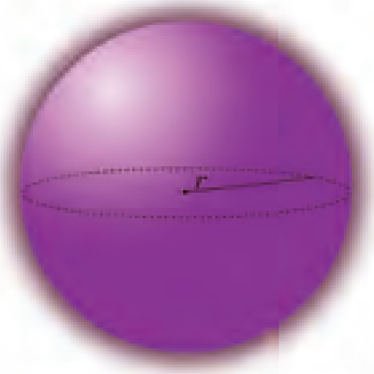
Las inmensas reservas probadas de gas, así como también las de petróleo, son una importante fuente de aporte fiscal, una palanca de desarrollo industrial, y una poderosísima herramienta geopolítica que ha permitido ir conformando una alianza estratégica con los pueblos del mundo.

1. Calculen el volumen de un cubo cuya arista mida $7\ cm$.



2. Calculen el volumen de un paralelepípedo cuyo largo, ancho y alto midan $12\ cm$, $8\ cm$ y $5\ cm$ respectivamente.

3. Calculen el volumen de una esfera de $6\ cm$ de radio.



Problemas relacionados con el cálculo de volumen de sólidos

1 La Gran Pirámide de Giza, en Egipto, es la única que perdura de las siete maravillas del mundo antiguo. Actualmente tiene una altura de $137\ m$ y la base es un cuadrado de $20\ m$ de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?

2 Se vierten $9\ cm^3$ de agua en un recipiente cilíndrico de $1{,}3\ cm$ de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

3 ¿Cuántas copas se pueden llenar con 6 *litros* de agua, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de $6{,}5\ cm$ y un radio interior de $3{,}6\ cm$?

4 El diámetro de la base de un cono circular mide $8\ cm$ y la altura del cono $16\ cm$. Hallar el área total y el volumen del cono.

5 En un vaso cilíndrico de $72\ cm$ de diámetro que contiene cierta cantidad de agua, se colocan dos bolas de plomo de igual diámetro y el nivel de agua sube $12\ cm$. Hallar el radio de estas bolas.

6 El diámetro de la Tierra es aproximadamente 4 veces el de la Luna y ambos cuerpos son esferas. ¿Cuál es la razón de sus volúmenes?

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Beatriz Marcano Coello (1915-1987)

Beatriz Marcano Coello nació en la población de Rio Caribe (Estado Sucre) el 10 de mayo de 1915.

Fueron sus padres Petra Coello Salazar y José Carmen Marcano Figuera, quienes se habían establecido en Carúpano en 1912. Proviene de una familia numerosa y polifacética, constituida por profesionales de diversas áreas: música, medicina, ingeniería, pedagogía.

Particular mención merece su hermana Gisela quien es maestra normalista y egresada del Instituto Pedagógico Nacional (IPN) en el año 1949, en la especialidad de Física y Matemáticas, quien ejerció una importante labor en el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) hasta su jubilación.

Nuestra biografiada siguió estudios primarios en la ciudad de Carúpano (Edo. Sucre) hasta el año 1923. Continuó luego sus estudios en Caracas, en el Patronato de San José de Tarbes.

A los 18 años de edad obtiene el título de maestra en la Escuela Normal. Beatriz Marcano pasa al recién fundado IPN, obteniendo allí los títulos Profesor de Educación Secundaria y Normal, tanto en Física como en Matemáticas, siendo integrante de la primera promoción de esa casa de estudios, cuyo acto protocolar —con toga y birrete- se llevó a cabo el 23 de junio de 1943.

Para la obtención del título de profesora de Física presentó la tesis "Aplicación de la presión atmosférica a la determinación de la densidad de los cuerpos porosos y pulverulentos".

A la muerte de su padre, en febrero de 1936, se vio en la necesidad de trabajar simultáneamente en un plantel diurno y en otro nocturno. Laboró para ese entonces como docente en la Escuela de Artes y Oficios, la cual funcionaba en las noches.

En los años 40, al poco tiempo de graduarse, Beatriz se desempeñó como profesora de matemáticas y física en el Liceo de Aplicación, plantel creado el 13 de octubre de 1936, ubicado en la Av. Páez, en Caracas, frente al IPN, local que hoy ocupa el Liceo "Edoardo Crema".

Eran aquellos los tiempos en los cuales predominaban las ideas de la Escuela Nueva dentro del magisterio venezolano y los primeros egresados del IPN empiezan a marcar pauta dentro de la educación secundaria venezolana.

Posteriormente, la profesora Marcano Coello se incorpora al personal docente del Liceo "Luis Razetti" y alcanza a ser Subdirectora de dicho plantel. Allí continúa con ahínco la labor por ella emprendida años atrás en el magisterio venezolano.

También fue profesora de matemáticas del Liceo "Andrés Bello", el más antiguo del país y llegó a ser Subdirectora de esta prestigiosa institución. Esto aconteció en el segundo lustro de la década de los 50 e inicios de los años 60.

Adicionalmente a sus labores en la educación pública, esta ilustre educadora fue fundadora en 1951, junto con el profesor Néstor Luis Negrón, de un plantel privado: el Instituto Experimental Ávila en el Paraíso (Caracas). Era ésta una institución educativa de nivel primario pensada para brindarle este servicio a los habitantes de esta zona residencial de Caracas.

Por una Resolución de fecha 14 de enero de 1959, emanada del Ministerio de Educación, se le confirió la Orden Andrés Bello, en su Tercera Clase (Medalla), a la profesora Beatriz Marcano Coello, como reconocimiento a su amplia y fructífera trayectoria docente.

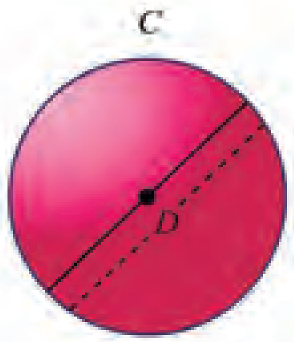
Beatriz Marcano Coello se jubila en el año 1962 dejando a su paso una provechosa labor pedagógica y formando a cientos de bachilleres que tuvieron el privilegio de ser sus alumnos. Nuestra biografiada fallece en la ciudad de Caracas el 27 de agosto de 1987.

El almacenamiento de granos

El almacenamiento de granos, tal es el caso del maíz y del sorgo, constituye un aspecto importante en el abastecimiento de tales rubros, así como del fortalecimiento del sistema socioproductivo en nuestro país. Los silos permiten almacenar (en condiciones físicas que contribuyan a su preservación y buen estado) grandes cantidades de granos, incluso los hay con capacidad para varias decenas de toneladas –ver por ejemplo, la foto anterior de algunos de los 9 silos del Complejo Agrario Manuel Ibarra-. La instalación de varios complejos de silos en nuestro país en los últimos años obedece a la necesidad de proveer de estos productos a buena parte de la población venezolana y, al mismo tiempo, combatir el acaparamiento y especulación de algunos grandes empresarios radicados en el país.

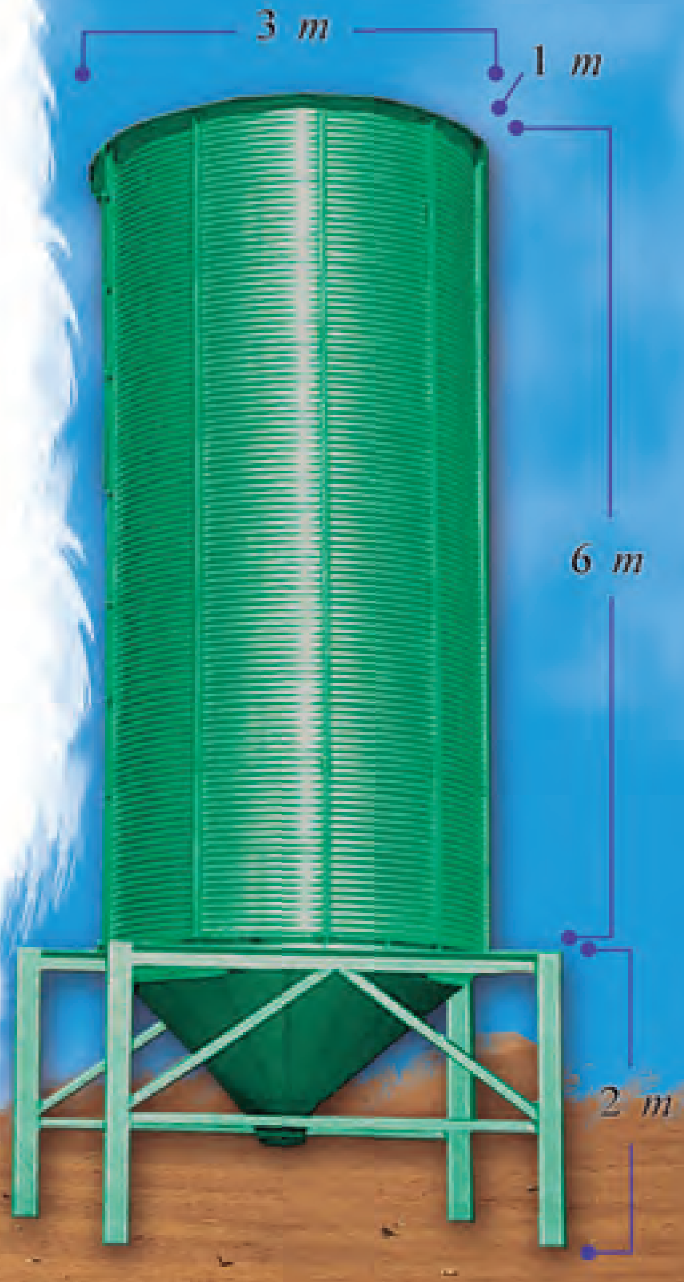
Calculando la capacidad de un silo

Un silo o contenedor para almacenar maíz, e incluso, para otros granos como el sorgo (justo dos de los cereales que se producen en grandes proporciones en nuestro país), tiene una sección cilíndrica y una cónica que permiten el almacenamiento y la descarga, y tiene además una sección esférica que le sirve de cubierta superior –aunque existen muchos tipos de silos-. Consideremos, por ejemplo, el de la figura adjunta y calculemos su volumen. Para ello debemos tener presente que el llenado de tal silo nunca alcanza el tope de la sección cilíndrica, de hecho, se recomienda que abarque el 75% de la altura del cilindro (tres cuartas partes de su altura), para atender las condiciones de humedad, temperatura y ventilación óptimas para este tipo de grano. También debemos recordar que el volumen de un cilindro de altura h y radio r es $V = \pi r^2 h$, donde π es el número 3,1416... (dado precisamente por la relación $\frac{C}{D}$, siendo C la longitud de una circunferencia cualquiera y D su diámetro).

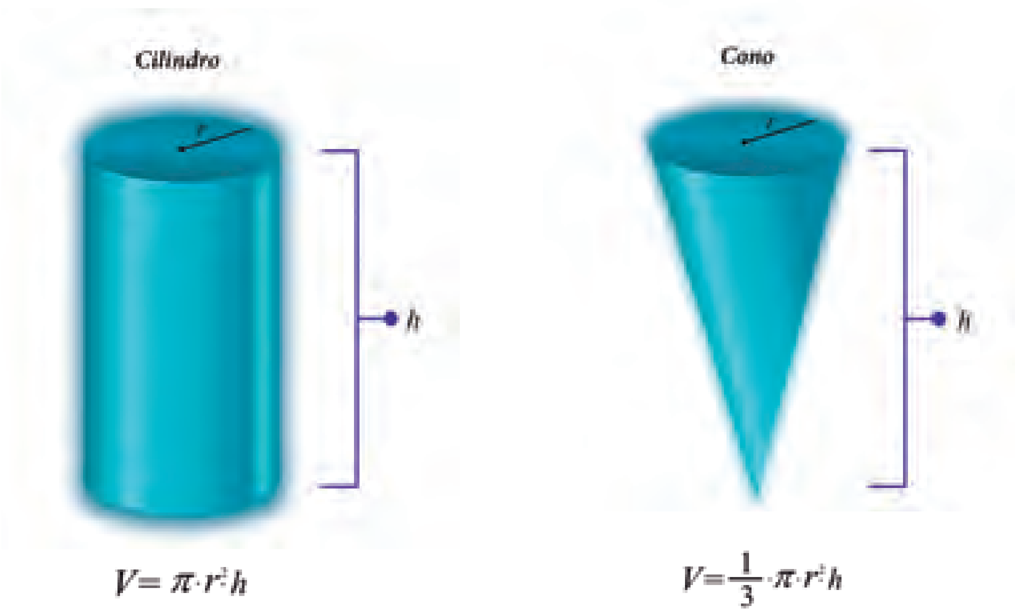


Entonces,

$$\frac{C}{D} = \pi \approx 3{,}1415$$



Pero además del volumen del cilindro, necesitamos el volumen de un cono (que sirve de desembocadura para la descarga del maíz; tal volumen está dado, como vimos anteriormente, por la ecuación $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde h es la altura del cono y r es el radio, de la base del cono así:



Observemos que, en el caso del cilindro, sus caras superior e inferior tienen por área $A_{\bigcirc} = \pi r^2$ y ésta, multiplicada por h, expresa el volumen de tal cilindro. Ahora, un cono con el mismo radio y altura tiene exactamente un tercio del volumen del cilindro.

Ya con esto podemos calcular el volumen del silo que describimos antes. Lo que haremos de la siguiente manera, como el volumen del silo es la suma de los volúmenes del cilindro y del cono, entonces:

$$V_{silo} = V_{cilindro} + V_{cono}$$

Aquí hemos escrito h_{ci} para representar la altura del cilindro (de allí el subíndice "ci"), y h_{co} para indicar la altura del cono. Pero sabemos, por la información que nos brinda el gráfico del silo, que, **el radio del cilindro es igual al radio del cono**, que la altura del cilindro es $6\ m$ y la del cono es $2\ m$.

Además, sabemos que el radio es justo un medio del diámetro dado.

Es decir:

$$h_{ci} = 6\ m$$

$$h_{co} = 2\ m$$

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}3m = \frac{3}{2}m = 1{,}5\,m$$

Con estos datos podemos continuar con el cálculo de V_{silo}.

$$V_{silo} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{ci} + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_{co}$$

$$V_{silo} = \pi(1,5\,m)^2\,6\ m + \frac{1}{3}\pi(1,5\,m)^2 \cdot 2\,m$$

$$= \pi(1,5\,m)^2\left(6\,m + \frac{1}{3} \cdot 2\,m\right)$$

$$= \pi(1,5\,m)^2\left(6\,m + \frac{2}{3}\ m\right)$$

$$= \pi\left(2,25\,m^2\right)\left(\frac{20}{3}m\right)$$

Observen que $\pi(1,5\ m)^2$ es un factor común a ambos sumandos.

Antes de seguir, expresemos a $2,25$ como una fracción: para ello hacemos $x = 2,25$. Y como hay una cantidad limitada de cifras decimales, multiplicamos a x por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga $2,25$ (precisamente dos). Entonces $100x = 225$.

$x = \frac{225}{100}$ Con lo cual: calculando el $MCD\ (225,100) = 25$

$$x = \frac{9}{4}$$

sustituyendo,

$$V_{silo} = \pi(2,25\ m)^2\left(\frac{20}{3}\ m\right)$$

$$= \pi\left(\frac{9}{4}\ m^2\right)\left(\frac{20}{3}\ m\right)$$

$$= 15\pi\,m^3$$

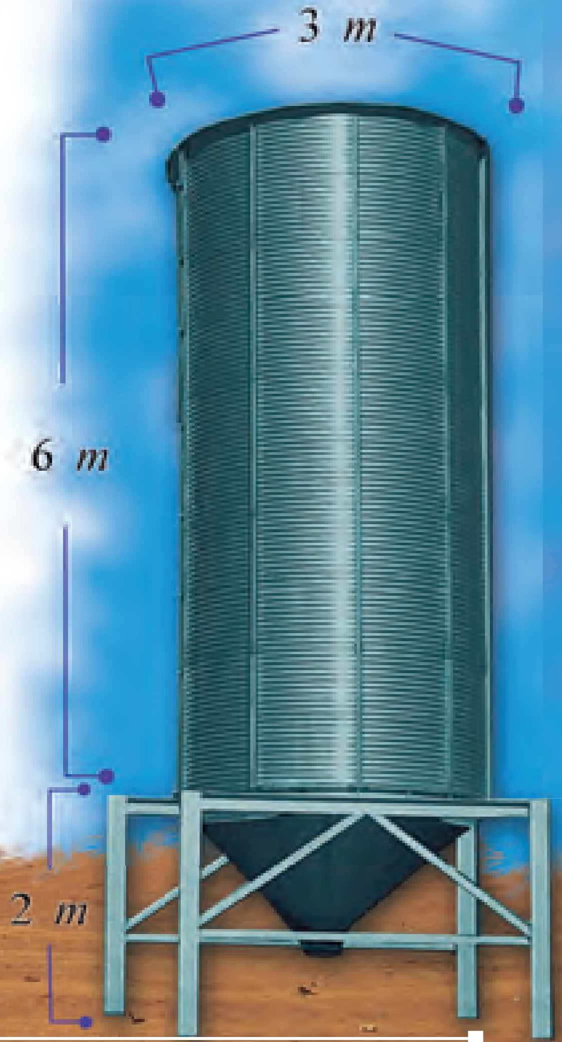
$$\approx 15 \cdot 3,1416\ m^3$$

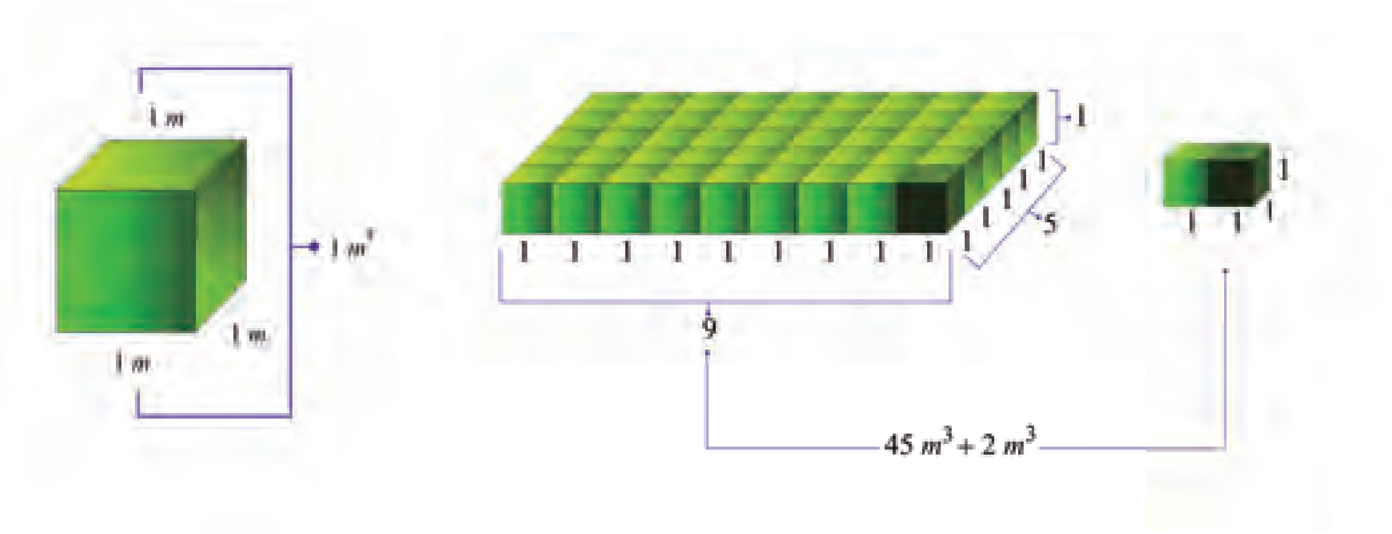
$$= 47,124\ m^3$$

Aquí, al multiplicar $m^2 \cdot m$, obtenemos m^3. Esto es una multiplicación de potencias de igual base.

En consecuencia, poco más de $47\ m^3$ (metros cúbicos) es la capacidad del silo.

Este volumen equivale al de un paralelepípedo de altura $1\ m$ y lados $9\ m$ y $5\ m$, más el de otro paralelepípedo de altura $1\ m$, y lados $2\ m$ y $1\ m$.





Fíjense que el silo, con un diámetro de 3 m, es un almacenamiento eficiente porque ocupa menos superficie del suelo.

El volumen del silo hasta un 75 % de la altura del cilindro

Naturalmente que, como advertimos al comienzo, el silo no debe llenarse completamente, sino hasta un 75 % (aproximadamente) de la altura del cilindro. Es decir, hasta un:

$$0,75 \cdot 6\ m = 4,5\ m$$

Recordemos que para calcular el 75 % de 6, debemos resolver la regla de tres que exponemos:

$$\begin{array}{l} 100\,\% \ \rightarrow \ 6 \\ 75\,\% \ \rightarrow \ x \end{array}$$

- ¿Cómo se obtiene el valor de x?
- Comparen este procedimiento con el que expusimos antes.

Con todo lo anterior podemos calcular el volumen del silo hasta el 75 % de la altura del cilindro, es decir, esto nos dará información del volumen de maíz (o de algún otro grano) que podemos almacenar en él. A este volumen lo denotaremos con el símbolo $V_{llenado}$. Por lo tanto, a la fórmula del volumen del silo que utilizamos anteriormente le ajustaremos la altura del cilindro, de 6 m a 4,5 m, lo cual equivale al 75%.

Veamos:

$$V_{llenado} = \pi \cdot (1{,}5\,m)^2\, 4{,}5\,m + \frac{1}{3}\pi \cdot (1{,}5\,m)^2 \cdot 2\ m$$

Calculamos el volumen como la suma de dos volúmenes, ajustando la altura del cilindro

$$= \pi (1{,}5\ m)^2 \left(4{,}5\ m + \frac{1}{3} \cdot 2\,m\right)$$

Extraemos factor común

$$= \pi \cdot 2{,}25\,m^2 \cdot \left(\frac{9}{2}m + \frac{2}{3}m\right)$$

Expresamos $4{,}5 = \frac{9}{2}$ y calculamos $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

$$= \pi \cdot 2{,}25\,m^2 \cdot \frac{27+4}{6}m$$

Sumamos las fracciones

$$= \pi \cdot \frac{9}{4}m^2 \cdot \frac{31}{6}m$$

$$= \frac{93}{8}\pi\ m^3$$

Multiplicamos las fracciones y simplicamos el resultado

$$\approx \frac{93}{8}\ 3{,}1415\,m^3$$

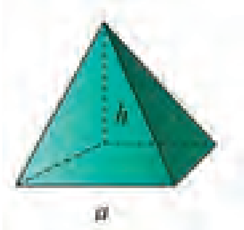
$$\approx 36{,}5199\ m^3$$

Tomamos cuatro decimales del número π. Por esta razón hemos empleado el símbolo $\approx$ (que significa “es aproximado a”) obtuvimos el volumen del silo hasta el 70% de la altura del cilindro

Antes de continuar, les sugerimos discutir las preguntas:

- ¿Cuál es el volumen de los siguientes cuerpos?

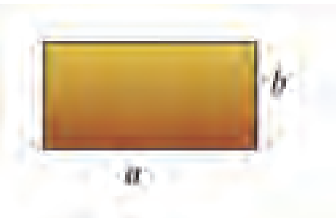
Paralelepípedo



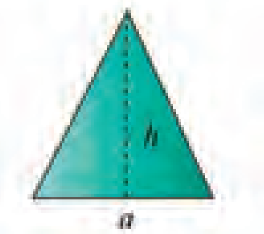
Pirámide de base cuadrada

Esfera

- ¿Y el área de las figuras indicadas?



Rectángulo



Triángulo

Círculo

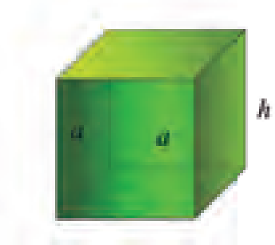
- ¿Qué otros otros cuerpos han estudiado anteriormente? Construyan una tabla en la que representen varios cuerpos e indiquen su volumen.
- Realicen la actividad anterior pero ahora considerando figuras planas y sus áreas.

Un silo especial

En este caso, el silo que ilustramos a continuación está compuesto de dos cuerpos: uno es un paralelepípedo y el otro una pirámide de base cuadrada (observemos que sobre el paralelepípedo se dispuso un techado que permite la ventilación del almacén y protege al silo de las lluvias y del sol). Como sabemos, los volúmenes del paralelepípedo y de la pirámide de base cuadrada son:

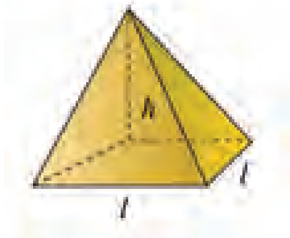
$V = a^2 \cdot h$ y $V = \frac{1}{3} h \cdot l^2$, respectivamente.

Paralelepípedo



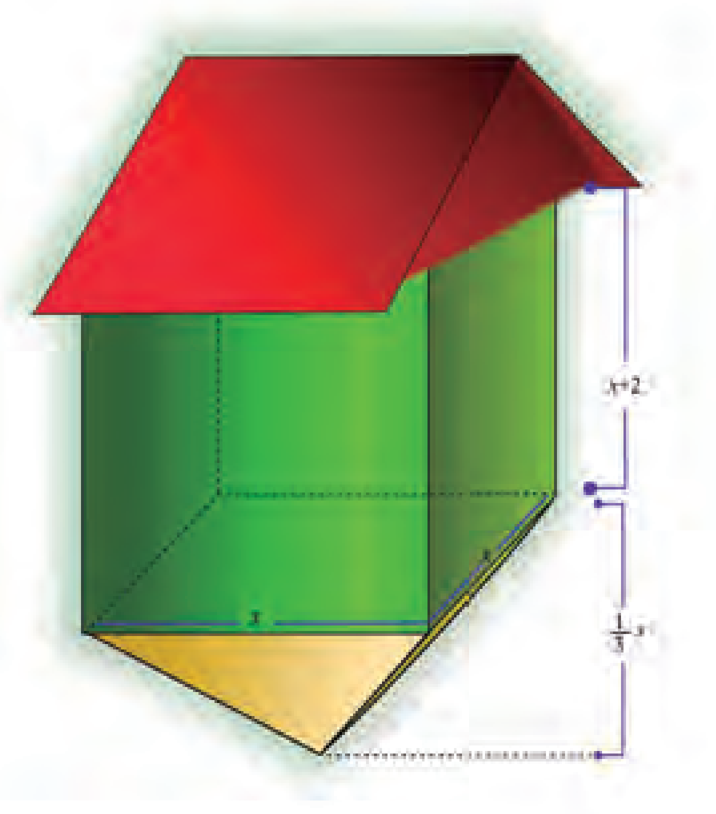
$$V = a \cdot a \cdot h$$

Pirámide de base cuadrada



$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot l^2$$

En el caso del paralelepipedo, el volumen es el producto de las medidas de los lados de la base por la medida de la altura. Y en el caso de la pirámide, el volumen es un tercio del producto de su altura por el área de la base. Entonces, considerando estas fórmulas, y sustituyendo por las medidas expresadas en términos de x de los cuerpos que conforman el silo. Así el volumen del paralelepípedo de base cuadrada de este silo especial es $V = x \cdot x \cdot (x+2)$, ya que $h = x+2$. Y el volumen de la pirámide de base cuadrada (la que permite la descarga de los granos) es $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot l^2$, sustituyendo por los valores respectivos tenemos que: $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} x\right) \cdot x^2$.



$$\begin{aligned} V_{silo\ especial} &= V_{paralelepípedo} + V_{pirámide} \\ &= x \cdot x \cdot (x+2) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} x \cdot x^2\right) \\ &= x^2 \cdot (x+2) + \frac{1}{9} x \cdot x^2 \\ &= x^3 + 2x^2 + \frac{1}{9} x^3 \\ &= \frac{10}{9} x^3 + 2x^2 \end{aligned}$$

Debatan con sus compañeras y compañeros los argumentos (propiedades o definiciones) que empleamos en los cálculos anteriores.

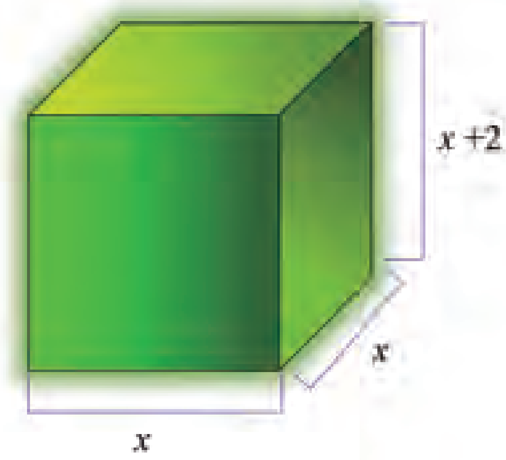
Expongan sus observaciones y dudas ante todo el grupo y solvéntelas con ayuda de su profesora o profesor.

Por ejemplo, si $x = 3$, entonces:

$$\begin{aligned} V_{silo\ especial} &= V_{paralelepípedo} + V_{pirámide} \\ &= \frac{10}{9}(3)^3 + 2(3)^2 \\ &= \frac{10}{9} \cdot 27 + 2 \cdot 9 \\ &= 30 + 18 \\ &= 48 \end{aligned}$$

En consecuencia, la capacidad máxima de almacenamiento de este silo especial es de 48 m^3 (cuarenta y ocho metros cúbicos). Aunque acá volvemos a recordar que nunca deben llenarse hasta el tope, en este caso, el silo debe llenarse hasta el 75% de la altura del paralelepípedo.

Multiplicación de polinomios



Recordemos que en el silo especial expresamos los lados de la base del paralelepípedo en términos de x, y su altura también en términos de x. Es decir, hemos representado los lados de la base y la altura con los polinomios:

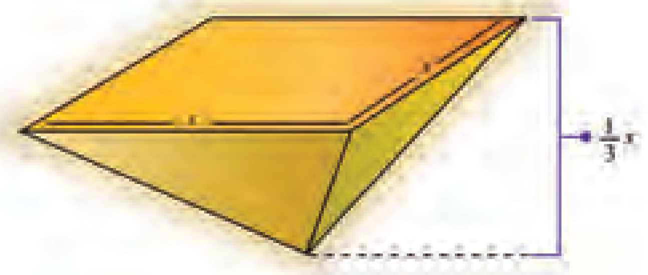
$$x$$
$$x$$
$$x + 2$$

Al multiplicar los polinomios $x \cdot x$, obtenemos x^2, que es precisamente el área del cuadrado de lado x.

Y al multiplicar el área de este cuadrado (que es la base del paralelepípedo) por su altura, tenemos que $x^2(x+2) = x^3 + 2x^2$, que es el volumen del paralelepípedo dado.

Es decir, la multiplicación de polinomios nos permite, por ejemplo, expresar el área de figuras planas y el volumen de ciertos cuerpos en función de una variable x.

Veamos otro ejemplo: en esta pirámide, las medidas de su base cuadrada y la altura se expresan en función de la variable x, es decir, en función de los polinomios x y $\frac{1}{3}x$:



Como el volumen de la pirámide de base cuadrada es: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} h \cdot l^2$

Entonces, en este caso, podemos escribirlo como el producto de polinomios:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x^2 \qquad V_{pirámide} = \frac{1}{9} x^3$$

El volumen de cuerpos, como el cilindro o el cono, también puede expresarse como la multiplicación de polinomios de variable x, siempre y cuando expresemos su radio y altura en términos de esta variable.

Para multiplicar dos polinomios $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ y $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$ se utiliza la propiedad distributiva del producto respecto a la adición y las propiedades de la potenciación.

Veamos un par de ejemplos más:

Ejemplo. Supongamos que tenemos un diseño de un recipiente para almacenar granos con forma de paralelepípedo. Los lados de su base están dados por los polinomios $3x$ y $3x+1$. Y su altura está dada por el polinomio $5x$. Responderemos dos preguntas: ¿Cuál es la medida de su superficie? (lo que permitiría estimar la cantidad de material requerido para su construcción) y, ¿cuál es su capacidad?

Respondamos la primera pregunta. Como sabemos, la medida de su superficie es la suma de las áreas de las 6 caras del paralelepípedo. Y observando con más detalle la figura adjunta, notaremos que las caras opuestas tienen la misma área. Los polinomios que siguen representan estas áreas (observen el paralelepípedo anterior).

$3x \cdot 5x$	¿Por qué?
$3x \cdot (3x+1)$	¿Por qué?
$5x \cdot (3x+1)$	¿Por qué?

Por tanto, la medida de la superficie de este contenedor se calcula sumando las áreas correspondientes a las seis caras del paralelepípedo.

$$A = 2 \cdot 3x \cdot 5x + 2 \cdot 3x \cdot (3x+1) + 2 \cdot 5x \cdot (3x+1)$$

Multiplicamos los números enteros:

$$= 30x^2 + 6x \cdot (3x+1) + 10x \cdot (3x+1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto a la adición:

$$= 30x^2 + 18x^2 + 6x + 30x^2 + 10x$$

y sumamos los términos restantes:

$$= 78x^2 + 16x$$

Ahora *respondamos la segunda pregunta*. En este caso su capacidad es:

$$V = 3x \cdot (3x+1) \cdot (5x)$$

Y solo nos falta calcular este producto.

$$V = 3x \cdot (3x+1) \cdot (5x)$$

$$= (9x^2 + 3x) \cdot (5x)$$ Aquí multiplicamos $3x \cdot (3x+1)$

$$= 45x^3 + 15x$$ Y nuevamente aplicamos la propiedad distributiva

Notemos que los dos últimos términos no son semejantes, por tal razón allí se detienen nuestros cálculos. Si asignáramos algún número a x, entonces obtendríamos un valor para esta capacidad.

¿De qué otra forma podemos calcular el producto de dos polinomios? Una manera muy común en la práctica consiste en disponer los polinomios a multiplicar tal como hacemos con los números enteros o naturales desde la escuela primaria, es decir, uno sobre el otro. Aquí debemos tener el cuidado de ordenarlos desde el grado mayor, al menor (aunque también se pueden ordenar desde el grado menor al mayor, como vimos en una lección anterior). Veamos: multipliquemos en primer lugar a los polinomios:

$$3x \text{ y } 3x + 1$$

Entonces:

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ 3x \\ \hline 9x^2+3x \end{array}$$

Fíjense que aquí multiplicamos $3x$ por cada uno de los términos del polinomio $3x + 1$.

Finalmente, multiplicamos el polinomio $9x^2 + 3x$ por $5x$.

$$\begin{array}{r} 9x^2+3x \\ 5x \\ \hline 45x^3+15x^2 \end{array}$$

Ustedes deben seleccionar cuál de estas dos formas de calcular el producto de dos polinomios les resulta más cómoda.

Otro ejemplo es: sean los polinomios $2x^3 - \frac{1}{2}x + 1$ y $-x^2 + x - 2$. Calculemos su producto.

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & & -\frac{1}{2}x & +1 \\ & & & -x^2 & +x & -2 \\ \hline & & -4x^3 & & +x & -2 \\ & 2x^4 & & -\frac{1}{2}x^2 & +x & \\ -2x^5 & & +\frac{1}{2}x^3 & -x^2 & & \\ \hline -2x^5 & +2x^4 & -\frac{7}{2}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & +2x & -2 \end{array}$$

- Observemos que dejamos un espacio en blanco entre $2x^3$ y $-\frac{1}{2}x+1$, ya que el término de grado dos es cero (por ello se anula y no es necesario copiarlo).
- Luego multiplicamos -2 (el último término del segundo polinomio) por cada uno de los términos del primer polinomio. Estos resultados los anotamos debajo de la línea, teniendo cuidado de dejar un espacio en blanco para los términos faltantes.
- Ahora multiplicamos el término x del segundo polinomio, por cada uno de los términos del primer polinomio y colocamos los resultados una línea más abajo (teniendo el cuidado de que los términos que queden en una misma columna tengan el mismo grado).
- Repetimos este proceso ahora con el término x-2.
- Por último, sólo debemos sumar los términos que están en una misma columna (y los disponemos debajo de la última línea).

En consecuencia: $\left(2x^3-\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\left(-x^2+x-2\right)=2x^5+2x^4-\frac{7}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-2.$

En la multiplicación de polinomios se verifican las propiedades siguientes:

- El producto de un polinomio cualquiera con el polinomio cero es el polinomio cero: $P(x)\cdot 0=0$.
- El producto de un polinomio cualquiera con el polinomio uno es el mismo polinomio: $P(x)\cdot 1=P(x)$.
- Si $P(x)$ es un polinomio de grado n y $Q(x)$ es un polinomio de grado m, entonces $P(x)\cdot Q(x)$ tiene grado $n+m$.

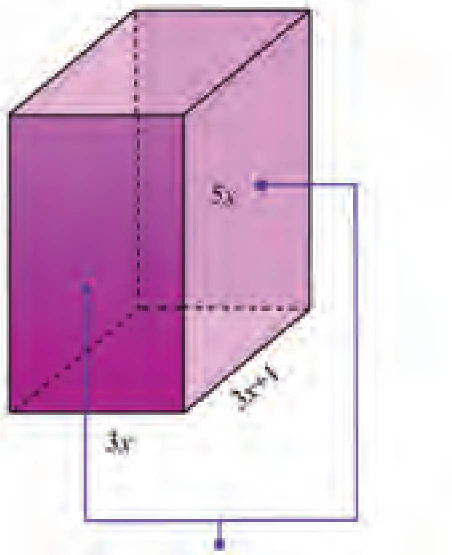
Con ayuda de su profesora o profesor comprueben la primera y segunda propiedad.

Presenten su demostración ante todo el curso.

Den ejemplos de la tercera propiedad y discútanlos con detalle en el curso.

Silos ubicados en Caracas, Distrito Capital

Multiplicación de una constante por un polinomio



$2\cdot(3x\cdot 5x)$

Recordemos el momento en el que multiplicamos un número por el polinomio que representaba el área de una de las caras del paralelepípedo adjunto, por ejemplo, la cara frontal. A esto se le denomina multiplicar una constante (un número cualquiera) por un polinomio. En general, el producto del polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$ por la constante c es:

$$
\begin{aligned}
cP(x)&=c\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\right)\\
&=ca_nx^n+ca_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ca_2x^2+ca_1x^1+ca_0
\end{aligned}
$$

Es decir, esta constante multiplica a cada uno de los términos del polinomio $P(x)$. Como vemos, esta multiplicación es mucho más sencilla que la multiplicación de polinomios que estudiamos antes.

- Otra pregunta para la discusión grupal: los grados de los polinomios $P(x)$ y $cP(x)$ ¿son iguales o distintos?
- ¿Y si la constante es 0?

Actividades

En las actividades que presentamos a continuación necesitarán calculadora, regla y compás. Estas pueden desarrollarse en pequeños grupos de trabajo y socialicen los resultados, las dudas y otros problemas.

- Calculen el producto de los polinomios que siguen.

$$P(x)=2x^3+2x^1-1 \text{ y } Q(x)=11x^2+x^1-3$$

$$P(x)=x^4-x^3+3x^1+1 \text{ y } Q(x)=x-2$$

$$P(x)=x^4+1 \text{ y } Q(x)=x-1$$

$$P(x)=x-1 \text{ y } Q(x)=x+1$$

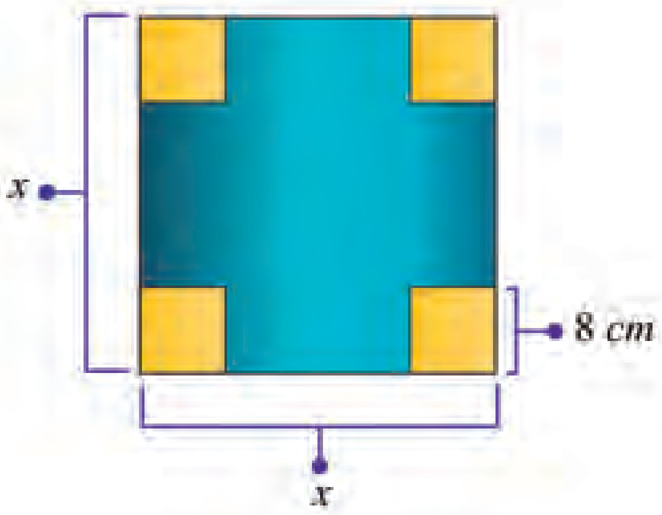
$$P(x)=\frac{3}{4}x^2-x \text{ y } Q(x)=\frac{2}{3}x^2+4$$

Diseñen (con papel y lápiz) un silo que tenga una capacidad aproximada de $10\ m^3$. Empleen los instrumentos geométricos (regla y compás). ¿Qué medidas deben tener su radio y su altura?

Más allá de los silos: diseñen, además, varios tanques que permitan almacenar agua. Alguno con forma de paralelepípedo, pero incluyan otros donde intervengan secciones esféricas, cilindros, pirámides o conos. Estos diseños deben incluir las medidas. Por último, calculen la capacidad de cada uno de estos tanques.

Un problema más: disponemos de una lámina (que permite dobleces) cuyos lados miden x. Con ella debemos construir un recipiente con forma de caja (veamos la figura adjunta). Para ello debemos suprimir (cortar) los cuadrados indicados. La caja debe tener una capacidad de $1.500\ cm^3$. ¿Cuál debe ser el valor de x?

Imaginen cómo será la caja y dibújenla en sus cuadernos. (a) ¿Cuál será la medida de la base? (b) ¿Cuál será la medida de su altura? (c) ¿Cuál es el área de la lámina luego de recortar los cuatro cuadrados? (d) Comparen sus resultados con los de los demás grupos de trabajo y discútanlos con su profesora o profesor.



Investiguemos

Si el volumen de un silo cilíndrico es $200\ m^3$ (con la forma que tienen los del Complejo Agrario Manuel Ibarra). ¿Cuál podría ser su altura y su radio?

Investiguen sobre otros usos y aplicaciones de la multiplicación de polinomios.

Anímense a divulgar los resultados de sus proyectos así como la solución de sus problemas en el periódico de su liceo.

Investiguen cuáles países Latinoamericanos y Caribeños tienen una alta producción de granos?

¿En qué regiones de Venezuela se encuentran grandes silos para granos? ¿Qué tipo de granos se almacenan en ellos? Ayúdense del gráfico que se presenta, para ubicar los resultados de su investigación.

- ¿Cuál es la capacidad de almacenamiento de los silos que investigaron?
- ¿Con qué materiales podrían construirse?
- Conversen sobre la dimensión socioeconómica y productiva del programa de instalación de silos para el almacenamiento de granos alimenticios.

Los productos notables

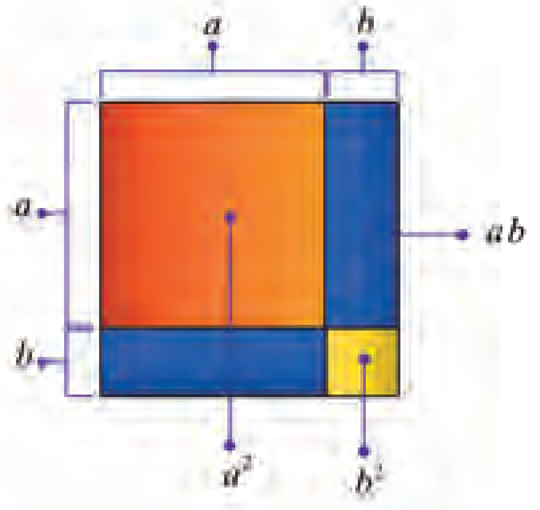
Hay productos de polinomios, que por la estructura de sus factores, pueden obtenerse sin necesidad de seguir los procedimientos que hemos mostrado en esta lección; tal tipo de productos se denominan **productos notables**. Recuerden que al inicio de este libro nos aproximamos a los productos notables.

El cuadrado de una suma $(a+b)^2$. Consideremos, por ejemplo, el cuadrado que sigue. En él, los lados del cuadrado de mayor área miden $a+b$. Pero el gráfico nos da una buena idea de cómo escribir el área de este cuadrado: ésta es justo la suma de las áreas de los rectángulos destacados en rojo, azul y amarillo. Por tanto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Lo cual puede leerse así: “El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término”.

Este tipo de gráficos resulta importante al pensar en los productos notables.



El cuadrado de una suma $(a - b)^2$: si partimos del producto notable anterior, podemos escribir $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 - 2ab + b^2$, es decir $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Producto de dos factores con un término común

Ahora bien, dados los siguientes polinomios:

$$p_1(x) = x + 2$$
$$p_2(x) = x + 3$$
$$p_3(x) = x + 4$$
$$p_4(x) = x + 5$$
$$p_5(x) = x + 9$$
$$p_6(x) = x + 10$$

Realicen colectivamente los siguientes productos:

$$p_1(x) \cdot p_2(x)$$
$$p_3(x) \cdot p_4(x)$$
$$p_5(x) \cdot p_6(x)$$

Silo para cacao

Si tenemos los siguientes polinomios:

$$p(x) = x + a$$
$$q(x) = x + b$$

El resultado de multiplicar $p(x)$ por $q(x)$ es:

$$p(x)\cdot q(x)=(x+a)\cdot(x+b)=x^2+bx+ax+b^2=x^2+(a+b)x+b^2$$

Es decir, para cualquier número racional x, a y b:

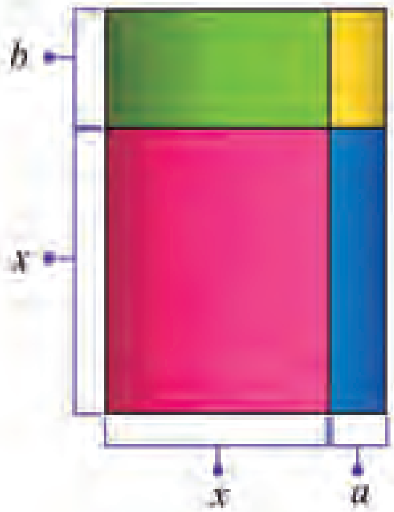
$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+b^2$$

Comparen este resultado con los obtenidos anteriormente y con el gráfico adjunto. Socialicen con sus compañeras y compañeros sus razonamientos.

Suma por su diferencia

Dados los siguientes polinomios:

$$p_7(x)=x+8$$
$$p_8(x)=x-8$$
$$p_9(x)=x+6$$
$$p_{10}(x)=x-6$$
$$p_{11}(x)=x+9$$
$$p_{12}(x)=x-9$$



Realicen colectivamente los siguientes productos:

$$p_7(x)\cdot p_8(x)$$
$$p_9(x)\cdot p_{10}(x)$$
$$p_{11}(x)\cdot p_{12}(x)$$

Si tenemos los siguientes polinomios:

$$p(x)=x+b$$
$$q(x)=x-b$$

Donde b es cualquier número racional.

El resultado de multiplicar $p(x)$ por $q(x)$ es:

$$p(x)\cdot q(x)=(x+b)\cdot(x-b)=x^2-bx+bx-b^2=x^2-b^2$$

Es decir, para cualquier número racional x y b:

$$\left(x+b\right)\cdot\left(x-b\right)=x^2-b^2$$

Comparen este resultado con los obtenidos anteriormente. Socialicen con sus compañeras y compañeros sus razonamientos.

Producto de la forma $\left(x+a\right)\cdot\left(x^2-ax+a^2\right)$

Dados los siguientes polinomios:

$$p_{13}\left(x\right)=x+3$$
$$p_{14}\left(x\right)=x^2-3x+9$$
$$p_{15}\left(x\right)=x+5$$
$$p_{16}\left(x\right)=x^2-5x+25$$
$$p_{17}\left(x\right)=x+7$$
$$p_{18}\left(x\right)=x^2-7x+49$$

Realicen colectivamente los siguientes productos:

$$p_{13}\left(x\right)\cdot p_{14}\left(x\right)$$
$$p_{15}\left(x\right)\cdot p_{16}\left(x\right)$$
$$p_{17}\left(x\right)\cdot p_{18}\left(x\right)$$

Si tenemos los siguientes polinomios:

$$p\left(x\right)=x+a$$
$$q\left(x\right)=x^2-ax+a^2$$

donde a es cualquier número racional.

El resultado de multiplicar $p\left(x\right)$ por $q\left(x\right)$ es:

$$p\left(x\right)\cdot q\left(x\right)=\left(x+a\right)\cdot\left(x^2-ax+a^2\right)=x^3-ax^2+a^2x+ax^2-a^2x+a^3=x^3+a^3$$

Es decir, para cualquier número racional x y a:

$$(x+a)\cdot\left(x^2-ax+a^2\right)=x^3+a^3$$

Comparen este resultado con los obtenidos anteriormente. Socialicen con sus compañeras y compañeros sus razonamientos.

Producto de la forma $(x-a)\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)$

Dados los siguientes polinomios:

$$p_{19}(x)=x-13$$
$$p_{20}(x)=x^2+13x+169$$
$$p_{21}(x)=x-11$$
$$p_{22}(x)=x^2+11x+121$$
$$p_{23}(x)=x-7$$
$$p_{24}(x)=x^2+7x+49$$

Realicen colectivamente los siguientes productos:

$$p_{19}(x)\cdot p_{20}(x)$$
$$p_{21}(x)\cdot p_{22}(x)$$
$$p_{23}(x)\cdot p_{24}(x)$$

Si tenemos los siguientes polinomios:

$$p(x)=x-a$$
$$q(x)=x^2+ax+a$$

donde a es cualquier número racional.

El resultado de multiplicar por es:

$$p(x)\cdot q(x)=(x-a)\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)=x^3+ax^2+a^2x-ax^2-a^2x-a^3=x^3-a^3$$

Es decir, para cualquier número racional x y a:

$$(x-a)\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)=x^3-a^3$$

Comparen este resultado con los obtenidos anteriormente. Socialicen con sus compañeras y compañeros sus razonamientos.

Como ven, los productos notables se vinculan estrechamente, por ejemplo, con los cálculos del área de ciertas figuras planas y del volumen de paralelepípedos.

Silos
La Guaira, edo. Vargas

9 Datos encriptados

¿Por qué “encriptar” datos?

En la lección anterior estudiamos la multiplicación de polinomios y una de sus aplicaciones: justo su uso en el cálculo del área de ciertas figuras planas y del volumen en algunos cuerpos. En esta nueva lección mostraremos una de las tantas aplicaciones de la división de polinomios: la encriptación de datos, es decir, “proteger” datos dentro de otros con la intención de que solo sean descifrados por la o las personas que tienen cierta información necesaria para ello. Aunque debemos acotar que la encriptación de datos no solo se puede hacer a través de la división de polinomios, sino también con otras operaciones y con otros conceptos matemáticos (como las ecuaciones o las funciones, por ejemplo).

La encriptación de datos tiene grandes y numerosas aplicaciones: (1) en las claves (contraseñas) empleadas para nuestros correos electrónicos, (2) en las transacciones bancarias realizadas por Internet, (3) en el ámbito de la seguridad nacional, (4) en las comunicaciones satelitales, (5) en los códigos para el Registro de Identificación Fiscal (RIF), (6) en las claves de las tarjetas con banda o chip, (7) en el manejo de programas para controlar los sistemas de perforación del suelo, (8) para transferir y recibir datos al y desde el Satélite Simón Bolívar, entre otras. En todos estos casos, encriptar datos se asocia con temas como la seguridad en las transacciones bancarias, en la inviolabilidad de las plataformas de servicios de internet y telecomunicaciones, e incluso, en la seguridad nacional y en la soberanía. Además, la encriptación de datos tiene una historia sumamente rica alrededor del mundo, en especial en los pueblos originarios de nuestra América.

División de polinomios

La encriptación de datos se fundamenta en temas matemáticos (algebraicos y de teoría de números) muy complejos.

La encriptación que sigue se basa en la **división de polinomios**. Erick envía un mensaje secreto (o codificado) a Marié a través de internet, sus datos se corresponden con una clave necesaria para acceder a cierta información. El mensaje de Erick consta de un polinomio $P(x)$. Al recibirlo, Marié debe dividir ese polinomio entre otro que solamente conoce ella, que llamaremos $Q(x)$. **La clave que ella necesita consiste en los coeficientes del polinomio resultante (polinomio cociente)**.

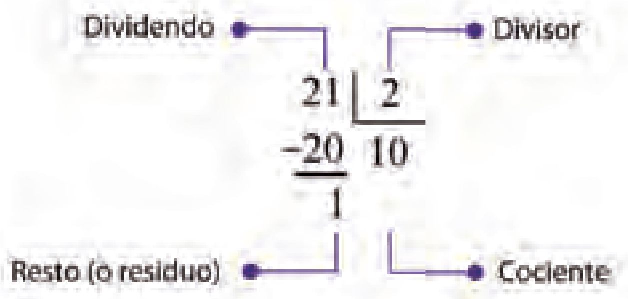
Fíjense que si el polinomio $P(x)$ es interceptado, es decir, si otra persona lo llega a conocer, aún así no podrá deducir la clave, pues no tiene al polinomio $Q(x)$. Ésta es una de las tantas formas de "encriptar" un mensaje. Naturalmente, Marié conoce muy bien cómo dividir polinomios, proceso que mostraremos a través de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Supongamos que Erick envía a Marié el polinomio $P(x) = 6x^3 + 10x^2 - x + 2$ y que ella tiene el polinomio $Q(x) = 2x + 1$. Antes de seguir les proponemos que respondan las preguntas:

- ¿Cuál es el grado de estos polinomios?
- ¿Están ordenados?
- ¿Cuántos términos tiene cada uno?
- ¿Están completos?
- ¿Cuáles son sus coeficientes? (Como recordaremos, la socialización de estos temas la hicimos en las lecciones sobre el VIH y los silos).

Ahora, ¿cómo dividimos al polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$?

Dividir dos polinomios es un proceso similar a la división de números enteros. Observemos que, por ejemplo, al dividir 21 entre 2, el cociente es 10 y el resto (o residuo) es 1.



Aquí se verifica que $21 = 10 \cdot 2 + 1$. Es decir, "el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto" y el resto es menor que el divisor.

Paso 1. Debemos ordenar de forma decreciente y completar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Paso que omitiremos, pues ya están ordenados desde el término que le da el grado al polinomio (desde el mayor exponente) hasta el término independiente.

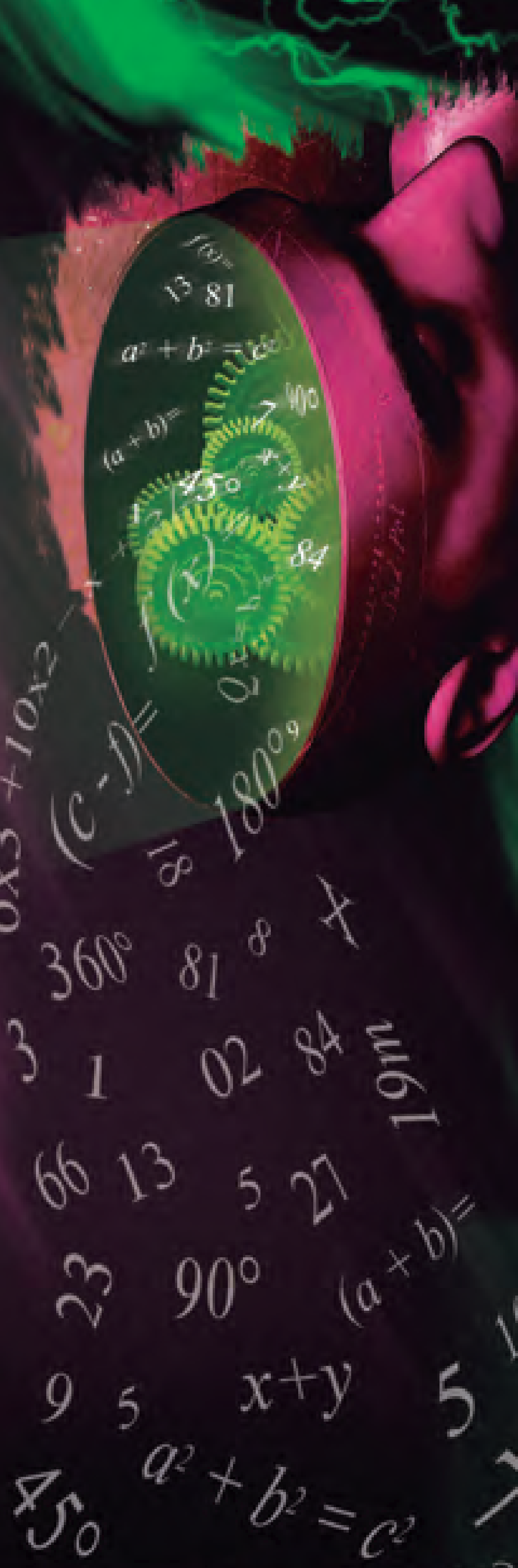
Paso 2. Luego de ello, los disponemos tal como en una división de números enteros. Veamos:

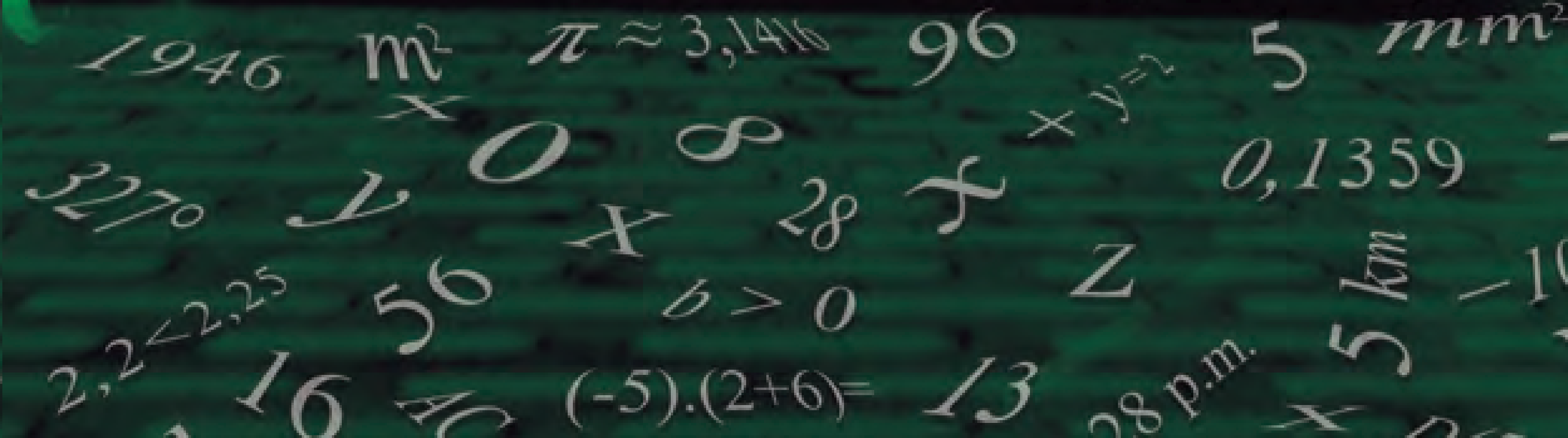
$$6x^3 + 10x^2 - x + 2 \;\underline{\big|\;\; 2x+1 \qquad}$$

Paso 3. Consideramos ahora el primer término (de izquierda a derecha) del dividendo, esto es, al término $6x^3$. Y lo dividimos entre el primer término del divisor $2x$ (también de izquierda a derecha); ello puede escribirse como sigue: $\frac{6x^3}{2x} = \frac{6x^3}{2x^1} = 3x^{3-1} = 3x^2$. Observemos que $x = x^1$ (aunque por comodidad no suele escribirse este exponente). Además, dividimos los coeficientes (seis entre dos) y dividimos potencias de igual base $\frac{x^3}{x^1}$ (que como recordaremos desde la escuela primaria es igual a esa misma base con exponente $3-1=2$. Con lo cual, $\frac{x^3}{x^1} = x^2$).

El término $3x^2$ es el primer término del *cociente*, por ello lo escribimos debajo de la línea horizontal que hemos trazado.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 + 10x^2 - x + 2 & \;2x+1 \qquad \\ \cline{2-2} & \;3x^2 \end{array}$$





Paso 4. Ahora multiplicamos el término $3x^2$ por cada uno de los términos del divisor. Esto es, $3x^2 \cdot (2x+1) = 6x^3 + 3x^2$ (aquí nos apoyamos en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición). Debemos cambiarle el signo a este producto y escribirlo debajo del polinomio $P(x)$. Tal y como hicimos en el ejemplo numérico donde al producto de $2 \cdot 10 = 20$ le cambiamos el signo, es decir colocamos -20.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+10x^2-x+2 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -6x^3 \quad -3x^2 \qquad\qquad & 3x^2 \end{array}$$

Paso 5. En este momento debemos sumar al polinomio $P(x)$ con el que hemos escrito debajo de éste.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+10x^2-x+2 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -6x^3 \quad -3x^2 \qquad\qquad & 3x^2 \\ \cline{1-1} 7x^2-x+2 & \end{array}$$

Notemos que $6x^3 - 6x^3 = 0x^3 = 0$. Por tal razón no escribimos el término de grado tres en el polinomio resultante. Pero aquí no termina la división, pues debemos reiterar los pasos $1, 2, 3, 4$ y 5 tomando ahora al primer término del polinomio que obtuvimos con la suma anterior, en nuestro caso particular es el término $7x^2$. Estos cálculos en extenso los mostramos enseguida:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+10x^2-x+2 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -6x^3 \quad -3x^2 \qquad\qquad & 3x^2+\frac{7}{2}x-\frac{9}{4} \\ \cline{1-1} 7x^2-x+2 & \\ -7x^2-\frac{7}{2}x \quad & \\ \cline{1-1} -\frac{9}{2}x+2 & \\ \frac{9}{2}x+\frac{9}{4} & \\ \cline{1-1} \frac{17}{4} & \end{array}$$

Y como el cociente es $3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{4}$. Marié solo debe ver sus coeficientes: tres, siete medios y menos nueve cuartos. **¡Esa es justo la clave que necesita para acceder a una información que ha sido protegida con tal código!** Como advertirán, no siempre es fácil encontrar o descifrar ciertas claves, códigos o mensajes encriptados. (Les pedimos que verifiquen todos los cálculos de esta división, pues allí intervienen las operaciones con números enteros y racionales, la multiplicación y división de potencias de igual base, así como la adición, sustracción y multiplicación de polinomios).

El algoritmo de la división de polinomios

Así como en la división de números enteros, es posible escribir que:

$$\underbrace{6x^3+10x^2-x+2}_{\text{Dividendo}}=\underbrace{(2x+1)}_{\text{Divisor}}\underbrace{\left(3x^2+\frac{7}{3}x-\frac{9}{4}\right)}_{\text{Cociente}}+\underbrace{\frac{17}{4}}_{\text{Residuo}}$$

Así, la división de polinomios sigue el **algoritmo de la división**. Ello significa que:

Dados dos polinomios cualesquiera $P(x)$ y $Q(x)$, cuyos coeficientes son números Racionales, tales que $g\ P(x) \geq g\ Q(x)$ (lo que significa que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$). Entonces, existen polinomios únicos $C(x)$ y $R(x)$, que verifican:

- $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$,
- Además, $g\ R(x) < g\ Q(x)$.

En la división de polinomios que resolvimos: $C(x)=3x^2+\dfrac{7}{2}x-\dfrac{9}{4}$ y $R(x)=\dfrac{17}{4}$.

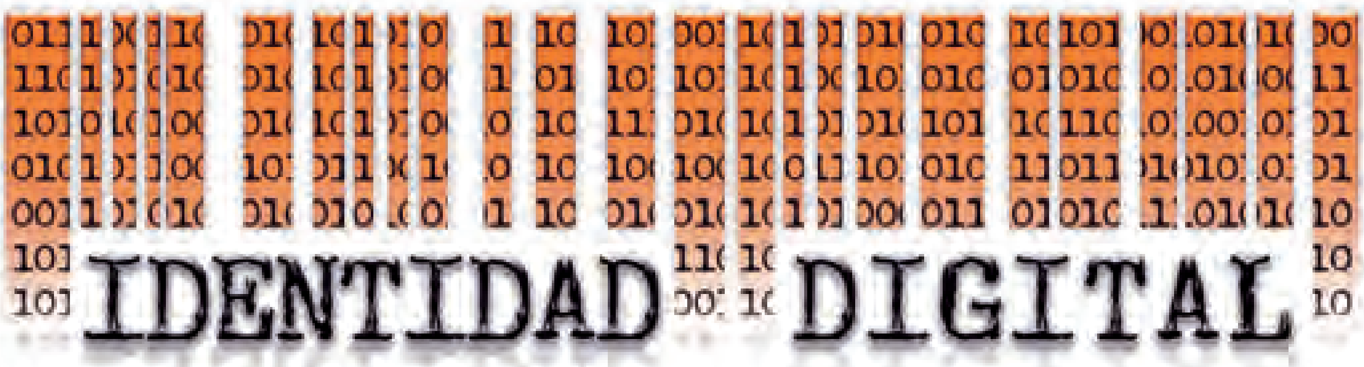
Algunas propiedades de la división de polinomios

Las propiedades que exponemos a continuación se verifican para cualesquiera polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

(a) *La división de un polinomio cualquiera* $P(x)$ *con el polinomio 1 es el polinomio* $P(x)$. Es decir: $P(x)\div 1 = P(x)$.

En efecto, si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, podemos escribir que:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=1\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\right)+0.$$



(b) Si $P(x)$ es un polinomio de grado n y $Q(x)$ es un polinomio de grado m, donde $n \geq m$, entonces $P(x) \div Q(x)$ tiene grado $n\text{–}m$.

Si los términos que le dan el grado a los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son $a_n x^n$ y $b_m x^m$, respectivamente, entonces, el primer término del cociente es justo $\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. ¿Qué propiedades empleamos aquí como argumentos? Y este término es el que le da el grado al polinomio cociente, por tanto su grado es $n\text{–}m$.

- Con ayuda de tu profesora o profesor debatan las propiedades (a) y (b).
- ¿Cuál es el cociente de dividir el polinomio cero entre un polinomio $Q(x) \neq 0(x)$? ¿Y cuál es el resto?
- ¿Cuál es cociente y resto que resulta de dividir $\frac{P(x)}{-P(x)}$? Presenten sus resultados ante todo el curso.

División de un polinomio entre una constante

Esta división especial es similar a la multiplicación de un polinomio por una constante. Así, la división de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ entre la constante c es:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{c} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{c} \\ &= \tfrac{a_n}{c} x^n + \tfrac{a_{n-1}}{c} x^{n-1} + \cdots + \tfrac{a_2}{c} x^2 + \tfrac{a_1}{c} x + \tfrac{a_0}{c}\end{aligned}$$

Naturalmente, necesitamos que la constante c no sea 0 (lo que simbólicamente escribimos así: $c \neq 0$).

Es decir, esta constante divide a cada uno de los términos del polinomio $P(x)$.

Otras preguntas para la discusión en el curso: los grados de los polinomios $P(x)$ y $\frac{P(x)}{c}$ ¿son iguales o distintos?

¿Y si la constante es 1?

Actividades

Con la ayuda de su profesora o profesor realicen las actividades que les proponemos a continuación. Socialicen los resultados, las dudas y otros problemas.

- ¿Cuál es el cociente y el resto que resulta de dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$?

  - $P(x) = x^2 - x - 2$ y $Q(x) = x - 1$.
  - $P(x) = x^3 + 3x + 1$ y $Q(x) = x + 1$.
  - $P(x) = x^4 - 1$ y $Q(x) = x - 1$.
  - $P(x) = x - 1$ y $P(x) = \frac{1}{4}x^5 - x$.
  - $P(x) = \frac{1}{4}x^5 - x$ y $Q(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^2 + 3$.

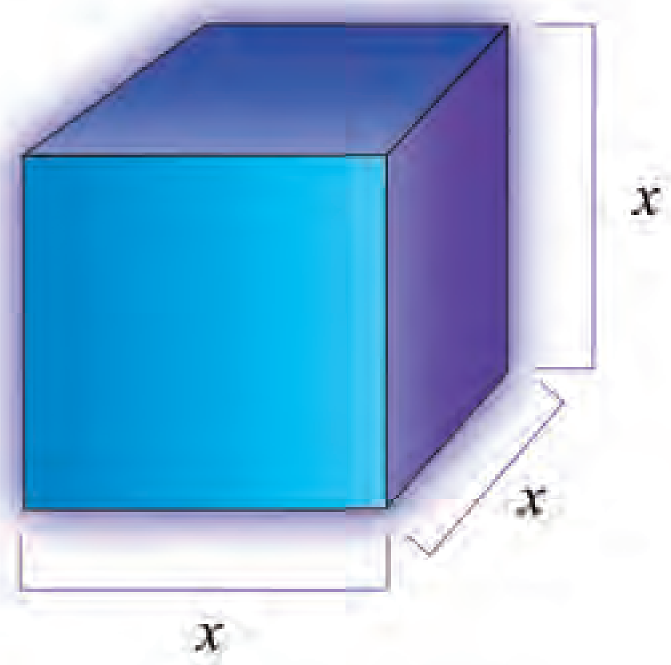
- Consideren el polinomio $Q(x) = -7x^6 - x^5 + 10x^2 + x - 9$. Y calculen $\dfrac{Q(x)}{-3}$.

- Erick, en otro mensaje codificado, envía a Marié el polinomio $P(x) = \dfrac{1}{2}x^5 + x^4 - x^2 + 1$. Y Marié conserva el mismo polinomio decodificador $Q(x) = 2x + 1$. ¿Cuál es ahora la clave secreta? Recuerden que en este caso, el polinomio que envió Erick no está completo, es decir, debemos incluir los términos de grados 3 y 1 (teniendo el cuidado de que sus coeficientes sean ceros).

- Dados los polinomios $p(x) = x^2 - 9$ y $q(x) = x + 3$, efectúen la división de polinomios $p(x)\,\underline{|\,q(x)}$.

Con los conocimientos de esta lección más las dos anteriores, intentemos resolver el siguiente problema:

Consideremos a un cubo de aristas x ¿Qué interpretación geométrica tiene la división $\frac{x^3}{x}$?



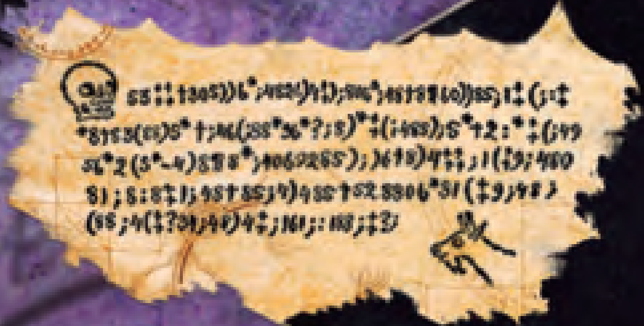
Una encriptación sencilla (más allá de la división de polinomios): un joven toca la puerta de una congregación de matemáticos y le preguntan: "¿dieciocho?", y este responde: "nueve". De inmediato abren la puerta y le dejan pasar. Al cabo de unos minutos arriba una joven y toca también la puerta. Le preguntan desde dentro: "¿ocho?", y ella responde rápidamente: "cuatro". Y también le dejan entrar a tan importante reunión. Inmediatamente llega un muchacho, toca la puerta y le dicen "catorce", y este responde "siete". Un cuarto joven ha escuchado estas preguntas y respuestas desde un pasillo cercano, así que se decide a tocar la puerta… toc toc toc… "¿dos?". Y responde: "uno". ¡Pero no le abren la puerta! Les proponemos discutir este problema y descubrir cuál es la clave para poder entrar a esta reunión.

Ahora, si otro invitado toca a la puerta y le reciben con la pregunta "¿quince?", ¿cuál debe ser su respuesta para poder entrar a tan importante reunión?

Otro tipo de encriptación de mensajes: un sencillo método de codificación consiste en reemplazar cada letra por la siguiente: Es decir, sustituimos el alfabeto: *A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z, por B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z A*. Y ahora les preguntamos: **¿Ft nvz qsbdujdp, wfsebe?**

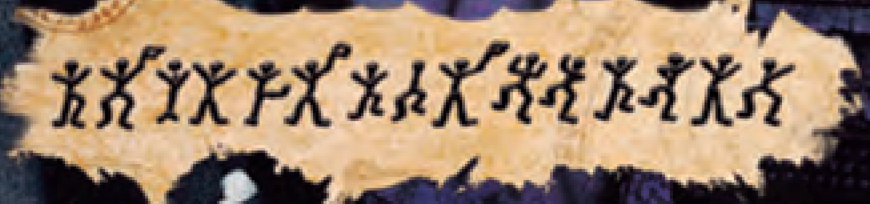
Lean los siguientes escritos relacionados con la criptografía y socialicen junto a docentes, familiares, vecinas, vecinos y demás personas de la comunidad.

El escritor Edgar Allan Poe (1809-1849) fue uno de los precursores en la difícil tarea de descubrir códigos secretos. Llegó, incluso, a desafiar públicamente a sus lectores sosteniendo que podía descifrar cualquier código (mensaje encriptado) siempre y cuando estuviera escrito en un mismo idioma. Decenas de lectores atendieron su llamado, pero Edgar cumplió su promesa. En su cuento "el escarabajo de oro" (the gold bug) incorporó un mensaje cifrado y su solución, la cual le lleva casi un tercio de las 35 páginas que tiene e cuento.

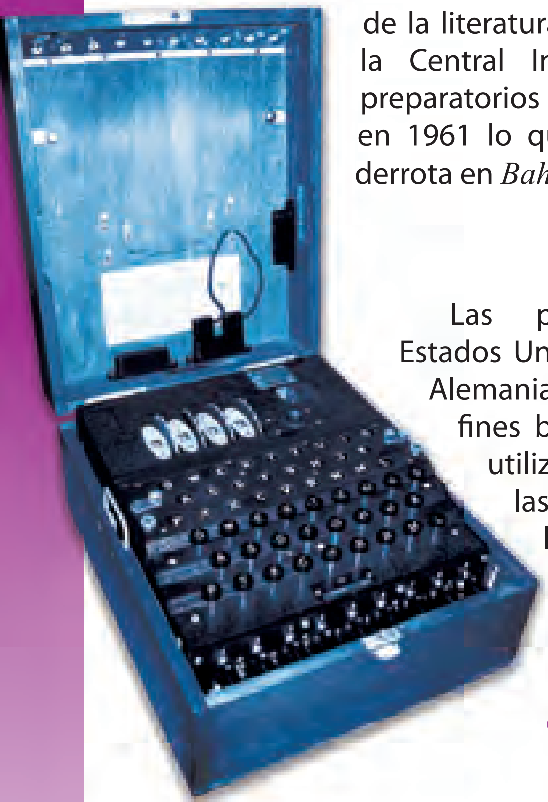


La criptografía, o arte de descifrar códigos, ha ocupado a muchos matemáticos y no matemáticos. Tal es el caso del también escritor Arthur Conan Doyle (1859-1930) con "su" detective Sherlock Holmes.

Uno de los problemas más conocido de Holmes tiene que ver con una clave representada con muñequitos, cada uno de los cuales resulta ser una letra del alfabeto inglés). Este problema se da en el contexto de un esposo celoso que busca los servicios del detective (Sherlock Holmes) para investigar si su esposa le ha engañado.



También el escritor y periodista argentino Rodolfo Walsh (1927), cuya afición a la criptografía tuvo consecuencias que fueron más allá de la literatura: descifró los mensajes de la Central Intelligence Agency (CIA) preparatorios de la invasión a Cuba en 1961 lo que posibilitó la histórica derrota en *Bahía de Cochinos*.



Las potencias mundiales como Estados Unidos, Inglaterra, Francia, Italia y Alemania han utilizado la criptografía con fines bélicos. La Máquina Enigma fue utilizada para cifrar información por las fuerzas de Alemania durante la Segunda Guerra Mundial.

Rodolfo Walsh

Algunos de los códigos más utilizados

El código Morse: fue inventado para enviar por medios eléctricos mensajes escritos.

La taquigrafía: es un código utilizado para poder escribir a la misma velocidad con que se habla.

Números del ISBN: los libros se codifican mediante los números del Internacional Standard Book Number. Por ejemplo, el *ISBN* de la edición inglesa del libro 101 proyectos matemáticos es 0 521 34759 9. El primer dígito representa el grupo lingüístico, las tres cifras siguientes son la identificación de la editorial, y los cinco siguientes son los asignados por la editorial a este libro concreto. La última cifra es de verificación, y está elegida de modo que la suma:

$$0\cdot 10+5\cdot 9+2\cdot 8+1\cdot 7+3\cdot 6+4\cdot 6+7\cdot 4+5\cdot 3+9\cdot 2+9\cdot 1=176$$

dé resto cero al dividirla por 11. En efecto, $176=11\cdot 16$, es decir, esta división es exacta (176 es múltiplo de 11), por tanto, el resto en la división es cero.

Las librerías utilizan el *ISBN* para encargar y registrar en sus sistemas los libros. Si se comete un error al transmitir o leer el número de verificación, éste nos advertirá sobre ello (en dado caso, la división anterior no sería exacta). Anímense a calcular a chequear que el último dígito de uno de sus libros sea múltiplo de 11 (una observación: tienen que escoger un libro cuyo *ISBN* tenga diez dígitos).

El Alfabeto Braille: es un código que permite leer palabras al tacto, es empleado por muchas personas que tienen discapacidad visual.

El mensaje secreto

Para poder saber cuál es el mensaje secreto hay que hacerlo en pareja y para ello se debe descifrar primero el mensaje que dan dos personas que lo custodian. Cada una de ellas habla en lenguaje polinómico. La pareja que quiera saber cuál es el mensaje secreto debe hablar dicho lenguaje y acto seguido, debe descifrar el mensaje. Resulta que la pareja de centinelas dan dos polinomios y la pareja que desea descifrar el mensaje secreto debe dar el cociente y el residuo que resultan de la división del dividendo por el divisor. Si la pareja hace los cálculos correctamente, los centinelas les dirán el mensaje secreto.

1 Fórmense en cuatro grupos: grupo dividendo, grupo divisor, grupo cociente y grupo residuo. Los dos primeros escogen una de las siguientes divisiones de polinomios y los otros dos deben calcular el cociente y el resto respectivamente:

- $x^4 - 3x^2 + 2 \;\big|\underline{\,x-3\,}$
- $4x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \;\big|\underline{\,x^2 - x - 1\,}$
- $x^5 + 2x^3 - x - 8 \;\big|\underline{\,x^2 - 2x + 1\,}$
- $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1 \;\big|\underline{\,x^2 + 2\,}$
- $6x^4 + 2x^3 + 4 \;\big|\underline{\,2x^3 + 2\,}$
- $2x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1 \;\big|\underline{\,-x^3 - x + 2\,}$
- $ax^4 - ax - 2a \;\big|\underline{\,ax + a\,}$
- $22x^5 - 59x^4 + 128x^3 - 193x^2 + 176x + 120 \;\big|\underline{\,11x^2 - 13x + 17\,}$
- $\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + 21x^2 + x + 12 \;\big|\underline{\,\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\,}$
- $2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 3x + \frac{1}{6} \;\big|\underline{\,x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\,}$
- $\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 6x + 7 \;\big|\underline{\,x^2 - 5\,}$

Lenguaje Braille

10

Funciones. Potenciación con exponentes enteros. Expresiones decimales finitas y periódicas. Recta numérica

La población de Venezuela

Los datos confiables como fuente para la toma de decisiones

Conocer la evolución de la población de nuestro país es una información muy importante, no solamente para los distintos organismos del Estado en su formulación de políticas públicas en áreas como la salud, educación, alimentación, trabajo, producción-consumo de energía, agua potable, redes viales, ferrocarriles, vivienda, etc., sino también para las comunidades en sí mismas, por ejemplo, en lo que tiene que ver con el planeamiento de proyectos socioproductivos, tecnológicos, de prevención y atención de la salud, reducción de la pobreza, entre tantos otros. Los datos sobre el número de habitantes de Venezuela (y de cada una de sus regiones) son esenciales para esto.

10

Para esta lección hemos tomado los datos disponibles en el *Instituto Nacional de Estadística* (INE) para población de Venezuela en los censos de:

1936, 1941, 1950, 1961, 1971, 1981, 1990 y 2001.

Los cuales presentamos en la tabla que sigue:

	Año	Población (x 1.000)
1	1936	3.364
2	1941	3.851
3	1950	5.035
4	1961	7.524
5	1971	10.722
6	1981	14.517
7	1990	18.105
8	2001	23.233

Datos aproximados con base en
www.ine.gob.ve

Población (x 1.000)	Año	Población (x 1.000)	Población
1	1936	3.364	3.364.000
2	1941	3.851	3.851.000
3	1950	5.035	5.035.000
4	1961	7.524	7.524.000
5	1971	10.722	10.722.000
6	1981	14.517	14.517.000
7	1990	18.105	18.105.000
8	2001	23.233	23.233.000

Observemos que se presenta la población para 8 de los censos que se han llevado a cabo en Venezuela. Además, en la última columna se indica "población (x1.000)"; esto significa que debemos multiplicar cada número que se encuentra en dicha columna por 1.000. Así, obtendremos un valor cercano al que se obtuvo en cada censo.

Por ejemplo: la población de nuestro país en 2001 fue de *veintitrés millones doscientos treinta y tres mil personas:*

$$23.233 \cdot 1000 = 23.233.000$$

- Observen que identificamos cada censo con un número del 1 al 8.
- ¿Todos los censos se han hecho cada diez años? Si no es así, señalen cuáles.
- ¿Cuánto creció la población de un censo a otro? Amplíen la tabla con estos datos.

Representando estos datos

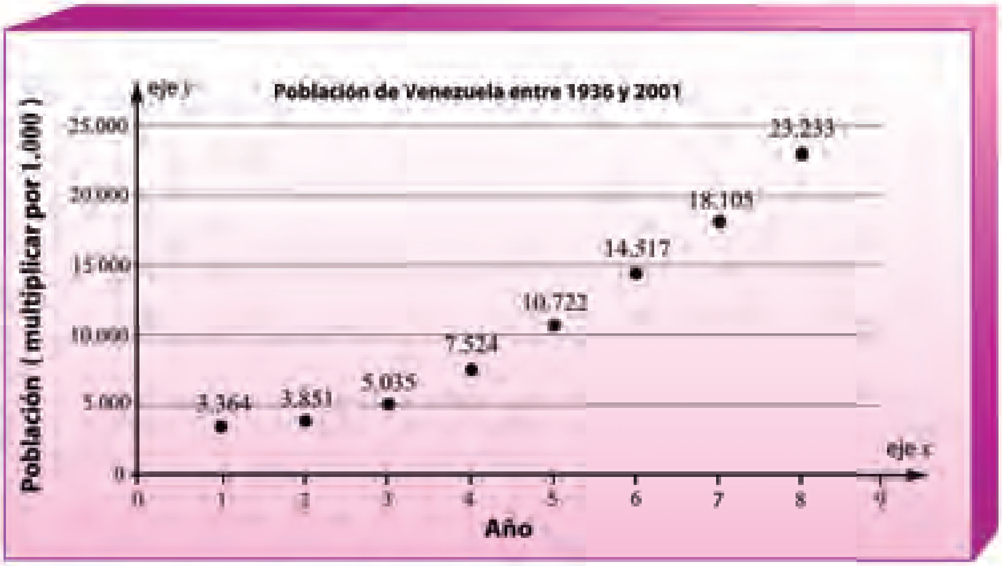
La tabla que hemos expuesto antes se puede denominar *organización tabular de datos*, esta tabla nos aporta información importante, como la que se ha discutido antes. Sin embargo, un gráfico ilustra mucho mejor cómo es la evolución de nuestra población en función del tiempo.

Para ello representaremos los puntos dados por las coordenadas: **identificación del censo** y **población.** Es decir (ver tabla):

(Ident. del censo , Población)
(1 , 3.364)
(2 , 3.851)
(3 , 5.035)
(4 , 7.524)
(5 , 10.722)
(6 , 14.517)
(7 , 18.105)
(8 , 23.233)

La coma sólo se usa aquí para separar las dos coordenadas

Como la identificación del censo es una variable que toma los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, hemos hecho marcas para estos números en el eje x (eje horizontal). Allí podemos emplear una regla graduada. Y como la población de Venezuela para el momento de cada censo es una variable que toma valores entre 3.364 y 23.233, justo en ese rango, hicimos marcas en el eje y (eje vertical) cada cinco mil unidades: hay marcas para el 0, 5.000, 10.000, 15.000, 20.000 y 25.000.

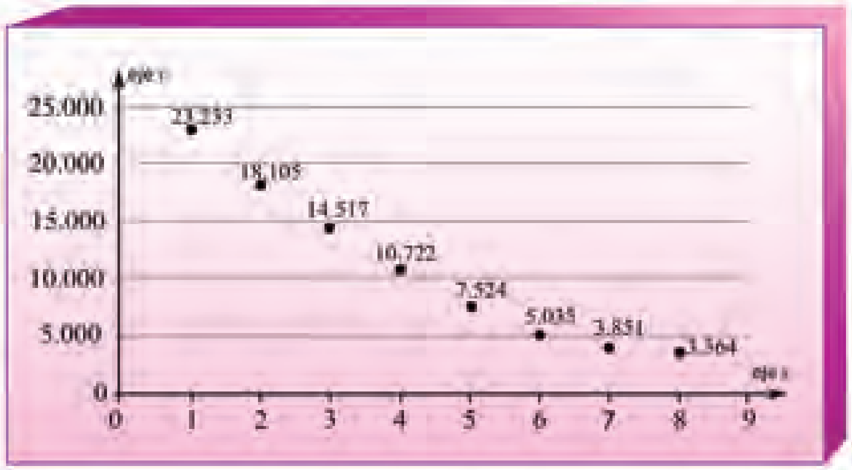


Ya con esto, cada punto del gráfico representa a cada uno de los pares: (1 , 3.364), (2 , 3.851), (3 , 5.035), (4 , 7.524), (5 , 10.722), (6 , 14.517), (7 , 18.105) y (8 , 23.233).

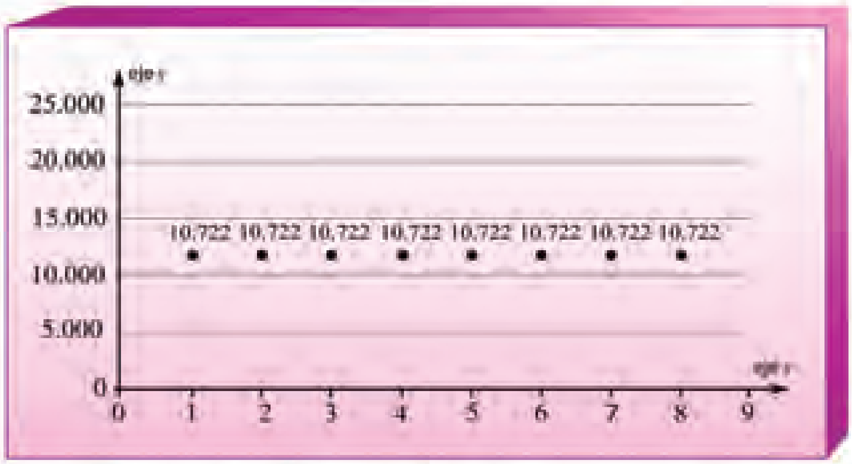
Representen otros puntos en el plano como práctica. Incluso, puntos donde sus coordenadas sean números enteros negativos.

Realicen todas las preguntas que sean necesarias a su docente, compañeras y compañeros hasta que se familiaricen con la representación de puntos en el plano.

Notemos que esta relación de la población de Venezuela con respecto al año es **creciente.** Lo que quiere decir que este número siempre es mayor luego de cada censo: $3364 < 3851 < 5035 < 7524 < 10722 < 14517 < 18105 < 23233$. Además, resulta natural suponer que ello seguirá siendo así hasta cierto momento. ¡Sí! ¡Hasta cierto momento! Pues ello dependerá del espacio geográfico, disponibilidad de recursos esenciales como el agua, los alimentos, entre otros.



Una función $f(x)$ es decreciente si al considerar dos puntos de su gráfica $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.



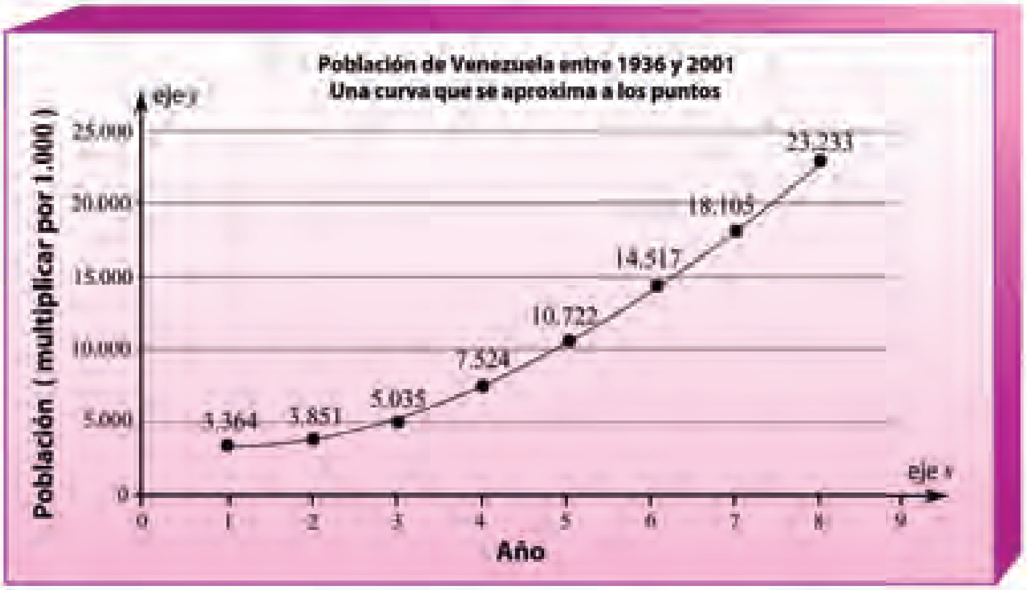
Una función $f(x)$ es constante si al considerar dos puntos de su gráfica $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$.

Antes de proseguir, socialicen con el grupo:

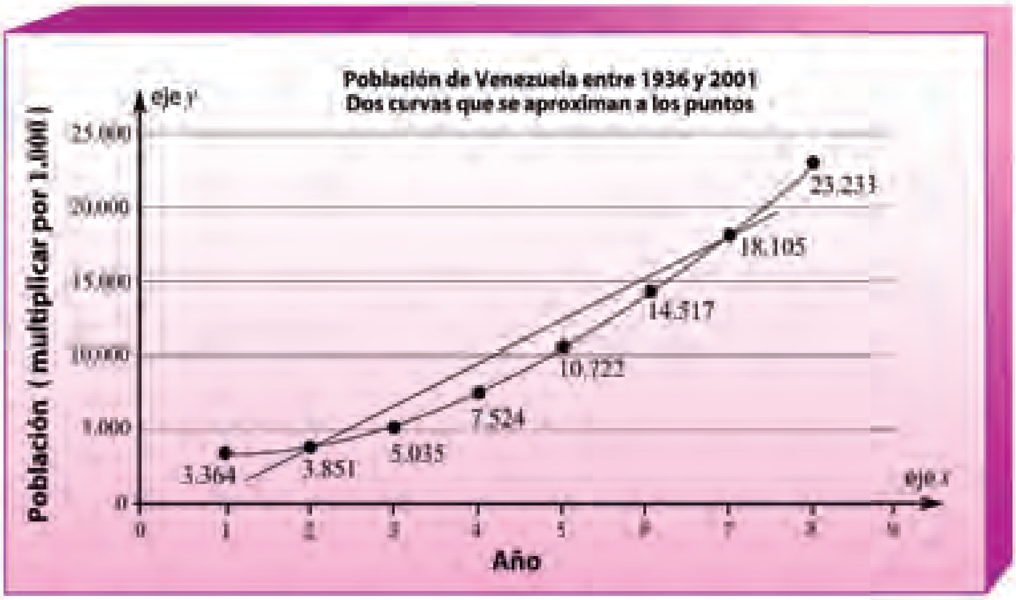
- ¿Cómo será un gráfico de una relación **decreciente**?
- ¿Y el de una relación **constante**? Aporten ejemplos de cada uno.
- ¿Qué fenómenos de la vida cotidiana y del contexto son ejemplos de relaciones decrecientes y de relaciones constantes?

Aproximando una parábola

Un problema matemático importante consiste en encontrar una curva que se aproxime a la evolución de nuestra población (lo que también puede decirse así: encontrar una curva que se describa el comportamiento de los datos). Hay varias maneras de hacer esto. Nosotros procedemos de forma intuitiva.



En el gráfico adjunto se muestra una de estas curvas. Pues sí: existen varios tipos de curvas que se aproximan al comportamiento de estos datos. En el gráfico que sigue se exponen dos de ellas. Recuerden que como son aproximaciones, estas curvas no necesariamente deben tocar a todos los puntos.



Incluso, nos propondremos encontrar una expresión simbólica para una de tales curvas.

Para lo que sigue necesitaremos:

- Calculadora.
- Mucha paciencia para realizar los cálculos.
- Extrema atención para hacernos preguntas y plantear ideas.

Pensando en una relación lineal:
Fijémonos en que:

$$\begin{aligned} 3.364 \cdot 1 &= 3.364 \\ 3.364 \cdot 2 &= 6.728 \\ 3.364 \cdot 3 &= 10.092 \\ 3.364 \cdot 4 &= 13.456 \\ 3.364 \cdot 5 &= 16.820 \\ 3.364 \cdot 6 &= 20.184 \\ 3.364 \cdot 7 &= 23.548 \\ 3.364 \cdot 8 &= 26.912 \end{aligned}$$

Relación que puede escribirse simbólicamente así: $f(x) = 3.364 \cdot x$, nos da, para x igual a $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8, valores $f(x)$ mucho mayores a los datos de nuestra tabla. De hecho, en uno de los casos, para $f(4)$, el error es de $13.456 - 7.524 = 5.932$. Es decir, para el cuarto censo de la tabla, con esta relación el error es de $5.932 \cdot 1.000 = 5.932.000$, mucho para nuestro rango de datos.

Continuemos con la exploración…

Pensando en una relación "cuadrática":
Ahora si efectuamos los cálculos:

$$\begin{aligned} 336 \cdot 1 \cdot 1 &= 336 \\ 336 \cdot 2 \cdot 2 &= 1.344 \\ 336 \cdot 3 \cdot 3 &= 3.024 \\ 336 \cdot 4 \cdot 4 &= 5.376 \\ 336 \cdot 5 \cdot 5 &= 8.400 \\ 336 \cdot 6 \cdot 6 &= 12.096 \\ 336 \cdot 7 \cdot 7 &= 16.464 \\ 336 \cdot 8 \cdot 8 &= 21.504 \end{aligned}$$

El término "cuadrática" tiene que ver con que hemos multiplicado cada valor de la variable x por sí misma.

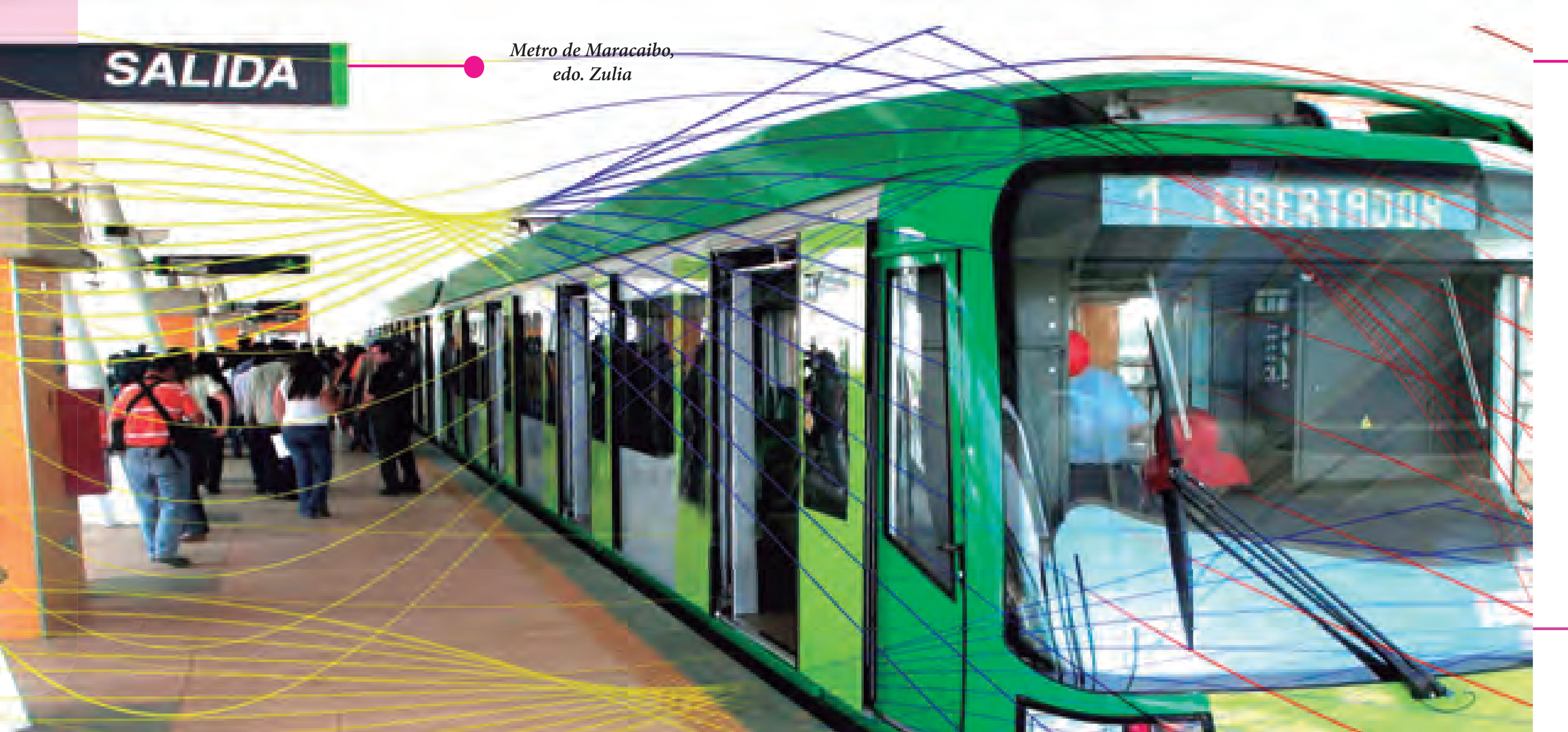
Esta relación puede escribirse como sigue: $f(x) = 336 \cdot x^2$.

Donde $x^2 = x \cdot x$ (el cuadrado de x es el producto de x consigo misma).

Esta relación parece aproximarse mejor a los datos que tenemos. De hecho, exceptuando los dos primeros casos, el error en los demás es cercano a los 2.000.000, y no casi 6.000.000 como en el caso de la relación lineal $f(x) = 3.364 \cdot x$.

Mostremos estos cálculos en una misma tabla.

x	Año	Población (x 1.000)	$f(x) = 3.364 \cdot x$	$f(x) = 336 \cdot x^2$
1	1936	3.364	3.364	336
2	1941	3.851	6.728	1.344
3	1950	5.035	10.092	3.024
4	1961	7.524	13.456	5.376
5	1971	10.722	16.820	8.400
6	1981	14.517	20.184	12.096
7	1990	18.105	23.548	16.464
8	2001	23.233	26.912	21.504



Metro de Maracaibo, edo. Zulia

Un gráfico de $f(x) = 336 \cdot x^2$ junto con los puntos de la primera tabla es el que mostramos a continuación. Allí se ve que la curva dada por $f(x) = 336 \cdot x^2$ da un error mayor para x igual a 1 y 2 (estos puntos están más alejados de la curva).

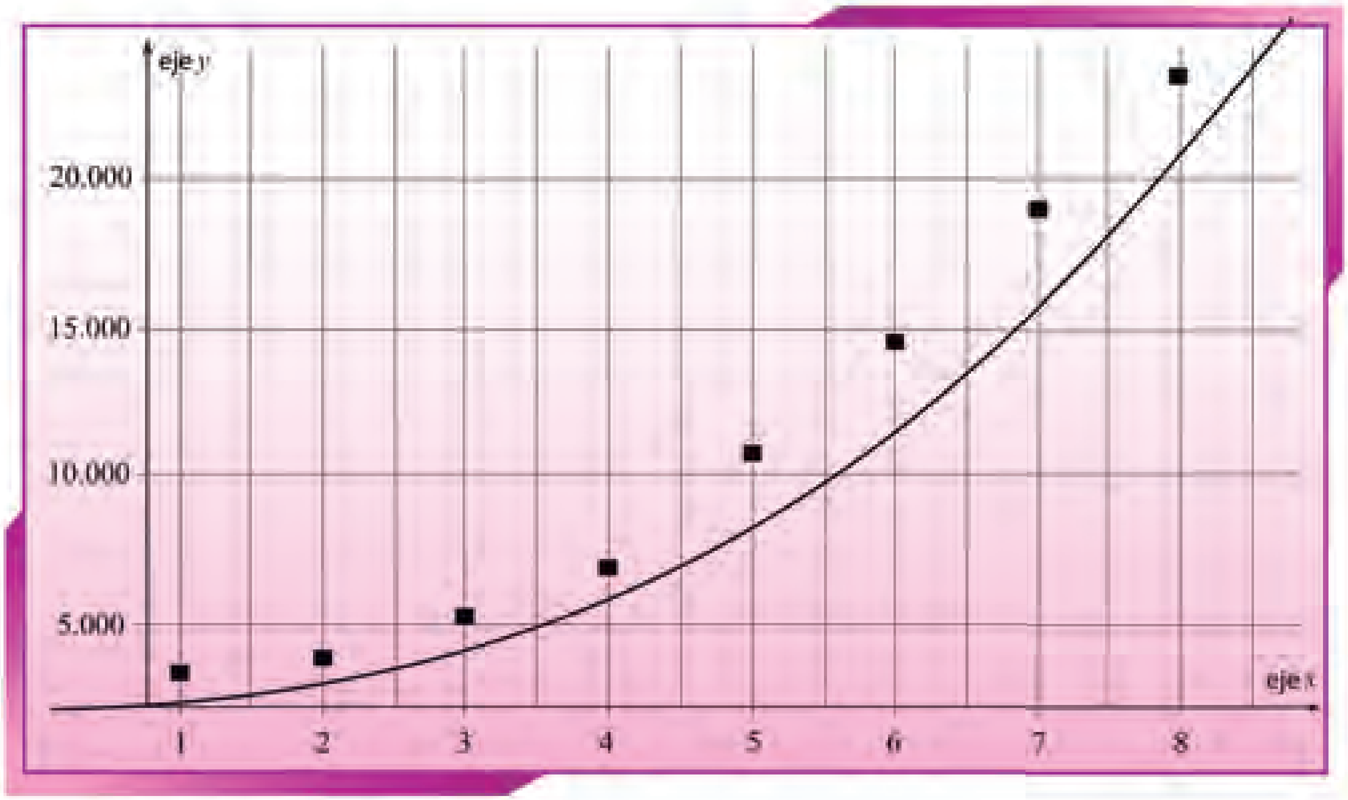


Gráfico de $f(x) = 336 \cdot x^2$ y los datos de los censos

Justo aquí proponemos a todas y todos que:

- Encuentren otras dos relaciones "cuadráticas" que sean mejores aproximaciones que $f(x) = 336 \cdot x^2$.
- Debatan sus resultados organizados en pequeños grupos y en plenaria.
- Además, grafiquen las dos curvas correspondientes y comparen con los datos de nuestra primera tabla.

El concepto de función cuadrática

Con base en la discusión anterior podemos formalizar el concepto:

Una **función cuadrática** f de un conjunto A en un conjunto B verifica que:

- f es una relación que hace corresponder cada elemento x del conjunto A con un solo elemento $f(x)$ del conjunto B.
- Esta relación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Debe cumplirse que $a \neq 0$. Además, b y c son números fijos.

Es una condición necesaria que los conjuntos A y B tengan elementos.

Hay varias observaciones que haremos:

- Un elemento del conjunto A tiene una única imagen $f(x)$ en el conjunto B.
- La relación o función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ hace que sus puntos estén ubicados en una parábola (vean el gráfico anterior).
- Si $a = 0$, entonces la función no sería cuadrática sino lineal.

Otra función que se aproxima al crecimiento de la población de Venezuela

La gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^3 + b$, la cual es un tipo de función cúbica nos permite, también, aproximarnos al crecimiento de la población de Venezuela en el período que hemos considerado.

x	Año	Población (x 1.000)	$f(x) = 336 \cdot x^2$	$f(x) = 30x^3 + 3000$
1	1936	3.364	336	3.036
2	1941	3.851	1.344	3.288
3	1950	5.035	3.024	3.972
4	1961	7.524	5.376	5.304
5	1971	10.722	8.400	7.500
6	1981	14.517	12.096	10.776
7	1990	18.105	16.464	15.348
8	2001	23.233	21.504	21.432

El siguiente gráfico muestra la relación existente entre la gráfica de la función cúbica $f(x) = 30x^3 + 3000$. De esta forma podemos observar que la función cúbica presenta, en algunos casos, menores errores que la presentada por la función cuadrática.

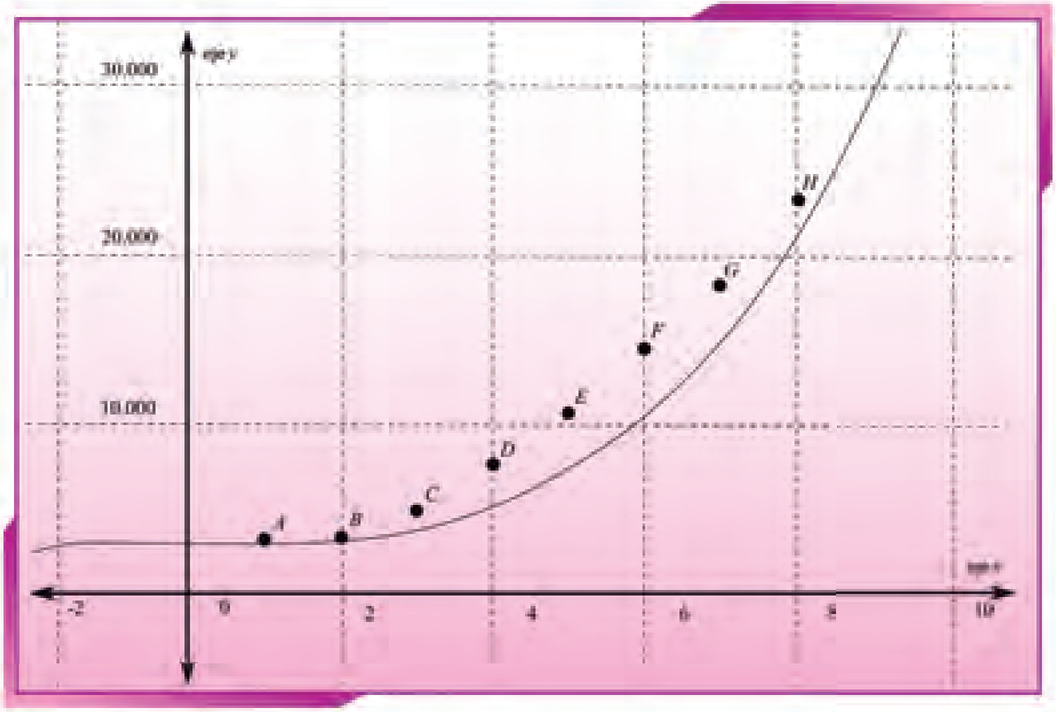


Gráfico de $f(x) = 30x^3 + 3000$
y los datos de los censos

Encuentren otra función de este tipo que se aproxime al comportamiento de los datos.

El concepto de potencia

Con base en el debate anterior podemos formalizar el concepto:

Si x es un número, entonces la potencia n de x:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}$$

Es decir, debemos multiplicar a x por sí mismo n veces (n es un número entero).

Por ejemplo, calculemos las potencias cuartas de algunos números enteros:

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$$
$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$$
$$(-1)^4 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$$
$$0^4 = 0\cdot0\cdot0\cdot0 = 0$$
$$1^4 = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1$$
$$2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$$

Consideremos otros números y calculemos su cuarta potencia.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = \frac{1^4}{2^4}$$
$$\left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{16}{625} = \frac{2^4}{5^4}$$

Explorando los números decimales a través de las funciones

Consideremos ahora la función $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Construyamos una tabla de datos para algunos valores de x.

x	$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$
1	0,25
2	1
3	2,25
4	4
5	6,25
6	9
7	12,25
8	16

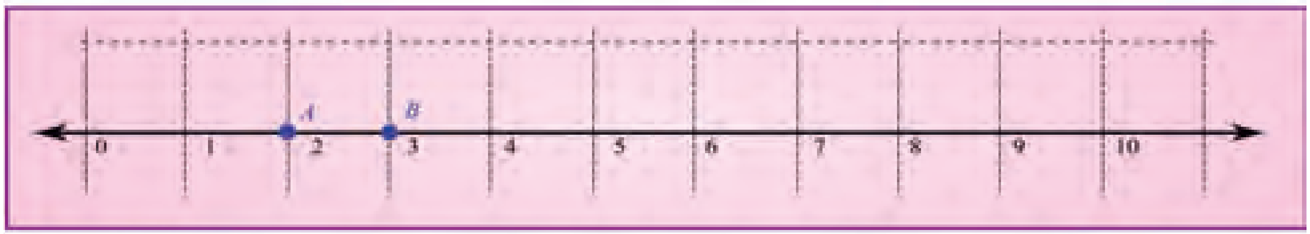
Si observan los resultados obtenidos al multiplicar dos veces por sí misma obtenemos números enteros y números decimales tales como:

0,25   2,25   6,25   y   12,25

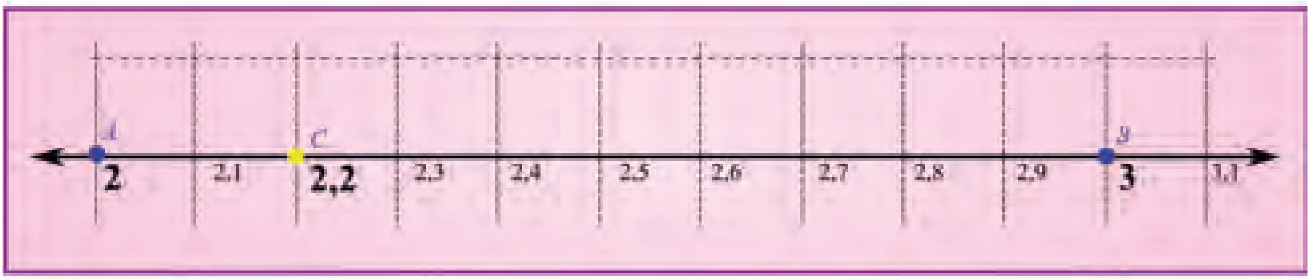
Estos números decimales se denominan **expresiones decimales finitas** (porque la parte decimal tiene una cantidad limitada), la parte que se encuentra a la izquierda de la coma se denomina parte entera.

Para representar este número en una recta numérica, debemos realizar lo siguiente: ubicamos el número que corresponda a la parte entera. En nuestro caso específico es el 2. Sabemos que nuestro número decimal es mayor que 2 y menor que 3.

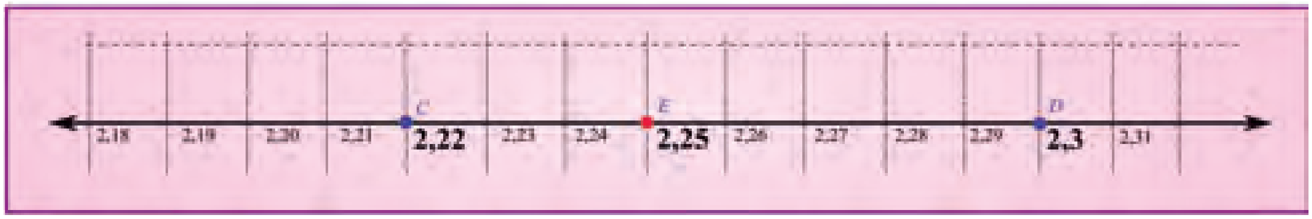
En la recta numérica marcamos los puntos 2 y 3 para delimitar nuestro número decimal.



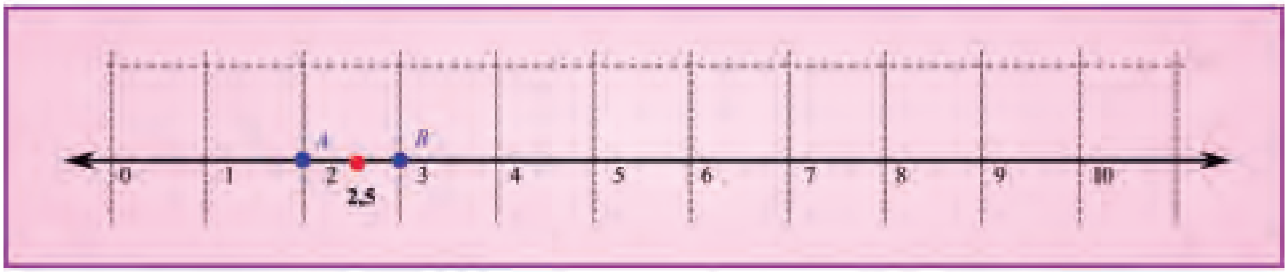
Luego observamos que la parte decimal es igual a 25, la distancia que hay entre el número 2 y el número 3 la dividimos en 10 partes iguales y de esta manera marcamos con un punto el 2,2.



Ahora, sabiendo que $2{,}2 < 2{,}25 < 2{,}3$ marcamos los extremos mencionados y dividimos la distancia que hay entre $2{,}2$ y $2{,}3$ en diez partes iguales para representar el $2{,}25$.



Volviendo a la vista original se puede apreciar el punto $2{,}25$ de la siguiente manera:



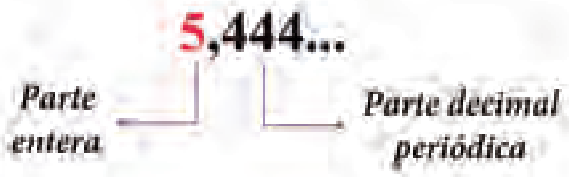
De esta forma podemos representar en la recta numérica un número decimal finito.

Dibujen en su cuaderno una recta numérica y representen el resto de los decimales presentados en la tabla anterior.

Veamos qué ocurre si trabajamos con la función de la forma $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2$.

En la siguiente tabla visualizaremos los valores que se generan.

x	$f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2$
1	0,111...
2	0,444...
3	1
4	1,777...
5	2,777...
6	4
7	5,444...



Ahora notarán que existen expresiones decimales en las que su parte decimal no tiene límite; en ellas un número o grupo de números se repiten indefinidamente. A estas expresiones decimales se denominan **expresiones decimales periódicas**. Los tres puntos suspensivos indican que la expresión decimal no termina.

Aquí, el número cuatro se denomina **período** y en matemática se suele colocar un pequeño arco sobre la cifra o grupo de cifras que se repiten, es decir:

$$5,444... = 5,\widehat{4}$$

¿Pueden ser las expresiones decimales finitas, expresiones periódicas, y viceversa?

¿Qué número será mayor $1,9$ ó 2?

Y entre $1,999$ y 2, ¿cuál será el mayor?

¿Y entre $1,99999$ y 2?

Ahora, ¿qué número será mayor $1,\widehat{9}$ ó 2?

Socialicen con sus compañeras y compañeros sus respuestas.

Vamos a llamar a $1,\widehat{9}$ con el valor de x, e intentemos trabajar conjuntamente para dar una respuesta que aclare algunas de las dudas surgidas.

$$x = 1,\widehat{9}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por el número 10 obtendremos:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 1,\overset{\frown}{9}$$
$$10x = 19,\overset{\frown}{9}$$

¿Por qué creen ustedes que multiplicamos por 10? Razonen colectivamente sus respuestas.

Si a esta ecuación $\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 6x + 7 \;\underline{|x^2 - 5}$ le restamos la ecuación anterior, es decir, $x = 1,\overset{\frown}{9}$ nos da:

$$10x - x = 19,\overset{\frown}{9} - 1,\overset{\frown}{9}$$
$$9x = 18$$

¿Por qué creen ustedes que hicimos esta sustracción?

Ahora lo que debemos hacer es multiplicar por algún número para saber cuánto vale la x:

$$\frac{1}{9} \cdot 9x = \frac{1}{9} \cdot 18$$
$$\frac{9}{9} \cdot x = \frac{18}{9}$$
$$1 \cdot x = 2$$
$$x = 2$$

Es decir, $1,\overset{\frown}{9}$ y *2* son iguales, ¿qué pueden decir de este resultado?

El elemento neutro de la multiplicación de los números racionales es el 1. Fíjense que si tenemos el número 9 y lo multiplicamos por el número racional $\frac{1}{9}$ el producto se neutraliza, es decir, se convierte en 1. Dado un número a racional distinto de cero ($a \neq 0$), el número $\frac{1}{a}$ es conocido como elemento simétrico de la multiplicación.

¿Qué número será mayor $0,4\overset{\frown}{9}$ ó $0,\overset{\frown}{5}$? Razonen y argumenten sus respuestas.

¿Y entre $6,85$ y $6,84\overset{\frown}{9}$?

¿Cuáles serán las expresiones decimales de las fracciones: $\frac{7}{9}, \frac{13}{14}, \frac{8}{11}, \frac{6}{17}, \frac{24}{13}$?

¿Qué fracciones generan las siguientes expresiones decimales: $0,41\overset{\frown}{6}$, $0,\overset{\frown}{72}$, $1,708\overset{\frown}{3}$, $2,36\overset{\frown}{1}$, $4,\overset{\frown}{36}$, $3,\overset{\frown}{54}$?

Actividades

1) Copien en su cuaderno la siguiente tabla y complétenla. En ella hemos dispuesto algunos números enteros y algunas funciones.

x	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^3$	$f(x)=x^4$	$f(x)=x^5$
−3					
−2					
−1					
0					
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32
3					
4					
5					

2 Construyan gráficas para algunas de las funciones expresadas en la tabla.

3 Busquen datos sobre el crecimiento de la población en sus localidades y traten de encontrar una función que se aproxime a tal comportamiento. Debatan sus resultados con sus compañeras y compañeros y organicen su exposición. ¡Anímense a publicar sus investigaciones en el periódico local!

4 Den otros ejemplos de expresiones decimales finitas. Y otros ejemplos de expresiones decimales periódicas.

5 Investiguen qué es la tasa de crecimiento poblacional. Les adelantamos que ésta suele expresarse como una expresión decimal. Calculen cuál es la tasa de crecimiento de la población de Venezuela entre cada censo.

6 Consulten además el promedio de hijas e hijos por persona en la actualidad. ¿Qué tipo de expresión decimal es? ¿Qué factores creen que afectan el crecimiento de la población? ¿Qué problemas se relacionan con una tasa alta de crecimiento? Socialicen esto con sus compañeras y compañeros y familiares. Representen estos números en la recta.

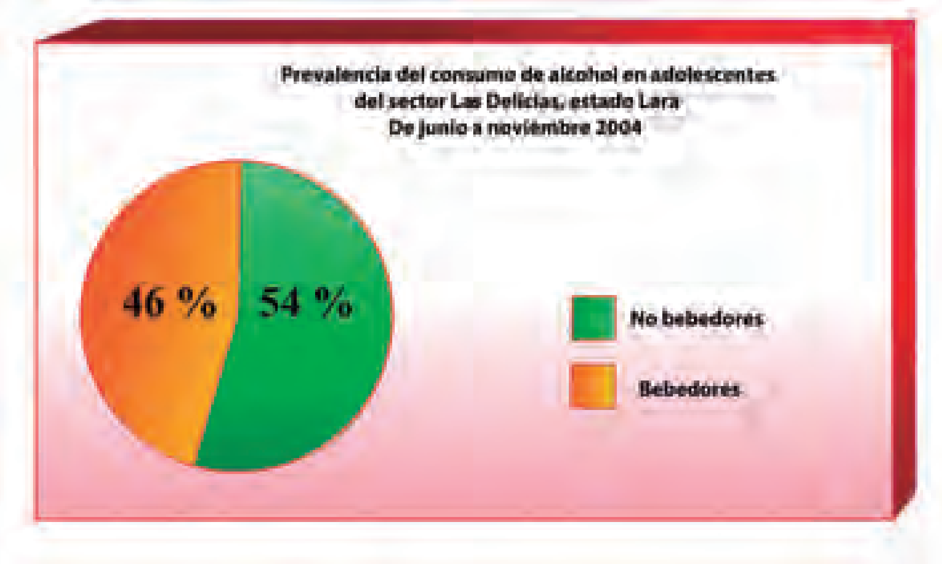
¿Qué estás bebiendo?

Consumo de bebidas en los seres humanos

Cierto día en un programa de televisión trataban el tema del consumo de bebidas en los seres humanos, dada la importancia de consumir líquidos y evitar la deshidratación de nuestros cuerpos. Entre las cosas que mencionaron estaba lo consabido de que las personas adultas debian tomar ocho vasos de agua diarios y que las y los bebés no necesitaban tomar agua, si están siendo amamantadas y amamantados.

Asimismo, señalaron que las niñas, niños y adolescentes dada la actividad física propia de su edad debían, no sólo consumir agua como el vital líquido, sino también combinarla con jugos de frutas o sopas que además de darles hidratación les suministraba nutrición, necesaria para su crecimiento.

Otra información que llamó mucho la atención de nuestra familia, fue la planteada en el programa por médicos investigadores y que presentamos a continuación:



Se afirmaba que la edad de inicio de consumo fue entre los 10 y 13 años.

Esto verdaderamente nos alarmó mucho y sabiendo que debemos ser reflexivos y críticos ante los mensajes que nos difunden por televisión, radio y prensa escrita, lo incorporamos a esta lección para que entre todas y todos debatiéramos el tema y recogiéramos datos que nos permitan evidenciar a través de su análisis comparativo si lo que se planteó en ese programa, también se ve reflejado en nuestra comunidad educativa y circunvecina.

En esta lección vamos a indagar y analizar esta interrogante general:

¿Qué están bebiendo tú, tus compañeras y compañeros del liceo y las vecinas y vecinos que se encuentren entre 10 y 17 años de edad?

Les sugerimos que en la clase de matemática se genere un debate acerca de los diferentes líquidos que se conoce toman tanto ustedes como otras y otros adolescentes que estudian en ese liceo, porque al recolectar los datos no todas las bebidas van a ser alcohólicas, por el contrario, se supone que a esa edad el consumo de bebidas serían no alcohólicas. También conviene indagar, ¿qué edades se considera debe tener una persona adolescente? y, ¿cuáles son los beneficios o perjuicios de consumir determinadas bebidas?

Para responder a la pregunta general que se ha planteado en esta lección necesitamos conocer los siguientes métodos estadísticos:

Método de recolección de datos

Se puede averiguar qué tipo de bebidas consumen las y los adolescentes que estudian en ese liceo y las y los adolescentes que viven cerca del liceo. Saber cuántos vasos de agua, jugo, lácteos, bebidas gaseosas, refrescantes o energizantes se consumen a diario o incluso estimar la cantidad de litros y centímetros cúbicos que se ingieren a diario o semanalmente. Si toman alguna bebida refrescante, cuál, cuántas veces a la semana y qué cantidad (en litros). También interesaría saber las razones por las que la consumen.

En todo caso, el debate intenta indagar acerca de qué bebidas se están consumiendo y esto sólo se sabrá si definimos algunas de sus características que suponemos serán variables y recolectamos esos datos.

Proponemos que en equipos de cinco personas reflexionen si en este caso conviene recolectar los datos a través de la técnica de **la observación, de una encuesta o de una entrevista.**

Imagínense si algunas de las variables que se indicaron en el primer párrafo del **método de recolección de datos** pueden ser recogidas apropiadamente por cualquiera de estas técnicas. Preparen un instrumento de recolección de estos datos, que pudiera ser una hoja de registro (si vamos a observar), un cuestionario (si se aplica la encuesta), o un guión de entrevista.

Vamos a ayudarles con algunos modelos de instrumentos. A continuación les presentamos una **hoja de registro.**

Unidad Educativa Bolivariana ______________________________

Hoja de registro de la observación de bebidas consumidas

por adolescentes del ____ año o de la comunidad ______________________

Sujeto N.° __________ Edad _____ Sexo F ____ M ____

Bebidas	Cantidad bebida a diario (indica vasos, tasas, platos, *cc*, o *litros*)							
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo	Total
Agua								
Jugos naturales								
Jugos artificiales								
Refrescos								
Energizantes								
Lácteos								
Sopa								
Otros, di cuáles								

Alguna otra observación que sea importante:

____

____

____

Esta debe ser llenada para cada sujeto observado, si se están observando a ustedes mismos, pueden llenarla. Luego deben reunir todas las hojas de registro para hacer una matriz de datos que después verán cómo sería.

Otro modelo de instrumento es el cuestionario como el que aparece en la próxima página. Cuando uno decide recolectar los datos por una encuesta es porque supone que los datos se pueden recoger a través de preguntas y porque se tienen muchas personas y variables por estudiar.

En este caso, la encuesta facilita la recolección de datos porque puede aplicarse a muchas personas simultáneamente y además pueden ser respondidas por la persona que la lea, sin necesidad de que quien investiga esté presente o les haga las preguntas. El instrumento que por lo general se aplica cuando se hace una encuesta es el cuestionario. En la siguiente página les presentamos un modelo de **cuestionario** para el tema en estudio.

Un cuestionario es una lista de preguntas de respuestas cerradas (o preestablecidas) que uno debe escoger, o de respuestas abiertas (de redacción libre) que tienen que ver con el tema en estudio. El modelo que les presentamos es un cuestionario mixto porque tiene preguntas cerradas (de marcar con equis) y preguntas abiertas.

Liceo Bolivariano ____

Consumo de bebidas por adolescentes

Instrucciones: lea detenidamente cada pregunta y marque con una equis (x) cuando tenga que escoger la respuesta suministrada o escriba en los espacios respectivos su respuesta. Agradecemos responder todas las preguntas que aquí aparecen. Algún comentario adicional puede hacerlo por escrito al final del cuestionario. Este cuestionario es anónimo y los datos solo serán usados con fines de investigación y estarán resguardados por el secreto estadístico.

¿Cuál es tu condición para esta investigación?
Estudiante del liceo ____ o vecina o vecino que no estudia en el liceo ____
¿Cuál es tu edad? ____ ¿Qué género? Femenino ____ Masculino ____

De las siguientes bebidas, ¿cuánto consumes en una semana?

Ejemplo

Bebida	Vasos	Latas	½ litro	Platos
Agua	30		2	

Bebida	Vasos	Latas	½ litro	Platos
Agua				
Jugos naturales				
Jugos artificiales				
Refrescos				
Energizantes				
Lácteos				
Sopa				

¿Cómo consideras tu consumo de líquido diario?
Suficiente ____ Más o menos ____ Poco ____ Insuficiente ____

¿Existen bebederos que funcionen en tu liceo? Sí ____ No ____

¿En tu casa acostumbran a tomar suficiente líquido? Sí ____ No ____

¿Qué marcas de refresco son de tu preferencia? ________________

Por su parte, cuando realizamos una entrevista también preguntamos, solo que se requiere que tanto el entrevistado como el entrevistador estén presentes frente a frente, lo que impide que puedan recolectar datos de muchas personas en forma simultánea, por lo general, pueden llevar las preguntas de respuestas abiertas preparadas. En ese caso se dice que la entrevista es estructurada, o semi estructurada si algunas preguntas están preparadas y otras surgen en la conversación. La entrevista no estructurada solo tiene la temática a tratar, pero las preguntas no están previamente establecidas sino que surgen en la conversación, aunque el entrevistador sabe hacia cuál tema va a orientar la entrevista.

En el caso de la entrevista se habla de un **guión de entrevista** y si se puede se graban las respuestas o se escriben las palabras clave de lo que el entrevistado conteste en un cuaderno o libreta de anotaciones.

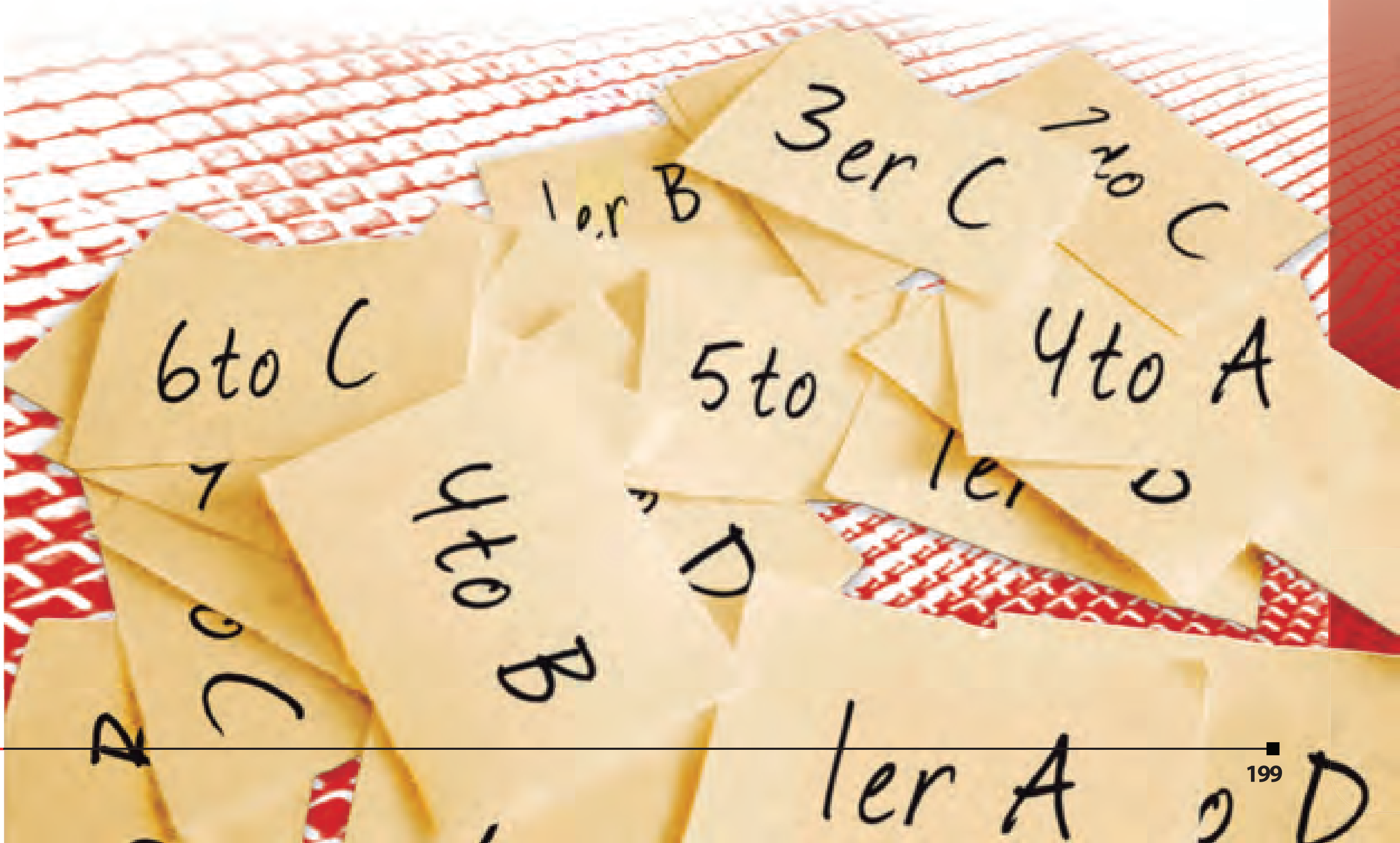
Recuerden, el instrumento que ustedes hagan debería mejorar a éstos que se mostraron, ya que se adaptaría a lo que ustedes debatieron y a su situación real y concreta.

Es conveniente de que después de que cada equipo haya debatido su propuesta de técnica e instrumento de recolección de datos, lo sometan a la socialización colectiva para, de ser posible, tener un único instrumento por el curso. Si hay varias secciones de matemática, escoger a algún delegado para que debata con las y los delegados de las otras secciones y se debe tener un solo instrumento para recoger los datos. Este es un proceso de debate que permite desarrollar tanto los valores de democracia participativa y protagónica como de democracia representativa, en el que la capacidad de exponer nuestras ideas, de escuchar y analizar la de los otros y de llegar a conclusiones por acuerdos es muy importante. Se sabe que la recolección de datos va a ocupar varias horas de trabajo y que posiblemente no solo deba plantearse en la clase de Matemática, sino también en la de Salud, Lenguaje, Ciencias de la Naturaleza o hasta en la de Sociales, de forma que pueda ser un proyecto conjunto de investigación.

También es necesario que cada equipo se encargue de recolectar los datos tanto en el liceo como en la comunidad cercana donde viven. Les proponemos que se escoja al azar a qué equipo le va a tocar recolectar los datos en primer año, en segundo, tercer, cuarto y quinto año. Si tu liceo tiene sexto año, también lo incluyen. Y dos equipos que deberían recolectar los datos en la comunidad vecina, puede ser por sectores. Si el liceo tiene varias secciones de matemática, su profesora o profesor deberá coordinar la selección de manera que a cada equipo le toque una sección o sector de la comunidad distinto. Al final, todos los estudiantes de matemáticas estarán simultáneamente (de ser posible) recolectando los datos sobre lo que están bebiendo los adolescentes.

Para realizar una **selección al azar** debemos procurar que todos los cursos que tenga el liceo así como los sectores vecinos estén identificados, sean posibles de ser seleccionados y que la forma de escogerlos no sea con alguna intención. Se debe cuidar que haya tantas secciones o sectores como equipos de trabajo estén conformados en el curso de Matemática, para que todos los equipos tengan una selección y para que ningún año en estudio o sector se quede sin ser escogido.

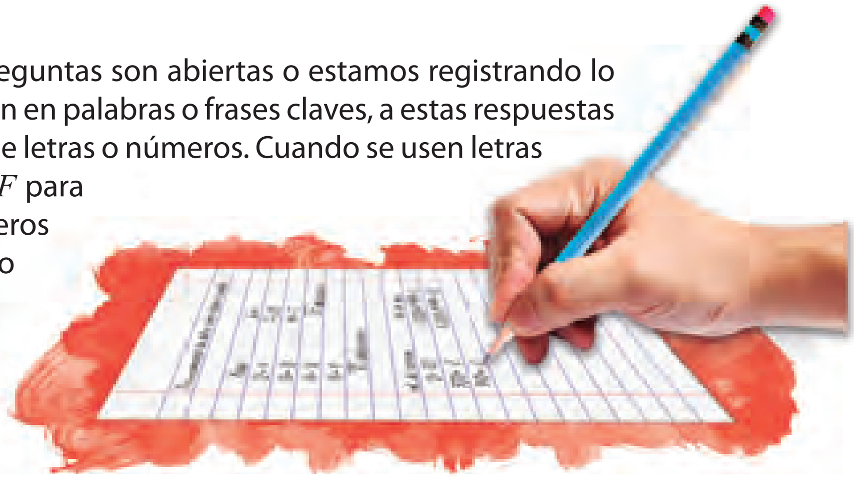
Una manera muy sencilla de escoger al azar es que se escriba en papelitos, de igual tamaño y textura, el año y sección de cada curso del liceo y el nombre de cada sector vecino. Se dobla cada papelito y sin ver o de manera simultánea un delegado de cada equipo escogerá el papelito que dirá cuál será la responsabilidad de cada grupo en la recolección, procesamiento, presentación y análisis de los datos. Es decir, que si te sale 4to B, esa es la sección de cuarto año que le tocará a tu equipo trabajar y a los estudiantes de 4to B les van a aplicar el instrumento de recolección de datos que se haya construido y decidido. A otro equipo le tocará otra sección, año o sector vecino.



Método de procesamiento de datos

Cuando ya se hayan recogido los datos de las y los adolescentes, corresponderá aplicar el **método de organización o procesamiento de los datos**. Este es un método donde se van a revisar que estén todos los datos, si se encuentra algún error de recogida y en la medida de lo posible se deberá corregir el error y se clasificarán los datos según sean cualitativos o cuantitativos.

En algunos casos, en especial cuando las preguntas son abiertas o estamos registrando lo que observamos, necesitamos resumir la información en palabras o frases claves, a estas respuestas u observaciones se les puede codificar sea a través de letras o números. Cuando se usen letras diremos que el código es alfabético, es el caso de F para femenino y M para masculino, si se usan números ($Sector$ 1, 2, 3,... para el caso de los vecinos que no estudien en el Liceo) el código se llamará numérico. También hay códigos alfanuméricos porque usan los dos tipos de códigos, por ejemplo $A1$, $A2$ o $3a$, $3b$, $3c$.



Tanto en el caso de los datos cualitativos o rasgos como en el caso de los datos cuantitativos, tendremos que contar cuántas veces se repite cada rasgo o valor, lo que nos permitirá obtener la frecuencia simple o absoluta.

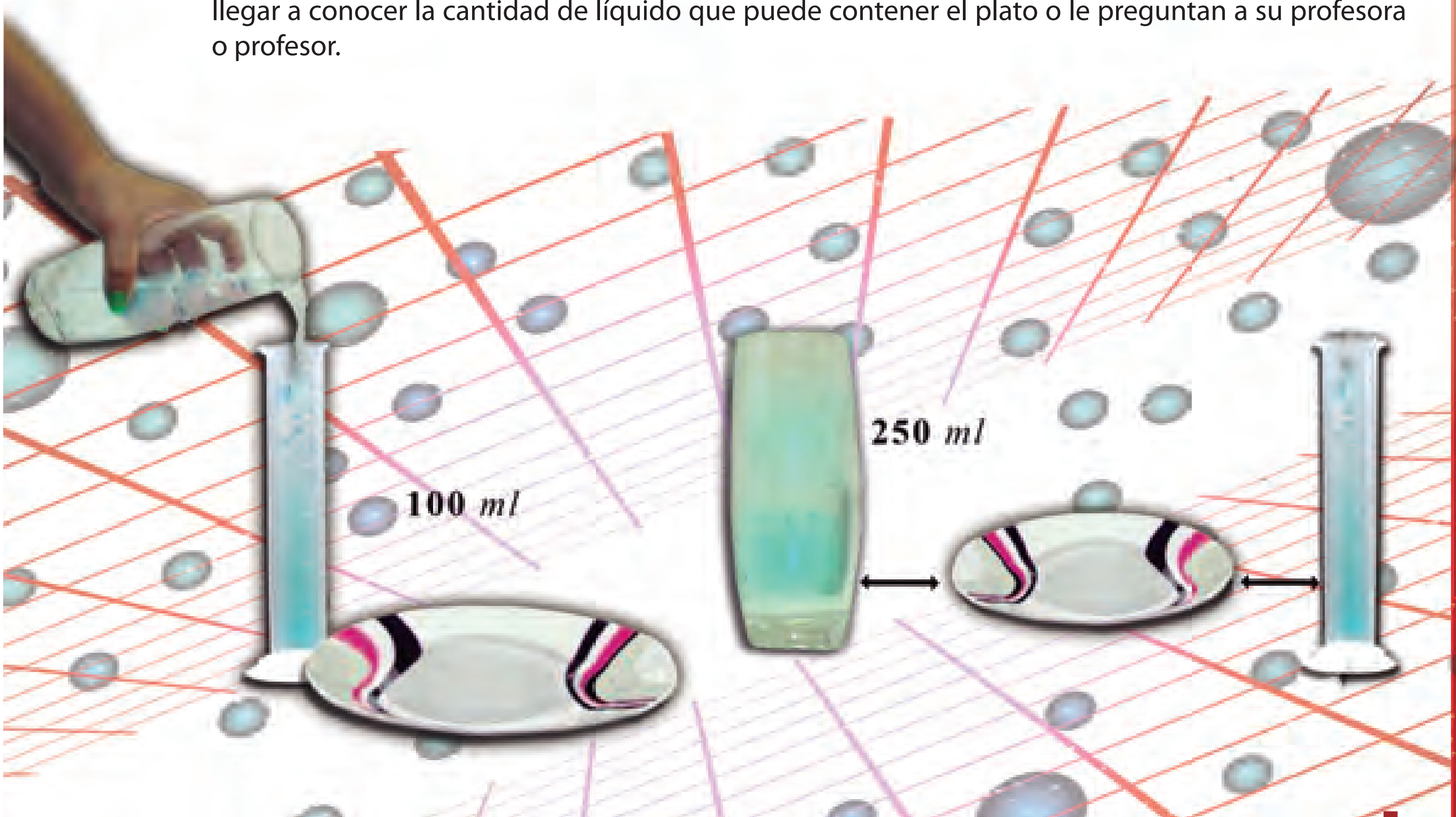
Todos estos procesos forman parte de la organización de los datos estadísticos, que puede hacerse tanto de forma manual como computacional.

En este estudio, es muy importante la cantidad de bebidas consumidas diariamente o en una semana así como el tipo de bebida. Al totalizar esta variable debemos tomar en cuenta que si se usaron varias unidades de medida, deberán ser transformadas a una unidad única que permita hacer la comparación entre los sujetos que se estudian y entre los tipos de bebidas que se consumen.

Observen este ejemplo que puede servirles para esclarecer lo que se acaba de explicar. En la hoja de registro que se les propuso en páginas anteriores debíamos observar y registrar la cantidad de vasos, litros, etc. de las bebidas por ejemplo, el agua. Si el lunes una persona tomó 4 vasos de agua y el martes una botella de $500\ cc$, el miércoles 5 vasos de agua y el resto de los días $1\ litro$ de agua por día, para totalizar este consumo en la semana debes convertir las diversas medidas (vasos, cc y litros) a una sola unidad de medida, por ejemplo cc o ml, que vendría a ser la unidad de medida más pequeña de las que se colocaron para registrar en la hoja. Un vaso equivale aproximadamente a $250\ ml$ y un $litro$ a $1.000\ ml$, cuando vayas a totalizar el consumo de agua de esa persona sería:

$$4 \cdot 250\,ml + 500\,ml + 5 \cdot 250\,ml + 1.000\,ml + 1.000\,ml + 1.000\,ml + 1.000\,ml = 6.750\,ml$$

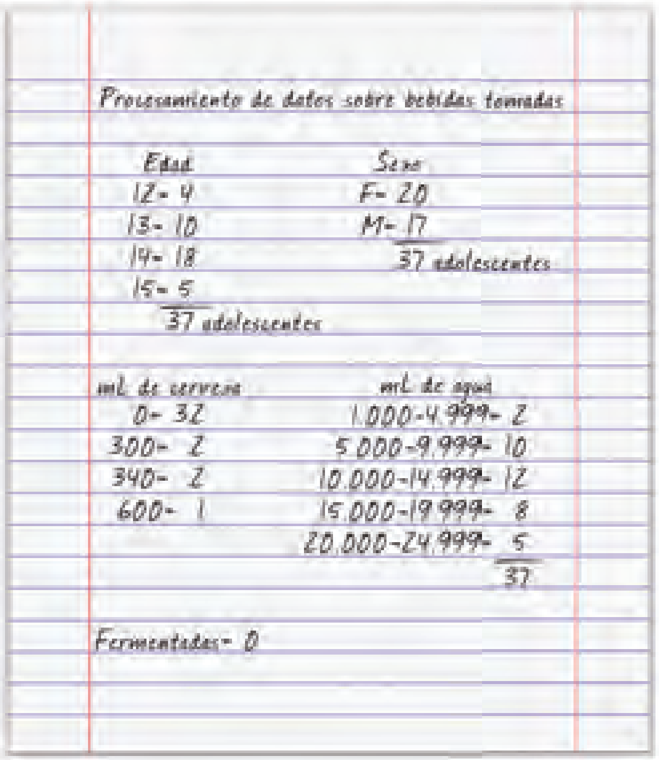
Se les sugiere que hagan esta transformación tanto si usan la hoja de registro como si usan el cuestionario. Para el caso de los platos tomen un patrón que sería uno sopero y con ayuda de un cilindro graduado o una botellita de agua mineral, viertan agua en el plato y estimen su capacidad a través del volumen de agua o cantidad de líquido que puede contener ese plato y aunque no todos los observados o encuestados tienen el mismo plato, lo estimado sirve para convertir aproximadamente su capacidad en ml. Ustedes también pueden ingeniarse una forma de llegar a conocer la cantidad de líquido que puede contener el plato o le preguntan a su profesora o profesor.



Cuando ya hayan transformado y calculado los totales de consumo semanal en *ml* de bebidas, se procede a elaborar una matriz de datos en las que para cada sujeto observado le colocamos su respectivo resultado a cada una de las variables estudiadas. Para que no se confundan, les suministramos este ejemplo en las que aparecen tres supuestas personas a las que se les pudo hacer la observación (sujetos 1, 36 y 384) de una matriz imaginaria de datos. Miren cómo se puede resumir en una sola línea lo observado a cada sujeto, con esta matriz el proceso de conteo manual se hace mucho más rápido y nos va a permitir describir con precisión el comportamiento del grupo.

					Total *ml* de bebidas consumidas a la semana						
Sujeto	Año	Sector	Edad	Sexo	Agua	Jugo N	Jugo A	Refrescos	Energizantes	Lácteos	Sopa
1	2		13	f	14.250	3.000	1.000	1.000	0	1.000	250
36	4		16	f	10.000	1.000	2.500	4.000	0	1.250	0
384		A1	16	m	14.000	750	1.500	2.000	0	500	0

Les explicamos cómo pueden hacer el conteo de la variable **edad** que aparece en la cuarta columna de la hoja de registro. Como las unidades de análisis son cada uno de las y los adolescentes, porque es de quien nos interesa conocer el consumo de bebidas, sus edades deben estar en el intervalo de 10 a 17 años de edad. De esta manera, cada equipo contará cuántos adolescentes estudiados tienen alguna de esas edades, como resultó en una experiencia parecida en otro año escolar que un equipo tuvo 4 de 12 años, 10 de 13 años, 18 de 14 años y 5 de 15 años. En el caso del sexo que está en la quinta columna de la hoja de registro, cuenten la cantidad de *F* y de *M* que hay en la hoja de registro y así sabrán cuántas muchachas y muchachos fueron estudiados en su equipo.


Procesamiento de datos sobre bebidas tomadas

Edad
12- 4
13- 10
14- 18
15- 5
37 adolescentes

Sexo
F- 20
M- 17
37 adolescentes

ml de cerveza
0- 32
300- 2
340- 2
600- 1

ml de agua
1.000-4.999- 2
5.000-9.999- 10
10.000-14.999- 12
15.000-19.999- 8
20.000-24.999- 5
37

Fermentadas- 0

Para la variable **total** de *ml* de cada bebida consumida en una semana, como son tan diversos los resultados, pueden construir intervalos que incluyan desde el valor mínimo al máximo, por ejemplo:

0 a 500 *ml*; 501 a 1.000 *ml*; de 1.001 a 1.500 *ml*

y así sucesivamente. Sin embargo, esta agrupación solo será necesaria a los efectos de presentar los datos estadísticos, para cálculo de medidas estadísticas se recomienda trabajar con los datos sin agrupar.

Ahora apliquemos el **método de presentación de datos.**

La presentación de datos pueden hacerla a través de:

Los **párrafos** o **textos** pueden utilizarse para presentar las variables que tengan pocos rasgos o valores o para indicar que una característica es constante, por ejemplo, para la variable **sexo** se puede presentar así: "más de la mitad de las y los adolescentes estudiados son muchachas" (20/37). Y para la variable **fermentados**: "ningún adolescente consumió bebidas fermentadas esa semana".

Las **tablas** se usan para presentar los datos de manera precisa o cuando tenemos muchos datos e información que presentar. Hay tablas simples, compuestas y de doble entrada. Las tablas de doble entrada presentan dos variables a la vez. Fíjense en estos ejemplos:

***Tabla 1*. Consumo semanal de agua (*ml*) por adolescentes de 3° B, abril 2011**

Título de la tabla

ml	Adolescentes	Frec. acumulada
1.000 a 4.999	2	2
5.000 a 9.999	10	12
10.000 a 14.999	12	24
15.000 a 19.999	8	32
20.000 a 24.999	5	37
Total	37	///

Encabezado

Cuerpo de la tabla

Fila del total

¿Cuántas variables se están presentando en esta tabla? ¿Y cuántas columnas de datos?

¿Cómo creen que se obtuvo la columna de frecuencias acumuladas? Examinen las cantidades que ahí aparecen y asócienlas a la frecuencia simple o número de adolescentes que consumieron las cantidades presentadas en *ml*.

Estas frecuencias se leen así:

- Dos adolescentes toman a la semana 4.999 *ml* o menos.
- 12 adolescentes (o una docena) consumen 9.999 *ml* o menos a la semana.

Lo que es igual a decir que 12 adolescentes toman menos de un litro de agua a la semana, lo cual es muy poca agua.

Compartan en su equipo cómo se leerían el resto de las frecuencias acumuladas de esta tabla.

Cuando calculen sus frecuencias acumuladas, recuerden que sólo deberán hacerlo para variables cuantitativas, para que tenga algún sentido aplicarla.

Inténtenlo con el género y argumenten por qué no es aplicable la frecuencia acumulada en esta variable.

Socialicen en clases si la *tabla 1* debe considerarse simple o compuesta.

Observen la tabla de doble entrada (*tabla 2*) en la que aparecen dos variables, el consumo de agua semanal en *ml* y el género o sexo de las y los adolescentes.

***Tabla 2*. Consumo semanal de agua (*ml*) por adolescentes de 3° B, abril 2011**

ml	Adolescentes		
	Muchachas	Muchachos	Total
1.000 a 4.999	1	1	2
5.000 a 9.999	4	6	10
10.000 a 14.999	8	4	12
15.000 a 19.999	3	5	8
20.000 a 24.999	4	1	5
Total	20	17	37

De las dos personas que consumen menos de cinco litros a la semana una es una muchacha y otra es un muchacho. Si les plantean $X \leq 4.999$ *ml* les están indicando que se consumió 4.999 *ml* o menos lo que es igual a decir menos de 5 *litros* ya que 5.000 *ml* equivale a 5 *litros*. Observen que de los 10 que tomaron de 5.000 a 9.999 *ml* de agua (de 5 a menos de 10 *litros*) hay 4 muchachas y 6 muchachos, es decir, que hay más muchachos que toman esa cantidad del vital líquido. En clase, con la ayuda de su profesora o profesor, ejerciten la manera de leer estas frecuencias ya que nos permiten describir con más precisión lo que ocurre en una variable con respecto a otra con la que se procesó.

Otra forma de presentar los datos es el uso de gráficos. Esta es una manera más artística y atractiva de presentar los datos tanto cualitativos como cuantitativos.

Método de análisis

En las tablas y en los gráficos también podemos obtener cuál es la cantidad de líquido más frecuentemente tomada por estos adolescentes, observen la frecuencia total a la derecha de la *tabla 2* y compárenla con la cantidad de adolescentes que aparecen en la *tabla 1*. Sus valores coinciden porque refieren al número de veces que un adolescente consumió las distintas cantidades agrupadas de líquido. El total 12 indica que de 10.000 a 14.999 *ml* de agua es la cantidad más frecuentemente consumida. En la variable del género como el sexo femenino tuvo más personas (20 personas), se dice que el sexo femenino fue el más frecuente en ese grupo de adolescentes.

Cuando examinamos los valores o rasgos que más se repiten, estamos buscando el **Modo** o **Moda,** medida estadística que se utiliza para resumir el comportamiento de los datos. En los dos ejemplos que se suministraron encontramos que hay un solo modo: o el intervalo que va de 10.000 a 14.999 *ml* o el género femenino

Una variable puede ser:	
Amodal	Si no tiene Modo
Unimodal	Cuando solo hay un Modo
Bimodal	Si existen dos Modos
Multimodal	Tres o más Modos presentes

Otra medida que se puede obtener cuando preferiblemente tenemos datos cuantitativos es aquella que al ordenar los datos de menor a mayor o de mayor a menor, ocupa el puesto central de los datos y por tanto va a dividir los valores ordenados en dos partes iguales, en este caso se obtiene la **Mediana**.

La **Mediana** es aquel valor que al ocupar el puesto medio o central de unos datos ordenados nos permite analizar los valores inferiores o iguales que poseen el 50% o mitad de los datos y los valores superiores o iguales de la otra mitad de los datos.
Su nomenclatura es *Md*, aunque otros autores dicen *Me*.

Para el caso de la variable edad en el ejemplo que hemos venido presentando en esta lección tendríamos 37 edades ya que ese es el total:

12, 14, 13, 15, 12, 14, 13, 14, 14, 13, 14, 15, 12, 13, 13, 14, 14, 13, 15,
13, 14, 14, 14, 15, 13, 13, 14, 14, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 14, 12, 14

Si queremos obtener el puesto medio para estos 37 datos, la lógica nos dice que deberíamos dividir la cantidad de datos entre dos, para que quede en la mitad. De esta manera dividimos $37/2 = 18{,}5$. Ahora bien, ¿este 18,5 será la edad mediana? Fíjense que no hay ninguna edad con ese valor, además que estamos trabajando con adolescentes de 12 a 15 años en ese grupo.

¿Y si usamos el 18,5 para contar el puesto que ocuparía en estos datos, qué valor le correspondería a ese puesto en las edades si contamos de menor a mayor o de mayor a menor? ¿Creen que esa edad que obtuvieron de verdad esté en el centro o medio de los datos? ¿A qué se debe en este caso que la medida no resume apropiadamente a esta variable? Intercambien sus opiniones al respeto. Estas impresiones también las vivieron y pensaron quienes crearon estas medidas estadísticas. Vamos a partir de la experiencia de los estadísticos para mejorar lo que acabamos de hacer.

En primera instancia debemos ordenar los datos de la mayor edad a la menor, para así obtener un valor que verdaderamente esté en el puesto medio de los datos:

15, 15, 15, 15, 15, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14,
14, 14, 14, 14, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 12, 12

Luego como son 37 edades y éste es un número impar, se recomienda agregar un número más para que al dividir nos resulte un valor entero que sería el puesto que ocupará la mediana. En este caso sería $(n + 1) / 2$. Así tendremos $(37 + 1) / 2 = 38/2 = 19$. Quiere decir que la edad que ocupe el puesto 19º será la mediana.

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°... ...16° 17° 18° 19°
15, 15, 15, 15, 15, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14,
14, 14, 14, 14, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 12, 12
Mediana

Por lo que diremos que la mitad de estos adolescentes estudiados tiene 14 años o menos edad y 19 adolescentes, la mitad de este grupo, tienen 14 años o hasta 15.

Este dato será muy importante al analizar la edad de los adolescentes que llegaron a tomar alguna bebida. En el ejemplo que tenían los estudiantes en la otra experiencia, encontraron que sólo cinco adolescentes de los 37 habían tomado sopa, entonces solo trabajaremos con las edades de estos adolescentes: 13, 14, 15, 15, 15. Aquí fácilmente podemos obtener la mediana, primero porque hay pocos datos, estos están ordenados y solo habrá una mediana dado que la cantidad de datos es impar. En este caso la $Md = 15$ años de edad, lo que significa que la mitad de estos adolescentes que toman sopa tienen 15 años de edad o una edad menor (hasta 13 años), mientras que la otra mitad, apenas 3 personas tienen 15 años. Lo que nos podría estar indicando que en este grupo primero son muy pocos los que toman esta bebida y la mitad tendría edades de 13 a 15 años, siendo la edad más observada o moda 15 años.

¿A qué otras variables de nuestro estudio consideran ustedes se les puede calcular y analizar la mediana? Debatan en clases sus resultados.

Otra medida estadística que es muy importante es la conocida como promedio, aunque lo correcto sería llamarla **Media Aritmética**. Esta se refiere a un valor de la variable que resume a todos los valores y a todos los casos, también se le considera un eje alrededor del cual van a girar los datos. Sólo puede ser obtenida cuando conocemos todos los valores y por tanto la variable arroja datos cuantitativos. Se conoce como $\overline{X}$.

Para el ejemplo de las edades de las y los adolescentes que han tomado sopa, se procede a sumar todas las edades: $13 + 14 + 15 + 15 + 15 = 72$ y luego a dividir entre el número de casos o datos: $72/5 = 14{,}4$ años de edad. Por lo que podemos decir que alrededor de 14,4 años giran las edades de adolescentes de ese grupo que habían tomado sopa, un poco menor al modo y a la mediana, debido a que la media aritmética consideró a la persona que tiene 13 años mucho menor de todos los cinco y al buscar mantener el equilibrio entre las muchachas y los muchachos que tienen 15 años; el único que tiene 13 años, disminuye su valor central.

Ahora si la media aritmética es el valor alrededor del cual giran todos los demás datos, convendría ver y medir qué tan parecidos o no son los datos. Una forma de analizar esto, es comparando el valor mayor con el menor, por ejemplo, si vemos la edad de los 37 estudiantes de nuestro ejemplo:

Valor máximo = 15 y *valor mínimo* = 12. Por lo que los valores enteros y distintos que podemos encontrar entre ellos son el 14 y el 13 y en definitiva sólo podríamos encontrar cuatro valores distintos de edad el 15, 14, 13 y 12. Pero si la variable es el consumo de agua en *ml* se pone mucho más difícil contar cuántos valores distintos puede haber entre el valor máximo *(VM)* = 24.999 *ml* y el valor mínimo (*Vm*) que es 1.000 *ml*.

En ambos casos se recurre a la **amplitud** o **recorrido** de la variable que indica la variabilidad de los datos en términos de cuántos datos posibles hay en el intervalo total de valores de una variable, utilizando una simple fórmula que plantea $A = (VM - Vm) + 1$, donde VM es el valor máximo y Vm es el valor mínimo de la variable Mientras mayor sea el valor de la amplitud, mayor será la variabilidad posible en una característica.

Para los *ml* de agua consumidos la amplitud sería $A = (24.999 - 1.000) + 1$ resultando 24.000 valores enteros posibles. Sin duda esta característica es mucho más variable que la edad. No obstante, la amplitud tiene una limitación matemática que solo toma en cuenta dos valores de la variable para indicar la variabilidad, el máximo y el mínimo y no nos permite conocer qué ocurre con el resto de los valores. En este sentido, los estadísticos ensayaron con otras medidas que permitieran conocer más sobre la variabilidad de los datos. Sin embargo para su explicación vamos a requerir conocimientos matemáticos que vas a aprender en el tercer año del nivel de Educación Media, como es la radicación.

En las variables que recolecten sobre el estudio de las bebidas que tomen las y los adolescentes de su liceo y de la comunidad vecina calculen la media aritmética, la amplitud, el modo y la mediana ya que estas cuatro medidas les van a permitir analizar el comportamiento de cada variable.

Debatan en clases si a todas las variables que recolecten se les pueden calcular y analizar todas estas medidas.

Para resumir lo visto en esta lección, al principio se plantearon unas afirmaciones sobre la necesidad del consumo de líquidos por parte de niños, niñas, adolescentes y adultos. Se les propuso que hicieran una investigación para conocer y comparar los resultados actuales de los miembros de tu liceo y comunidad circunvecina. Para llevar a cabo esta indagación se te enseñaron algunos aspectos de los métodos de recolección, organización, presentación y análisis de datos estadísticos. Sin embargo, de poco sirve que apliquen estos conocimientos si eso no sirve para conocer, reflexionar, comprender y transformar lo que sea necesario de la realidad que se estudia.

La adolescencia es una etapa de la vida durante la cual las personas como ustedes moldean su individualidad, crean un sistema de valores adultos y empiezan a independizarse de sus padres o responsables. ¿Les parece saludable la cantidad promedio de consumo de agua, jugos, y otras bebidas por parte de ustedes y el resto de los adolescentes estudiados?

La familia influye en el proceso de socialización desde el principio y a mediados de la infancia, mientras que la influencia de los compañeros es más importante durante la adolescencia. El nivel socioeconómico y los medios masivos de difusión también desempeñan un papel importante en el proceso de socialización del adolescente, en las acciones que realizan y en las normas y valores que posean.

Actividades

1. ¿Creen ustedes que este consumo de bebidas puede estar influenciado por costumbres familiares, por presión de las y los amigos o por imitación de patrones de consumo que muestran los medios masivos de comunicación?

2. Publiquen en una cartelera o pendón, los resultados de esta indagación y de cualquiera otra que también realicen de manera estadística. Acompañen esta publicación con jornadas de explicación y divulgación a todos los miembros de la comunidad, que les permita conocer, comprender y concientizar esta situación real.

Carato de maíz

El carato de maíz: Es una bebida típica venezolana que, siendo de origen indígena, hasta no hace mucho estuvo vigente en la cotidianidad de numerosas ciudades del país, especialmente en los poblados del interior. El carato es una bebida que se prepara agregando pedazos de casabe, harina o masa de yuca hervida en agua. Es refrescante y nutritiva, se le suele agregar otras hierbas o sabores para hacerla más apetecible. Los caribes de Anzoátegui la denominan "capino".

El pulque: es una bebida de origen natural que es conocida en México desde la época prehispánica. La bebida es hecha con el Maguey, una planta de la familia de los cactus, cuyo nombre significa "Árbol de las Maravillas", y desde la época prehispánica era muy apreciada por los indígenas que vivían en el territorio que hoy ocupan los estados de México: Hidalgo, Puebla y Tlaxcala, en donde, por el clima y la altura, se cultiva el maguey pulquero.

Pulque

3) Redacten un ensayo donde destaquen los aspectos positivos de no ingerir bebidas alcohólicas y en especial en la adolescencia.

4) Indaguen cuáles eran y son las costumbres de nuestros pueblos originarios en cuanto al consumo de bebidas por parte de los niños, niñas y adolescentes.

5) Pregúntenle a alguna persona mayor de 50 años, cuándo consideran ellos que empezaron a tomar bebidas gaseosas los muchachos y las muchachas venezolanas desde la niñez y si se debe a algún patrón de consumo copiado o adquirido, y a quiénes les generará ganancias este consumo desde tan temprana edad.

6) Plantéense otros temas de interés para la indagación estadística y en la que puedan fortalecer los aprendizajes adquiridos en esta lección.

7) Pueden revisar las páginas web del Ministerio del Poder Popular para la Salud (*www.mppps.gob.ve*) o la de la Organización Mundial de la Salud (*www.who.int/en/*) para que vean otras maneras de presentar los datos estadísticos y encuentren otro tipo de información ligado a éste tema y otros de su interés.

Trapiche de caña de azúcar

¿Y si me toca a mí?

Escogencia de las y los miembros de mesa

El domingo pasado en una reunión familiar se comentó que había salido en prensa que ya iban a comenzar a escoger a las personas que van a ser miembros de las mesas electorales para la próxima elección nacional. Mi mamá decía, ¿y si me toca a mí?, otros planteaban que ya habían sido miembros en las elecciones pasadas y no debería tocarles otra vez, algunos decían ¡ojalá me escogieran a mí para estar presente en tan importante decisión histórica! ¿Piensan ustedes como estas personas y desearían tener la edad para que las y los escogieran y así poder participar?

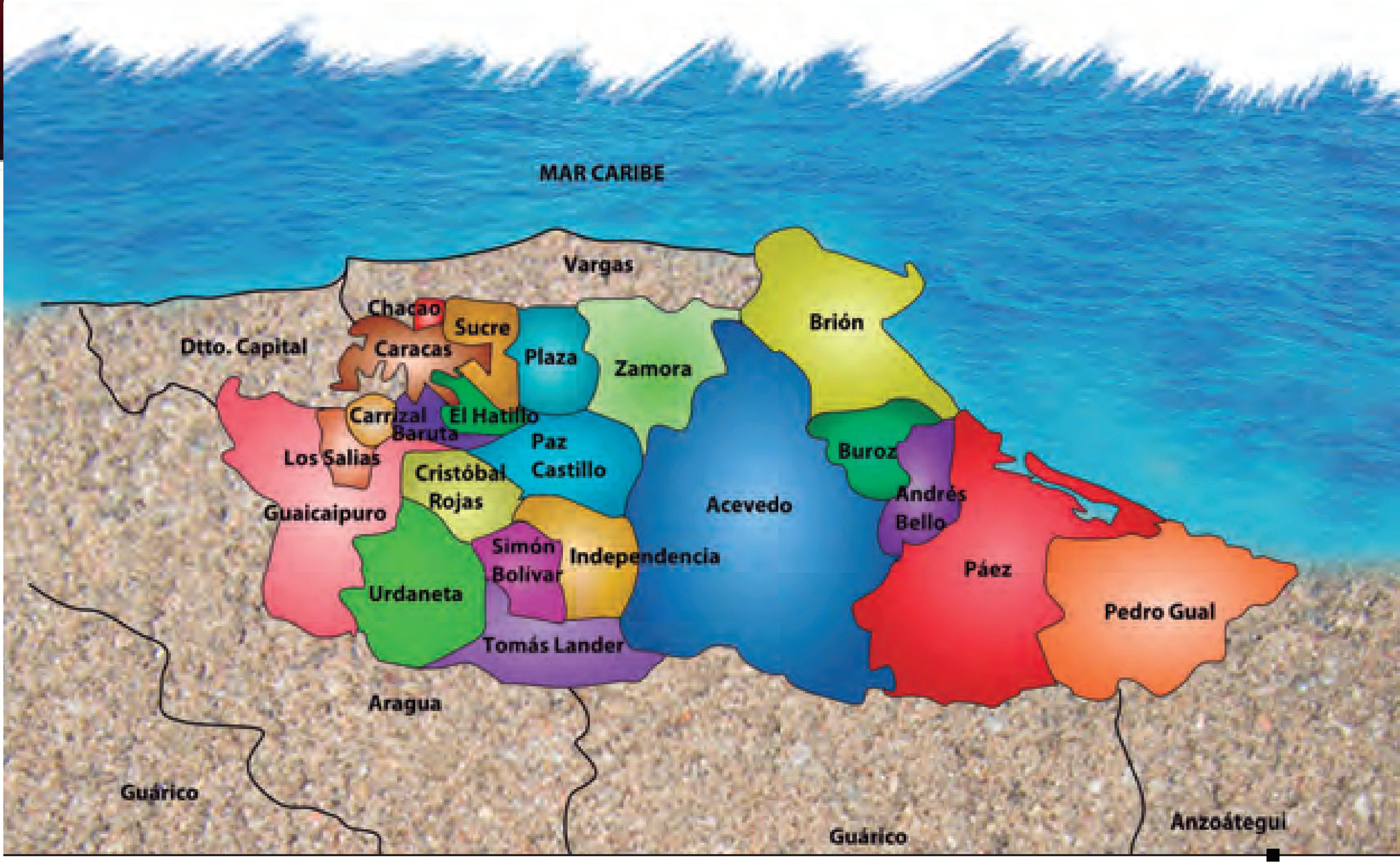
12

Primero, debemos saber más al respecto, busquen información que los ayude a entender cuál es el procedimiento para la selección de quienes conformarán las mesas electorales, en la página web del Consejo Nacional Electoral, *www.cne.gob.ve.*

Pueden encontrar que la selección de las personas es aleatoria y se hará del total de las y los inscritos en el Registro Electoral Permanente (REP) para cada junta electoral y mesa de votación que se conforme. Se excluyen para prestar el servicio electoral obligatorio a aquellas personas bajo las excepciones de ley. Sería muy interesante que ustedes revisen y conversen sobre lo que implica la obligatoriedad del servicio electoral y a quiénes se excluyen de cumplirlo y por qué.

La palabra aleatorio se refiere a suerte o azar y proviene del vocablo latino "aleae". Un suceso aleatorio no puede ser atribuido con certeza a alguna causa en particular, conocida o no.

Trabajemos con un ejemplo. En el estado Miranda, de cada mesa de votación que tiene aproximadamente 500 personas se seleccionan cuatro miembros de mesa: presidenta o presidente, miembros A y B y la secretaria o el secretario.



Se escogen de todos los inscritos 4 miembros principales y 17 suplentes, en total deben seleccionarse 21 personas del total de personas inscritas y que les correspondería estar registrado en alguna de las mesas electorales, de las tantas de cada centro electoral de Miranda. Sin embargo, aún no se ha calculado la probabilidad de que nuestra mamá, vecino o vecina sean seleccionados.

Examinemos qué ocurre y procedamos a calcular.

Lo primero es que los eventos electorales en nuestro país, como muestra de nuestro régimen democrático, se realizan muy a menudo (desde el año 1998 se han hecho en promedio una elección nacional o regional al año) y cada escogencia de las y los miembros de mesa es un **evento independiente**, lo que significa que si fuimos escogidas o escogidos en una elección para ser miembro de mesa no afecta que seamos escogidas o escogidos o no de nuevo. Por lo tanto, aquellas personas que ya fueron seleccionadas con anterioridad, es probable que puedan ser aleatoriamente escogidas de nuevo, como también es probable que no vuelvan a ser escogidas.

Segundo, si en una mesa electoral hay 450 personas registradas, si la escogencia es al azar, todas esas personas tienen una probabilidad igual de ser escogidas la cual sería $\frac{1}{450}$, y si tenemos que escoger a 21 personas de esa mesa electoral, la probabilidad sería $\frac{21}{450}$.

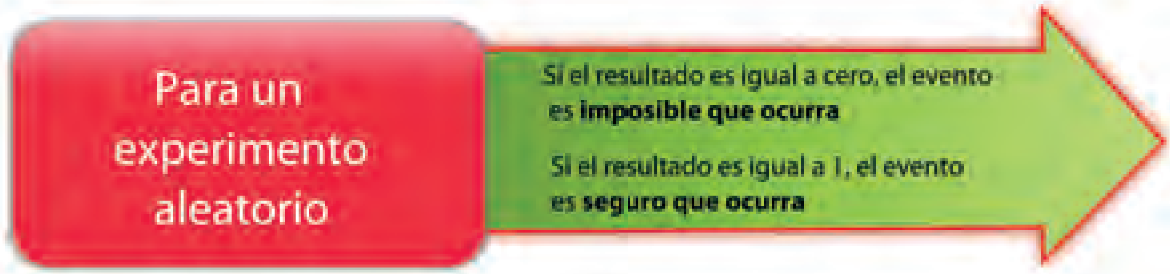
En cada caso estamos haciendo uso de la fórmula clásica de probabilidad:

$$P(A)=\frac{\textit{número de casos favorables a la condición "A"}}{\textit{número total de posibles resultados del experimento aleatorio}}$$

Aquí el experimento aleatorio viene a ser la escogencia al azar de las personas mayores de edad que están en el REP y no están excluidas por excepción de ley, sin que exista posibilidad de que en la misma selección vuelvan a aparecer.

Por lo tanto, la probabilidad de que nuestra mamá o nuestras vecinas o vecinos sean sorteados para ser miembros de mesa de votación será la misma que para todas y todos los que les corresponda votar en esa mesa y dependerá de la cantidad de votantes.

- ¿Qué creen que ocurrirá con la probabilidad de ser sorteado si la cantidad de votantes en una mesa es menor, por ejemplo, a los 450 que estaban en una mesa del estado Miranda?
- ¿Será mayor o será menor la probabilidad?
- ¿Qué probabilidad tiene de ser escogida una persona que aparece registrada como votante en la mesa 1, de aparecer en el sorteo de la mesa 3?



Una probabilidad igual a 1 sólo podrá resultar de una fracción en la que el numerador y el denominador sean iguales.

Ahora, observemos qué pasará con los 4 miembros principales que conforman una mesa de votación, supongan que salieron por sorteo aleatorio las ciudadanas y los ciudadanos: Carmen González, Emperatriz Maduro, José Pérez y Agustín Meneses. El software que adjudica por sorteo la función que han de ejercer cada una de estas personas debiera plantearse que la selección se va a realizar sin reposición, es decir que quien ya tiene una función de las de la mesa de votación, no puede ser escogida para otra función. De esta manera, la probabilidad de una persona de ser seleccionada como miembro A, depende de quién fue escogido como presidenta o presidente y así ocurrirá con las otras dos funciones que faltan.

Veamos el *cuadro* 1.

Cuadro 1. Posibles resultados del experimento aleatorio: escoger sin reposición personas que van a realizar alguna función en la mesa de votación.

Función	Participantes	Probabilidad
Presidenta o presidente	Cuatro	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
Miembro A	Tres (ya uno fue escogido)	$\frac{1}{3} = 0{,}333...$
Miembro B	Dos (ya dos fueron escogidos)	$\frac{1}{2} = 0{,}50$
Secretaria o secretario	Uno	1, es seguro que la persona que falte por escoger, cumpla esta función

En este caso, inicialmente las personas sorteadas desconocen que han sido seleccionadas y por tanto la elección de quién va a fungir como presidenta o presidente de mesa de votación es igual para todas ($P_r = \frac{1}{4}$) y seguiría siendo así para los otros miembros. Si la selección fuese con reposición o con reemplazo, es decir que quienes fueron escogidos vuelven a incorporarse al grupo y pueden ser seleccionados otra vez, esto no alteraría el denominador de la fórmula de probabilidad o total de casos posibles. En el *cuadro* 1 se observa que los denominadores en el cálculo de la probabilidad van cambiando en la medida que se va reduciendo el espacio muestral o total de eventos posibles, ya que la escogencia es sin reposición o sin reemplazo.

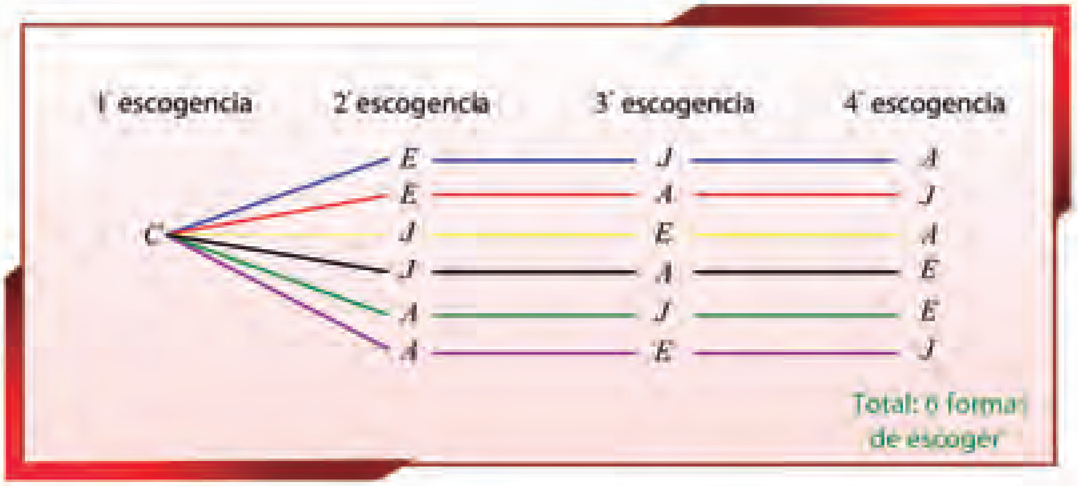
Imaginemos que ahora el experimento aleatorio es seleccionar al azar la composición de la mesa de votación con estos cuatro ciudadanos pero considerando la posibilidad de que en la primera selección la ciudadana Carmen González, queda sorteada como la presidenta de esa mesa de votación. Abreviemos sus nombres colocando la primera letra de cada uno de ellos, así tendremos C, E, J y A (Carmen, Emperatriz, José y Agustín).

En el *cuadro* 2 vamos a colocar todas las maneras posibles de ocurrencia de las otras funciones de la mesa de votación, si en la primera escogencia la ciudadana Carmen González (C), queda sorteada como la presidenta de la mesa.

Cuadro 2. Posibilidades de funciones para los otros miembros de mesa de votación, si *C* sale como presidenta.

Función	**Si *C* preside, posibilidades:**					
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Presidenta o presidente	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*
Miembro A	*E*	*E*	*J*	*J*	*A*	*A*
Miembro B	*J*	*A*	*E*	*A*	*J*	*E*
Secretaria o secretario	*A*	*J*	*A*	*E*	*E*	*J*

Para llenar este cuadro con todas las posibilidades también se puede hacer uso de una herramienta matemática conocida como el diagrama de árbol, en el que se pueden visualizar cómo llegar a estos resultados tomando en cuenta los elementos que aparecen en cada escogencia, por ejemplo:



Aprecien tanto en el *cuadro* 2 como en el diagrama de árbol, que ninguna combinación se parece a otra, y que si la ciudadana Carmen González es quien primero sale sorteada como presidenta de la mesa de votación al final, son en total seis las posibilidades de que se organicen al azar los otros tres cargos que han de ocupar los otros miembros de la mesa.

Pensemos ahora que quien quedó sorteada en la primera oportunidad como presidenta de la mesa de votación es la ciudadana Emperatriz Maduro, lo cual también es posible. Si les pareció bien trabajar con el diagrama de árbol para conseguir todas las posibilidades de combinar a los otros miembros de mesa, ante la posibilidad de que quien salga como presidenta sea la ciudadana C, también lo pueden usar para conseguir todas las combinaciones posibles en el caso de ser elegida la ciudadana E.

Cuadro 3. Posibilidades de funciones para los otros miembros de mesa de votación, si E sale como presidenta.

Función	Si E preside, posibilidades:					
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Presidenta o presidente	E	E	E	E	E	E
Miembro A	C	C	J	J	A	A
Miembro B	J	A	A	C	J	C
Secretaria o secretario	A	J	C	A	C	J

Como hemos visto, es posible que la mesa de votación sea presidida tanto por la ciudadana Carmen como por la ciudadana Emperatriz, pero también puede ser posible que la mesa sea presidida por cualquiera de los otros dos señores. Realicen en su cuaderno todas las posibles combinaciones de sorteo de funciones para el resto de los miembros cuando el señor José y el señor Agustín, sean los escogidos para cumplir la función de presidente de mesa.

Cuenten cuántos resultados posibles hay considerando que todas las cuatro personas que el Consejo Nacional Electoral seleccionó pueden llegar a presidir la mesa de votación.

Fíjense que, en este caso, se ha hecho la composición de cuántas maneras posibles se pueden asignar al azar las funciones de los miembros de una mesa de votación. ¿Cuántas combinaciones más te dieron cuando consideraste a José y a Agustín?

El total de las maneras posibles de ordenarse constituye en este caso, el **tamaño del espacio muestral**, información vital para conocer la probabilidad de que salgan sorteados en cualquier orden ya que viene a ser el denominador de la fórmula de probabilidad.

Matemáticamente hablando, si se quiere conocer cuántas maneras distintas se pueden sortear las funciones de la mesa de votación, en el que importa el orden en que aparezcan los nombres de las y los escogidos, estaremos calculando el número de **permutaciones** de 4 elementos.

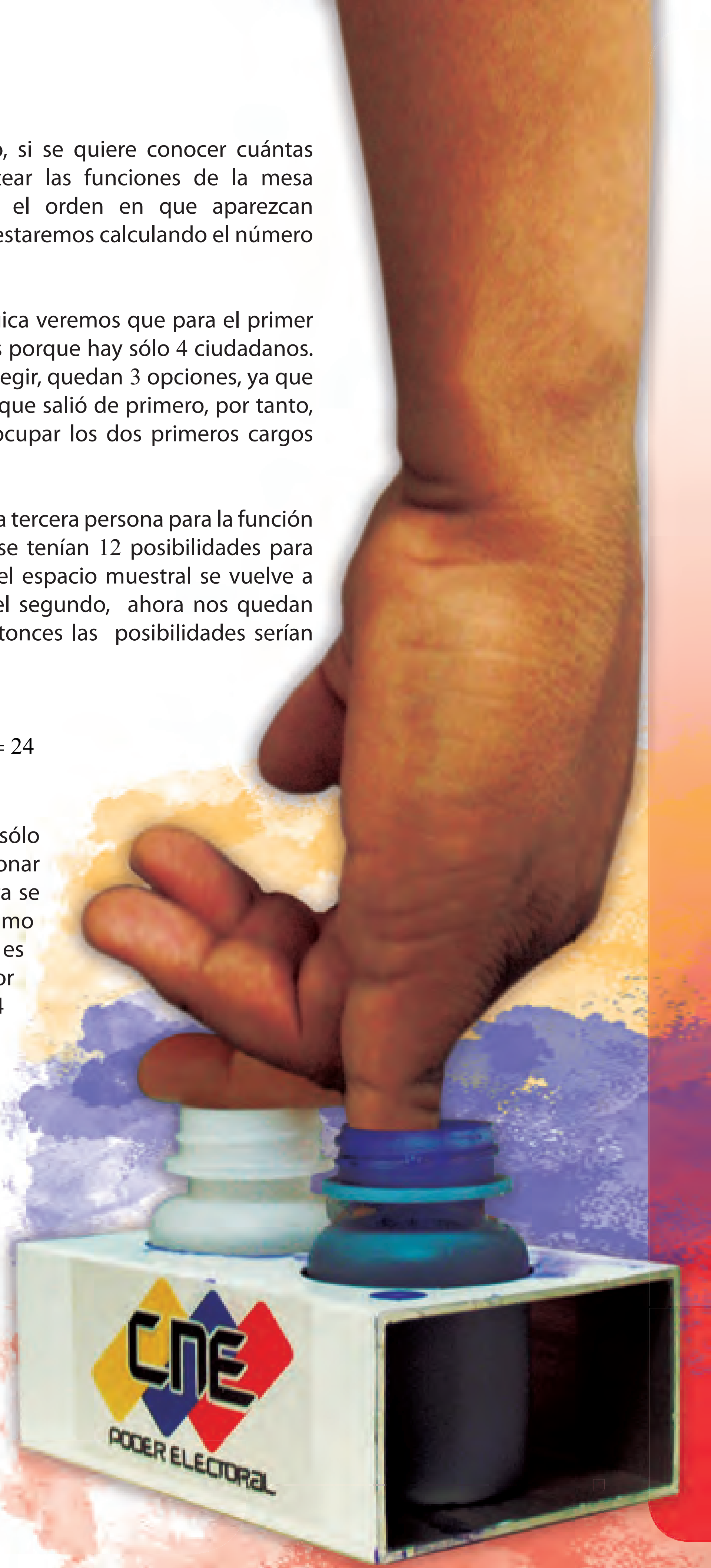
Si aplicamos un poco de lógica veremos que para el primer lugar o función hay sólo 4 opciones porque hay sólo 4 ciudadanos. Para el segundo lugar o función a elegir, quedan 3 opciones, ya que no se repone al espacio muestal al que salió de primero, por tanto, hay $4 \cdot 3 = 12$ posibilidades para ocupar los dos primeros cargos o funciones.

Cuando se quiera escoger a la tercera persona para la función de miembro de mesa B, como ya se tenían 12 posibilidades para ocupar los dos primeros cargos, y el espacio muestral se vuelve a reducir, porque ya salió escogido el segundo, ahora nos quedan solo 2 opciones para escoger y entonces las posibilidades serían $24 = 12 \cdot 2$ o lo que es lo mismo:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

De estas 24 opciones ya sólo quedaría un solo sujeto por seleccionar que para el momento en que ocurra se sabrá quién es el que ocupe el último cargo de la mesa de votación, que es el de secretario de la mesa y por tanto, solo habrán como total 24 posibilidades de considerar a las ciudadanas y los ciudadanos en las distintas funciones como miembros de mesa de votación.

¿Ese fue el resultado que obtuvieron cuando contaron la cantidad de posibilidades en los cuadros anteriores si José, Emperatriz, Carmen o Agustín llegaban a presidir su mesa de votación?



Una manera más rápida de saber qué valor colocar en el denominador cuando necesitemos calcular la probabilidad de que los miembros queden escogidos, por ejemplo en este orden "E, A, J, C" sería utilizar la fórmula de permutaciones de cuatro elementos que se denota en general como:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

O lo que es lo mismo el producto de 4 por todos los enteros positivos menores que 4, también llamado "cuatro factorial" y que se puede escribir 4!

En general, si "n" es cualquier número entero mayor o igual a 0 se tiene:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Se dice que el símbolo "!" utilizado para nombrar al "factorial" fue escogido por la admiración que se produce al observar su crecimiento asombroso al calcular su resultado. Por definición el factorial de cero es 1, es decir:

$$0! = 1$$

Calcular entonces la probabilidad de que los mencionados ciudadanos salgan sorteados en este orden: E, A, J, C, sería entonces $\frac{1}{24} = 0,04$.

El resultado obtenido expresa que es muy poco probable, por no decir casi imposible (ya que su valor está muy cercano a cero), que al sortear a esos cuatro ciudadanos como miembros principales de la mesa de votación queden ocupando en ese orden sus funciones.

Como hemos visto, el cálculo de las probabilidades exige examinar atentamente tanto al experimento aleatorio y las condiciones en las que se realiza y al evento al que se desee calcular su probabilidad. Los eventos aleatorios pueden ser simples o compuestos y cuando se componen pueden hacerse de manera independiente o de manera condicionada.

Para determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento, debemos estar dispuestos a pensar de forma tal que seamos capaces de prever todos los resultados posibles, una de las herramientas matemáticas que nos ayuda en esta labor es la **Teoría Combinatoria** y en esta lección se trató el caso de las permutaciones, que es apenas una de las maneras de combinar resultados.

¿Cuál será la probabilidad de que queden sorteados en el orden "C, E, J, A"?

¿La probabilidad de que la ciudadana Emperatriz quede como presidenta de la mesa es $\frac{1}{4}$ ó $\frac{6}{24}$? ¿Estas dos fracciones son distintas o equivalentes?

¿Cuál será la probabilidad de que J quede como secretario de la mesa? ¿Será igual esta probabilidad a la de J quede como secretario si A es el presidente de la mesa? Expliquen por qué.

En el ejemplo que hemos estado trabajando, ¿cuál será la probabilidad de que las dos primeras personas escogidas sean hombres? ¿Y cuál será la probabilidad si se quiere que las dos primeras personas escogidas sean mujeres?

Les sugerimos que consulten otras situaciones probabilísticas y explicaciones de teoría combinatoria en la siguiente dirección electrónica del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia y Tecnología de nuestro país:

www.rena.edu.ve/cuartaetapa/matematica/tema20/tema20.html

Otros apuntes sobre permutaciones

En general el recuento de casos favorables y casos posibles que se utilizan en la fórmula clásica de probabilidad o **regla de Laplace**, se simplifica utilizando la teoría combinatoria. En este 2º año conocieron la llamada permutación que es parte de esa teoría. Existen otras dos formas de obtener los casos posibles llamadas **variación** y **combinatoria** que serán vistas en los años sucesivos.

Se denominan permutaciones de m elementos a todas las posibles ordenaciones de éstos. En resumen, las permutaciones se distinguen por:

- En cada resultado están incluidos todos los elementos.
- Influye el orden en que aparezcan los elementos.
- No se repiten los elementos.

Resuelvan:

1. Si una persona está decorando un salón y cuenta entre otros elementos con cuatro cuadros y sólo puede colocar un cuadro en cada una de las cuatro paredes del salón, ¿cuántas maneras distintas tiene de colocar los cuatro cuadros en ese salón? Para facilitar su respuesta, pueden colocar una letra o nombre a cada cuadro.

2. Si en una competencia ocurre un triple empate y el jurado ha decidido otorgar un premio distinto, aunque de idéntico valor económico, a cada uno de los ganadores. Si los tres tienen preferencias diferentes y el reparto de los premios es al azar, ¿cuál es la cantidad total de posibles repartos de premio en este caso? ¿Cuál es la probabilidad de que todos queden satisfechos?

3. ¿Cuántas palabras distintas, de cuatro letras, se pueden formar con la palabra "azar", aunque la palabra no exista?

4. ¿Cuántas palabras distintas (aunque no existan) es posible formar con todas las letras de la palabra "estadística".

5. Cinco amigas y amigos van al cine y se sentarán en una misma hilera (uno al lado del otro), ¿de cuántas maneras distintas y al azar podrán sentarse estas cinco personas?

6. ¿Cuántas palabras distintas (que existan) es posible formar con todas las letras de la palabra "alegría"?

7. ¿Qué singularidad pueden observar en el siguiente grupo de palabras?

- Manotearles - Alentaremos - Enlataremos - Antelaremos - Emanártelos
- Amonestarle - Asentármelo - Notársemela - Amontársele - Anotármeles
- Amentárosle - Solanárteme - Enlatáremos - Maneártelos - Mateárnosle

8. ¿Qué singularidad pueden observar en el siguiente poema?

Alegría

¡Ágriale la alegría a la gil alergia!
Argelia irá a Argelia a la regia gala.
La agalla aira allá el grial.
El gel aligera la ira.
Alí riega la agria era, la rea ríe.
La galería legaría regalía a la alegre Lía.
La gala, Lía, era regia. Leía, leía, leía.
Leía al alegre Lear, ¿él regala alegría al aire?
Lear, ¡Ágriela!
Lear, ¡Ágriale!
¿Él era él?
¿Él era real?

Pascal (1623-1662)

De Fermat (1601-1665)

En la historia de los avances de la Matemática occidental se considera a los franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat como precursores de los desarrollos de la teoría combinatoria, la cual se utiliza para calcular el número de combinaciones en un conjunto finito de números, ligados a la teoría de juegos de azar y cálculo de sus probabilidades. Desde ahí se ha hecho la conexión entre la teoría de la probabilidad y la teoría combinatoria. Con los trabajos del alemán Gottfried Leibniz y el suizo Jacobi Bernoulli se inicia el establecimiento de la teoría combinatoria como una rama independiente de la Matemática. Este tema lo verán en el curso de tercer año de Matemática y será clave para sus conocimientos futuros en probabilidad.

Bernoulli (1654-1705)

Leibniz (1646-1716)

13

Proporción. Simetría por rotación de polígonos inscritos en una circunferencia. Determinación del centro de rotación

Al compás de la matemática

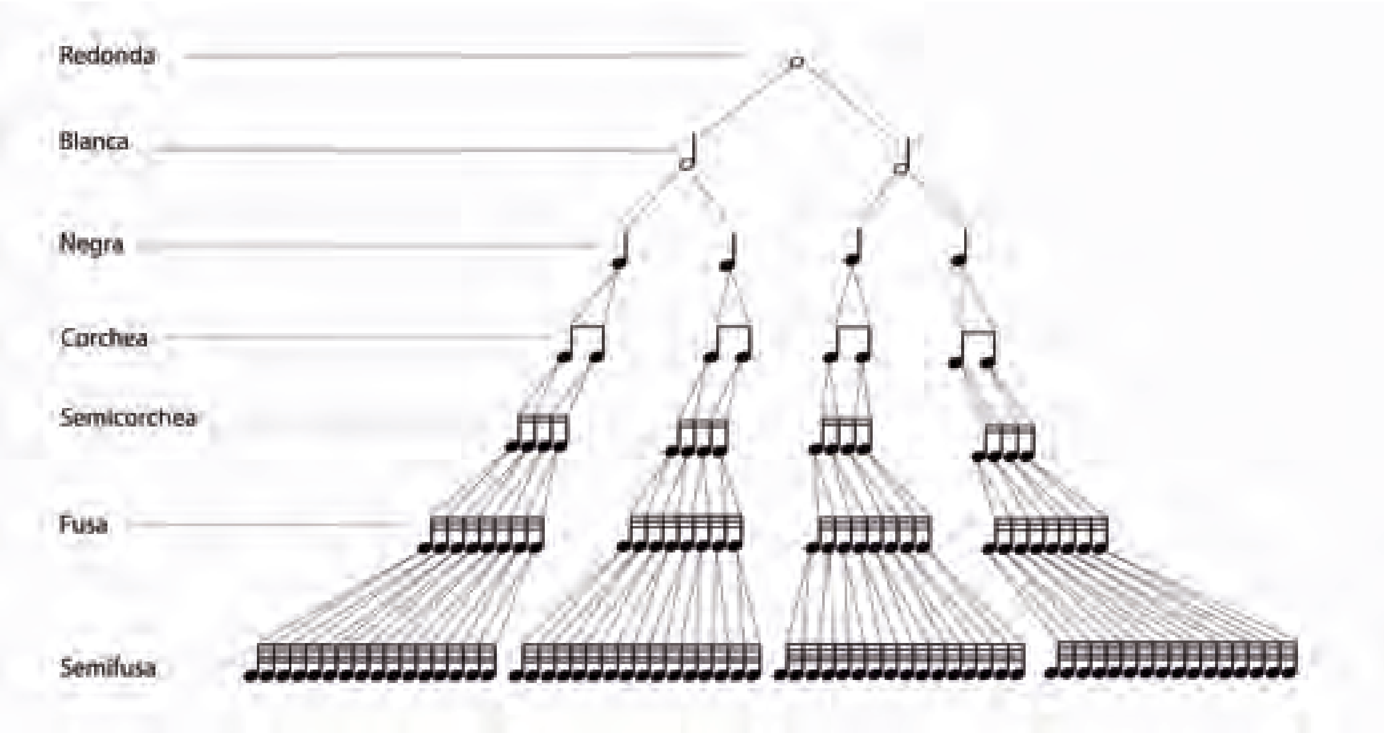
La Matemática y la música

La Matemática está presente en la realidad y en el contexto; además, constituye un elemento importante para su comprensión, para la reflexión sobre sus fenómenos y características, e incluso, para el papel que podemos desempeñar en la sociedad y en el mundo, siempre atendiendo, naturalmente, a valores como el trabajo colectivo, la cooperación y la responsabilidad. ¡La Matemática también está presente en la música! Entre ellas existen muchas relaciones. Por ejemplo: los sonidos de la escala musical (*DO*, *RE*, *MI*, *FA*, *SOL*, *LA*, *SI*, *DO*) guardan ciertas proporciones entre sí, es decir, la frecuencia que caracteriza a cada uno de estos sonidos debe corresponderse con ciertos patrones ya conocidos (lo cual se mide en herzios). El volumen (intensidad) de cierto sonido musical es otra de sus características esenciales (expresado en decibeles), también la duración de un sonido musical puede (y debe) medirse (esto se expresa en la cantidad de blancas, negras, corcheas, u otra, por cada minuto), la simetría que encontramos en algunas frases musicales y también al transportar una obra a otra tonalidad se relaciona con la Matemática.

13

La belleza de una pieza musical obedece, en parte, a la forma como se conjugan las proporciones, las intensidades, las medidas de la duración de los sonidos, de los silencios y de las simetrías en algunas frases.

La proporción y la duración de un sonido musical



Hay tres conceptos que debemos tener muy claros: **magnitud**, **cantidad** y **proporción**:

Una **magnitud** es alguna propiedad que tiene una figura, cuerpo, objeto, grupo de personas o región, tal es el caso de la longitud, el área, el volumen, la velocidad, la presión, la temperatura, la humedad, la duración de un sonido musical, etc.
Cualquier magnitud se puede expresar a través de números.

Pero, tal como estudiamos en sexto grado, la magnitud y la cantidad son cosas distintas: **la magnitud** es una propiedad y **la cantidad** es el valor numérico de esa magnitud.

Y una proporción es una relación entre dos magnitudes.

Veamos, por ejemplo, el diagrama anterior. En él se muestran las figuras de notas para los sonidos musicales: redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa. Éstas denotan la duración de cada sonido. Observemos que tal diagrama también nos informa las relaciones que hay entre cada figura. Así,

$$\text{𝅗𝅥} = \frac{1}{2}\text{𝅝}$$
$$\text{♩} = \frac{1}{4}\text{𝅝} = \frac{1}{2}\text{𝅗𝅥}$$
$$\text{♪} = \frac{1}{8}\text{𝅝} = \frac{1}{4}\text{𝅗𝅥} = \frac{1}{2}\text{♩}$$
$$\text{𝅘𝅥𝅯} = \frac{1}{16}\text{𝅝} = \frac{1}{8}\text{𝅗𝅥} = \frac{1}{4}\text{♩} = \frac{1}{2}\text{♪}$$
$$\text{𝅘𝅥𝅰} = \frac{1}{32}\text{𝅝} = \frac{1}{16}\text{𝅗𝅥} = \frac{1}{8}\text{♩} = \frac{1}{4}\text{♪} = \frac{1}{2}\text{𝅘𝅥𝅯}$$
$$\text{𝅘𝅥𝅱} = \frac{1}{64}\text{𝅝} = \frac{1}{32}\text{𝅗𝅥} = \frac{1}{16}\text{♩} = \frac{1}{8}\text{♪} = \frac{1}{4}\text{𝅘𝅥𝅯} = \frac{1}{2}\text{𝅘𝅥𝅰}$$

Todas son proporciones. Si a una nota se le agrega un puntillo está adquiere la mitad de su valor. Por ejemplo:

$$\text{𝅗𝅥.} = \text{𝅗𝅥}\smile\text{♩} = \frac{3}{4}\text{𝅝} \qquad \text{♩.} = \text{♩}\smile\text{♪} = \frac{1}{4}\text{𝅝} + \frac{1}{8}\text{𝅝} = \frac{3}{8}\text{𝅝}$$

De acuerdo con esta información:

- ¿Cuál es la relación entre las demás figuras de notas?
- ¿Cuál es la relación entre las corcheas y semicorcheas?
- ¿Cuántas semifusas representan a una redonda? ¿Y a una blanca?
- Investiguen sobre otra figura de nota llamada garrapatea. ¿Cuál es su relación con la semifusa?

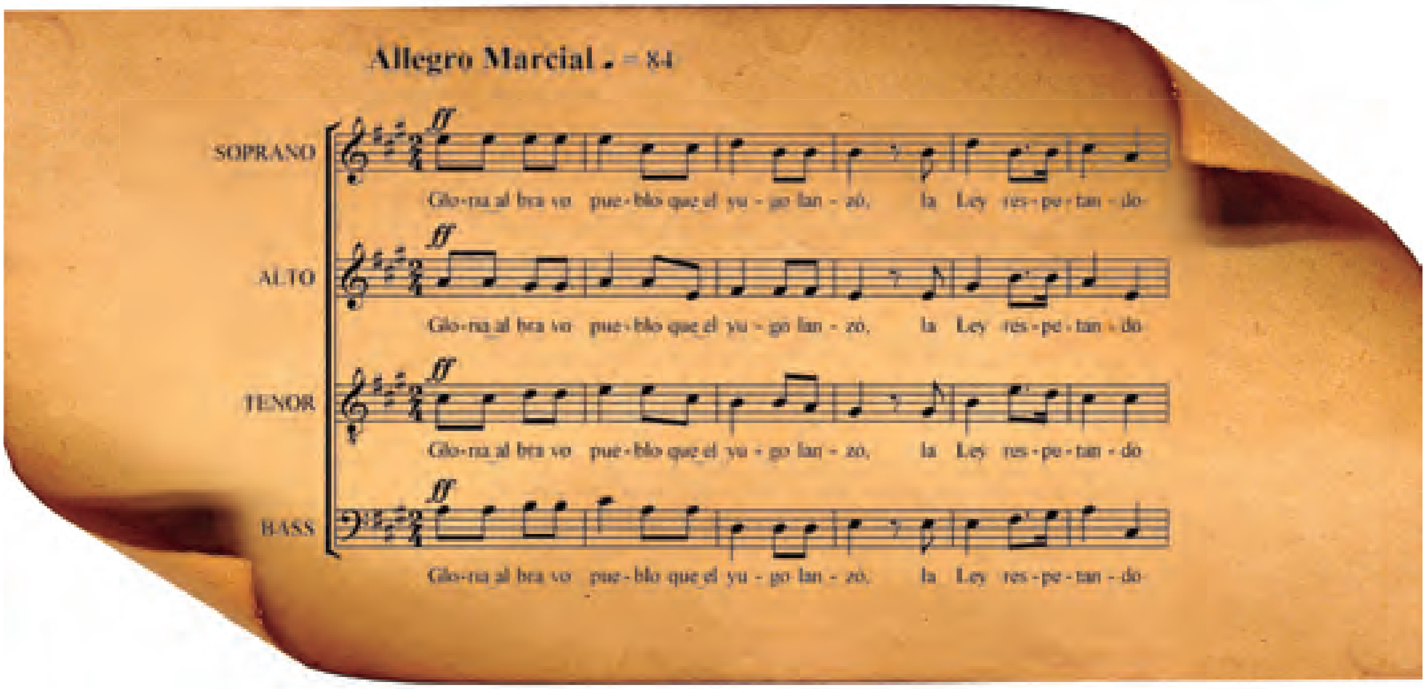
En una pieza musical se indica cuántas blancas o negras deben darse en un minuto, y cuántas figuras abarca un compás. Con ello, los ejecutantes de los instrumentos y de la voz o voces tendrán un tiempo y un ritmo a seguir.

A continuación mostramos una sección de la partitura para cuatro voces (soprano, alto, tenor y bajo) del Himno de nuestra patria. En ella observamos al comienzo la anotación $\text{♩} = 84$, esto significa que en cada minuto deben estar 84 negras, a este "tempo" se le denomina "allegro marcial". Lo cual, escrito en términos de proporción, es:

$84\ n / min$, es decir:

Negras	Segundos
84	60
42	30
14	10
7	5

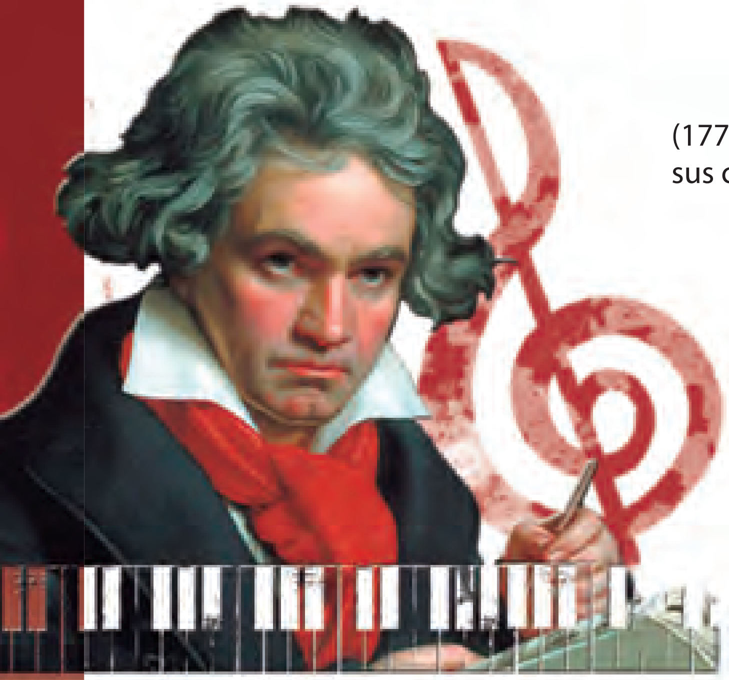
Actividad

Como se ve en la partitura del "Gloria al Bravo Pueblo", la frase inicial, "Gloria al bravo pueblo que el yugo lanzó", tiene siete negras (♩). Canten esta frase y midan el tiempo. Si lo hacen en 5 segundos, reciban nuestras felicitaciones.

Además, en cada compás de nuestro himno (los cuales se distinguen fácilmente en la partitura, pues están limitados por barras verticales) hay el equivalente a cuatro corcheas (4*c*).

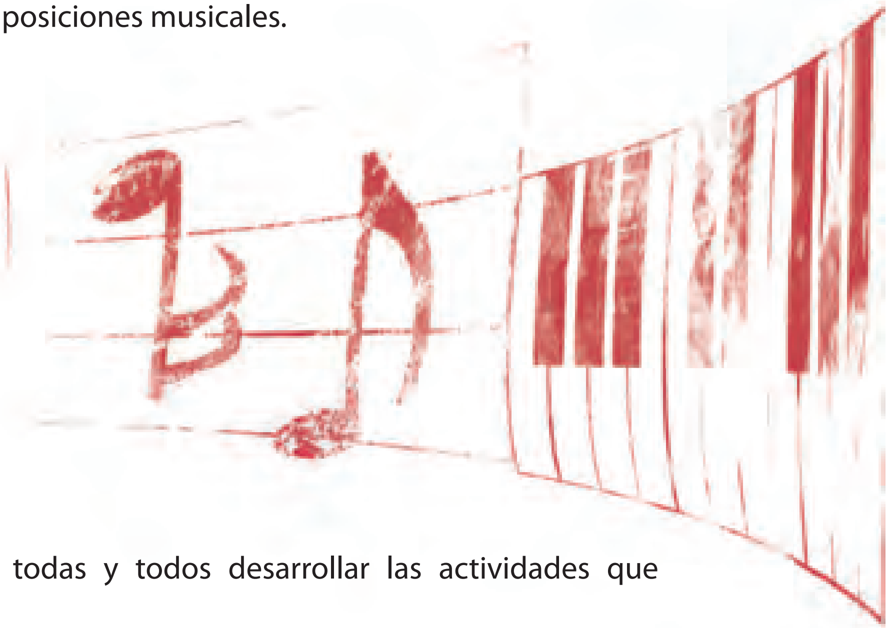
La medición con base en el pulso no es exacta, por tal razón se emplea el metrónomo.

El **metrónomo** es un aparato utilizado en Música para medir el **tempo** (la velocidad de la música) y el **ritmo**. El metrónomo fue inventado en 1812 por Dietrich Winkel, pero no lo registró. Tiempo después el también holandés, Johann Mäzel, copió sus ideas y lo patentó. Pero antes del metrónomo, muchos músicos se guiaban por el pulso humano para seguir el tiempo: el cual, en estado de reposo, alcanza unas **80 pulsaciones por minuto.**

Los primeros metrónomos consistían en un péndulo con una polea (que podía regularse para marcar un tiempo más lento o más rápido).



El compositor alemán Ludwig van Beethoven (1770-1827) fue el primero en emplear el metrónomo en sus composiciones musicales.



Antes de seguir les encomendamos a todas y todos desarrollar las actividades que describimos acá:

- Con la ayuda de un reloj o de un cronómetro cuenten cuántas pulsaciones por minuto tienen algunas personas de la comunidad (les recomendamos contactar a unas 10 personas). En esta actividad podrían pedir la asesoría de los profesores de Educación Física y de Biología.
- Obtengan la media aritmética y contrasten esta medida de tendencia central con la información dada antes (con las 80 pulsaciones por minuto en estado de reposo).
- Cuenten cuántos pasos da una persona en un minuto. Tomen datos de esto con diez personas de la comunidad. Igual que antes, calculen la media aritmética y comparen con los resultados anteriores.

Hasta este momento hemos trabajado proporciones. A partir de ahora trabajaremos la simetría en la música y la matemática.

La música y la simetría

Ciertas secuencias o frases en una pieza musical le confieren a la obra parte de su estructura, e incluso, transmiten mensajes o representan alguna idea. Estas secuencias o frases pueden repetirse en algún otro instante de la pieza, o bien, pueden repetirse pero de forma más aguda o grave. Incluso, en algunas piezas, esta secuencia puede interpretarse en sentido contrario. Y aquí es donde se encuentra el concepto de simetría. Veamos algunos ejemplos de ello.

Consideremos la escala diatónica normal: *Do*, *Re*, *Mi*, *Fa*, *SoL*, *La*, *Si*, *Do,* investiguen por qué se le llama "diatónica" y representen sus notas en una circunferencia, tal como ilustramos a continuación.

Consideremos a la frase melódica *Do-Re-Mi-La*. La cual hemos representado como un polígono cuyos vértices son precisamente las notas de la circunferencia anterior. Veamos la *figura 1.*

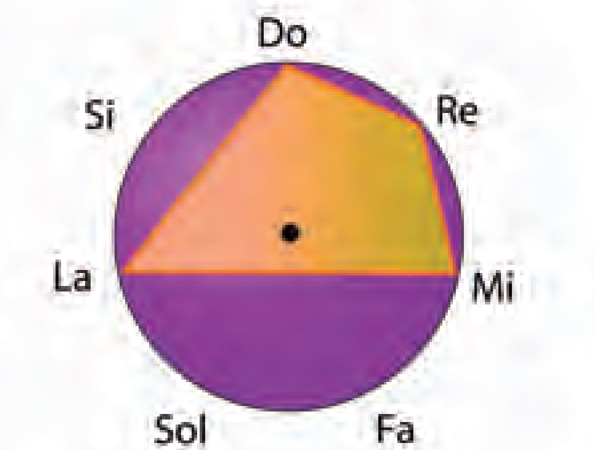


Figura 1

Lo que haremos ahora será construir, a partir de ésta, otra frase musical que guarde las relaciones entre estas notas. Ello consiste, apoyándonos en la representación dada, en rotar este polígono de manera que sus vértices coincidan con los que ya tenemos (aunque estos puntos pueden ampliarse si representamos, además, las alteraciones de estas notas: sus sostenidos o bemoles). Así, si rotamos este polígono 4 "lugares" en el sentido de las agujas del reloj, la nota *Do* se corresponderá ahora con la nota *Sol*, *Re* con *La*, *Mi* con *Si*, y *La* con *Mi*.

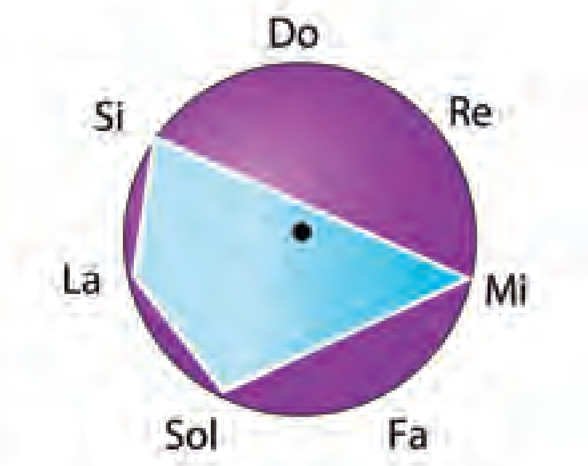
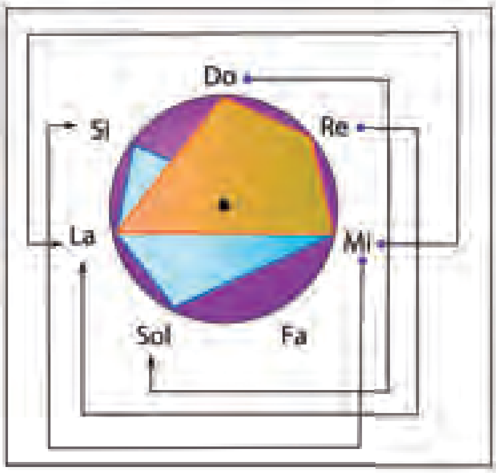
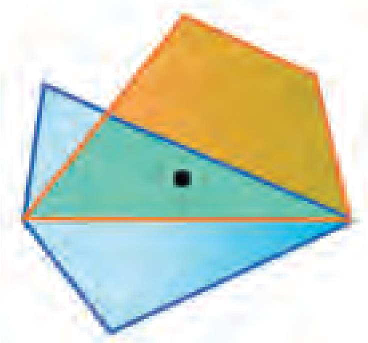


Figura 2

El concepto que aquí se presenta es la simetría por rotación (veamos las figuras que siguen). Aquí el eje de rotación coincide con el centro de la circunferencia.



Dos frases musicales con el mismo patrón



Polígonos correspondientes a las frases musicales

Polígonos simétricos por rotación

En consecuencia, la frase:

DO-RE-MI-LA es similar (simétrica) a la frase *SOL-LA-SI-MI*.

Es decir, nuestros oídos identifican que ambas siguen el mismo patrón. Este tipo de recursos musicales pueden aportar belleza a la pieza musical, tal como comentamos antes, o bien, emplearse para transmitir alguna idea o sentimiento.

- Así como construimos otra frase simétrica a la primera, trasladándonos en el sentido de las agujas del reloj, también podemos construir otras trasladándonos en sentido contrario.
- Actividad que proponemos a todos y todas. Para la cual recomendamos disponer de una flauta, cuatro o xilófono.
- Comenten, discutan y expongan sus resultados a todo el grupo.

Ahora, si incluimos las alteraciones de las notas de la escala diatónica normal, es decir, a las notas: *Do* sostenido (*Do #*), *Re* sostenido (*Re #*), *Fa* sostenido (*Fa #*), *Sol* sostenido (*Sol #*) y *Si* bemol (*Si b*), entonces la circunferencia anterior se enriquece musicalmente, quedando de la siguiente manera:

- Dispongan de los mismos instrumentos que en la actividad previa y construyan una frase musical (agradable al oído) y trasládenla en ambos sentidos. Interprétenla en sus instrumentos para percibir su simetría.
- Provéanse de un par de partituras de piezas tradicionales venezolanas, en especial de su región, y observen si existen en ellas algunas frases simétricas. Pidan ayuda a sus familiares, profesores y amantes de la música.

Otro recurso musical, relacionado con las frases, consiste recorrer (interpretar) una frase dada pero en sentido contrario. Por ejemplo, dada la frase.

Do-Re-Mi-La

la expresamos ahora como:

La-Mi-Re-Do

Nuestros cerebros pueden percibir la relación entre frases como estas.

Un problema interesante: determinación del centro de rotación

Dado cualquier polígono inscrito en una circunferencia, es posible determinar el centro de rotación de este polígono. De hecho, el centro de rotación de un polígono inscrito en una circunferencia es el centro de la circunferencia. ¿Cómo lo obtenemos? Veamos un ejemplo: para ello consideremos el polígono que mostramos en la *figura* 1.

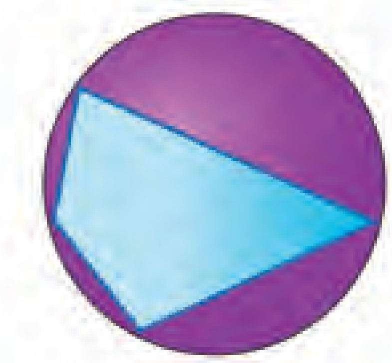


Figura 1

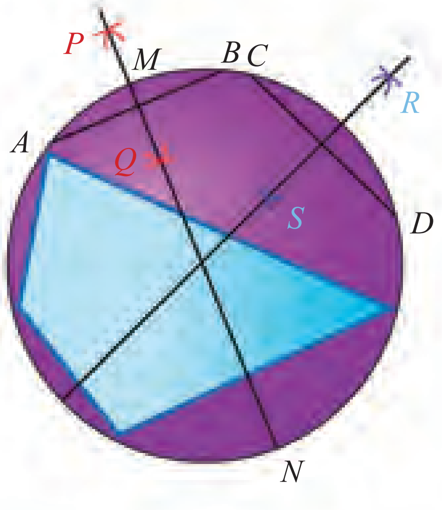


Figura 2

Tracen ahora dos cuerdas cualesquiera y las mediatrices de ambas cuerdas (recuerden que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular en el punto medio del mismo). El punto donde se cortan ambas mediatrices es el centro de la circunferencia, que a su vez es el centro de rotación del polígono.

Como tal polígono está inscrito en la circunferencia, sus vértices son puntos de ésta, y en consecuencia, cada uno de sus lados tiene sus extremos en la circunferencia (es decir, es cada uno de estos lados son cuerdas).

Realicemos el trazado paso a paso, escojamos una cuerda cualquiera. Aquí seleccionamos la cuerda $\overline{AB}$.

Ahora, utilizando un compás y haciendo centro en el punto A con radio AB, trazamos dos de los arcos destacados en rojo (*figura 2*). Del mismo modo, haciendo centro en el punto B y con radio AB, trazamos los otros dos arcos. De esta manera obtenemos los puntos P y Q.

Por P y Q trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, la cual interseca a la circunferencia en los puntos M y N.

Observemos que el segmento $\overline{MN}$ es un diámetro de la circunferencia, es decir, que contiene al centro de la circunferencia. Así que solo nos falta bisecar este segmento con otro diámetro, con ello determinaremos el centro de la circunferencia.

Para ello trazaremos una cuerda, CD. Hacemos centro en C y en D, y con radio CD trazamos los arcos marcados en azul. A los puntos obtenidos los llamamos R y S. Finalmente trazamos la recta $\overleftrightarrow{RS}$.

La intersección de las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{RS}$ es el centro de la circunferencia, por tanto, es el centro de rotación del polígono dado.

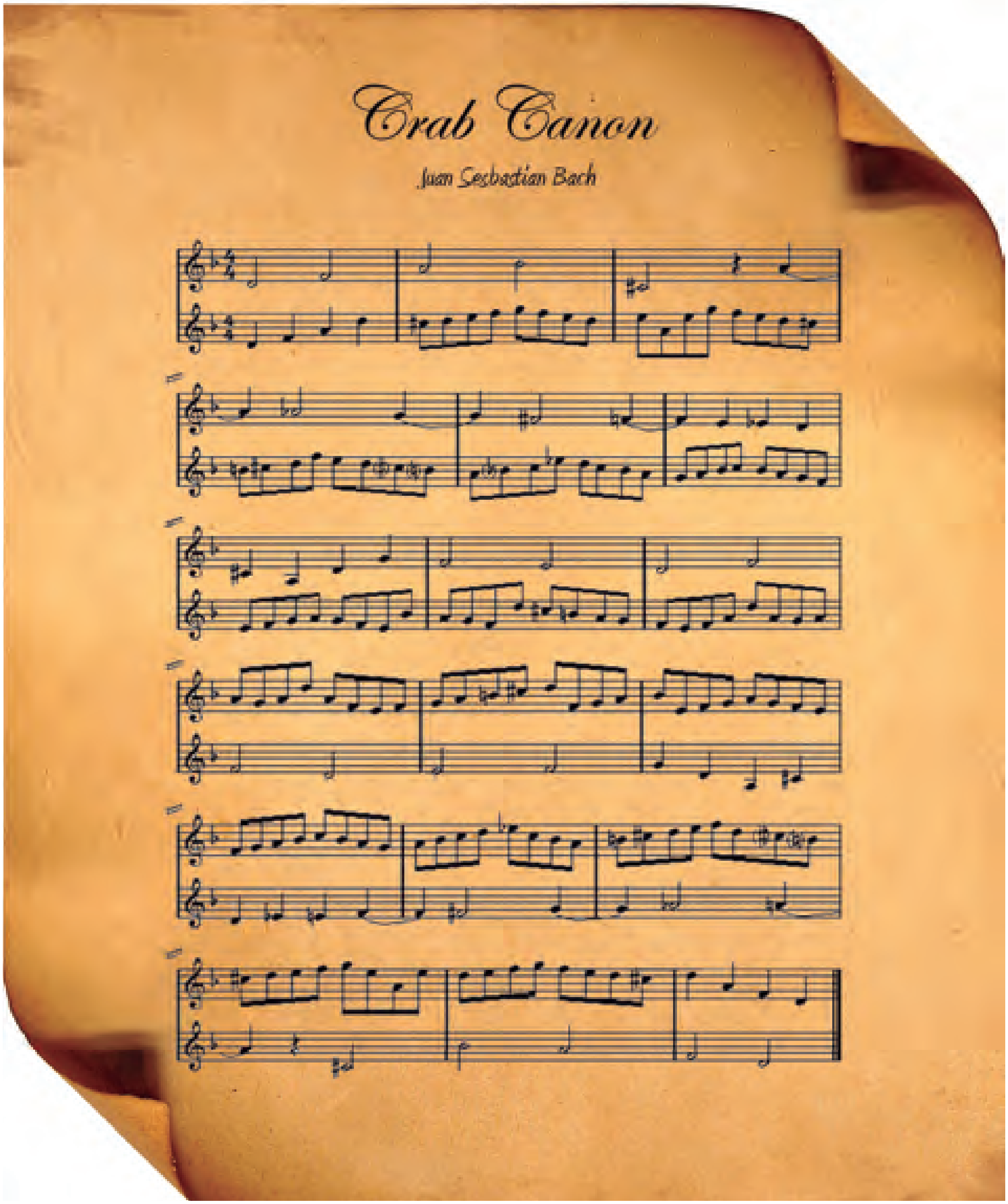
Provéanse de regla y compás e inscriban otro polígono en una circunferencia y determinen su **centro de rotación**.

Los palíndromos musicales

¿Palíndromo? ¿Qué significa esta palabra tan peculiar? La palabra palíndromo deriva de las voces griegas “palín” (de nuevo) y “dromo” (carrera). Palíndromo alude a una palabra o frase que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Hay números que son palíndromos como 313 y 191. Los números que se escriben igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha se llaman capicúas. Ejemplos, 121, 37.873, 123.454.321, etc. Si tomamos un número de dos o más digitos por ejemplo, 9.253 y lo escribimos al revés obtenemos 3.529. Sumamos los dos números $9.253 + 3.529 = 12.782$. A este resultado le sumamos 28.721 y nos da 41.503 y a éste le sumamos 30.514, nos da 72.017.

Hagamos ahora $72.017 + 71.027 = 143.044$ e igualmente $143.044 + 440.341 = 583.385$. ¡Que es un número capicúa!

Intenten ustedes ahora, hacer el mismo ejercicio con los números 87 y 98.

El propio Johann Sebastian Bach tiene una obra titulada “El canon del cangrejo“, a dos voces, en la que la segunda voz no es más que la primera pero tocada marcha atrás; y el genio de Salzsburgo, Wolfgang Amadeus Mozart, tiene una obra titulada “El canon del espejo” con las mismas características. Pueden apreciar la primera partitura y socializar entre ustedes la misma:

Investiguemos

En esta última lección de segundo año del nivel de Educación Media hemos vinculado la Música y la Matemática. Para ello hemos estudiado la simetría (palíndromos y capicúas), la proporción y simetría por rotación de polígonos inscritos en una circunferencia y la determinación del centro de rotación.

1) Anímense a componer una pequeña pieza musical en la que destaque la simetría de sus frases. Aquí también pueden solicitar el apoyo de las profesoras y profesores de música, de sus vecinas, vecinos, amigas, amigos y amantes de este maravilloso arte.

Expongan sus piezas en el curso, e incluso, en el periódico escolar.

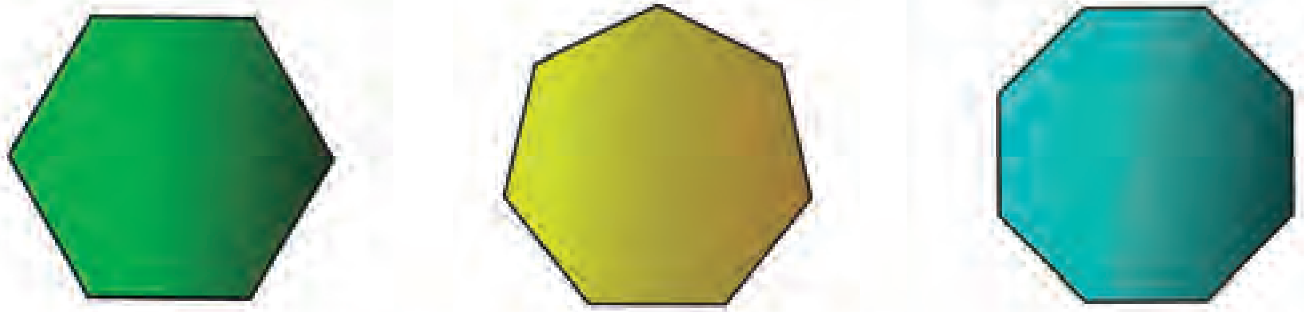
2) Aquí tienen un producto capicúa formado por dos números de dos cifras que continúa dando lo mismo cuando invertimos sus cifras. Las dos multiplicaciones dan 2.418. ¿Puedes encontrar más? (No valen los números con las dos cifras iguales).

$$26 \cdot 93 = 39 \cdot 62$$

3) ¿Hay algunas frases simétricas en nuestro himno nacional (recuerden que las hay por rotación y por interpretación en sentido contrario)? Para esta actividad necesitarán la partitura completa de nuestro himno (en la biblioteca de tu liceo podría estar).

4) ¿Cómo determinamos el centro de rotación de un triángulo, de un cuadrado y de un pentágono regular?

5) ¿Cómo determinamos el centro de rotación de un hexágono, de un heptágono y de un octágono regular?



El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Dionisio López Orihuela (1894-1975)

Este educador nació en la ciudad de Cumaná el 27 de septiembre de 1894, siendo sus padres Dionisio López y Mercedes Orihuela.

A los 4 años de edad ya se había iniciado en la lectura y en la escritura. Realizó estudios secundarios en el Colegio Federal de Cumaná, donde en 1910 se gradúa a los 16 años de Bachiller en Filosofía y Letras.

Va a Caracas matriculándose en los estudios de Medicina, en la Universidad Central de Venezuela. Cuando cursaba el tercer año, el cierre de la Universidad por parte de la dictadura gomecista le trunca su carrera y vuelve a su terruño dedicándose por un tiempo a la pesca y a las labores del campo.

Se desempeña como maestro de primaria en 1919. Sus profundas inquietudes intelectuales y su gran amor por las matemáticas hacen que se convierta en alumno del Instituto Pedagógico Nacional, acogiéndose al Artículo 218 (de la Ley de Educación de 1940). Egresa con el título de Profesor de Educación Secundaria y Normal en 1944, en la especialidad de Matemáticas.

En 1920 retorna a Caracas y trabaja como docente en el Instituto San Pablo, institución privada fundada por los hermanos Martínez Centeno. También en esa época es profesor de secundaria en otros planteles: Colegio Católico Alemán y la Escuela de Comercio y Lenguas Vivas. En 1925 es llamado para encargarse del Rectorado del Colegio Federal en su ciudad natal (denominado luego Liceo "Antonio José de Sucre"), volviendo a la capital sucrense, labor que desempeñó hasta 1936.

Posteriormente, se dirige a Caracas en donde entra en contacto con la Misión Chilena que vino al país a remozar nuestro sistema educativo. Mediante este contacto, este ilustre cumanés se nutre de las ideas y métodos didácticos de la Escuela Nueva al participar en los cursillos pedagógicos dictados por los integrantes de esta Misión.

Sus profundos conocimientos pedagógicos así como su notable capacidad gerencial y de trabajo le hacen acreedor del mayor de los respetos dentro del magisterio venezolano. En razón de ello es nombrado Director del Liceo "Andrés Bello" a partir del 18 de julio de 1936, institución secundaria de renombre nacional y la única de su tipo en la capital de la República.

Allí además de sus labores como Director dictaba clases de Álgebra. Ocupa esta posición hasta 1952, cuando después de una abnegada labor y dedicación es destituido arbitrariamente por la dictadura pérezjimenista. Ante esta situación decide fundar en 1952 un plantel privado en Caracas: el Liceo Cultura. Expresaba que "todos, querámoslo o no, hacemos pedagogía y con ello política."

Destaca también, como parte de la vida del profesor López Orihuela, su presencia en el quehacer político, actividad en la que se inició en 1928 y que le ocasionó cárcel y exilio.

El 30 de noviembre de 1952 se impuso la dictadura militar y, habiendo sido electo diputado de la República como candidato del partido Unión Republicana Democrática (URD), fue expulsado del país y desde entonces se residenció en México hasta la caída del régimen militar de Marcos Pérez Jiménez, el 23 de enero de 1958. Posteriormente llegó a ser Diputado al Congreso Nacional por su estado nativo, alcanzando a presidir la Cámara Baja (1966-1967).

Recibe numerosos reconocimientos, entre los que destacan: Medalla de la Orden del Libertador (1ª Clase), Orden Francisco de Miranda (1ª Clase), Orden Diego de Losada y Medalla de la Instrucción Pública. Asimismo, fue homenajeado en 1950 en razón de sus bodas de plata magisteriales.

López Orihuela muere en Barrancas del Orinoco (Edo. Monagas), el 26 de octubre de 1975. En gratitud a su inmensa contribución a la sociedad venezolana una calle caraqueña y un liceo llevan su nombre. También un plantel de Tucupita lleva el nombre de este insigne educador.

Fuentes Consultadas

Biografías

Raimundo Chela Aboudib

Bastidas, Arístides. (1979, domingo 23 de septiembre). Sumérjase en el mundo y conocerá el infinito de las Matemáticas. El Nacional p. C-2.
Beyer K., Walter O. (2000). Calendario Matemático 2001. Caracas: Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia.
Beyer K., Walter O. (2004). Bossio, Chela, Duarte y Zavrotsky: Un lazo de oro para la matemática y la educación matemática en Venezuela. En: Mora, David (Ed.) (2004). Tópicos en Educación Matemática (pp. 183-202). Caracas: GIDEM.
Chela, Raimundo. (s.f.). Mensaje a los educadores de mi país. Manuscrito.
Chela-Flores, Godsuno. (2000). Raimundo Chela y la educación matemática en Venezuela: Docencia e investigación. Conferencia plenaria inaugural del III Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) y del III Encuentro de Educación Matemática Región Zuliana (EDUMATZ).
Chela-Flores, Julián. (1985). Raimundo Chela: Recuerdos. Trabajo preparado para ser presentado en un Acto en homenaje a Raimundo Chela, organizado por el Instituto Universitario Pedagógico de Caracas.
CONICIT. (1997). Premio Nacional de Ciencia 1978-1997. Caracas: Autor.

Beatriz Marcano Coello

Cabrera Domínguez, Guillermo. (1993). Liceo "Andrés Bello" un forjador de valores. Caracas: Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia.
Gómez, Ángel Ricardo. La familia Marcano se desborda en escena. El Universal, viernes 16 de diciembre de 2011.
Ministerio de Educación Nacional. (1947). Memoria 1947 (corresponde a los años 1945 y 1946). Caracas: Tipografía Americana.
Parodi Alister, Humberto. (1986). El Instituto Pedagógico. Fundación y trayectoria. Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Rada Marcano, Gisela. (Sobrina de la biografiada) Información proporcionada vía correo electrónico por intermedio de la Dra. Rosa Becerra.
República de Venezuela. Gaceta Oficial Nº 25863 de fecha 15 de enero de 1959.
Torrealba Lossi, Mario. (1986). Entre los muros de la casa vieja. Caracas: Ediciones del Congreso de la República.
U. E. Néstor Luis Negrón. Blog. http://liceonestorluisnegron.blogspot.com/2011/02/biografia-de-nestor-luis-negron.html.

Dionisio López Orihuela

Asociación Civil Colegio Cultura. Blog. http://colegio-cultura.blogspot.com/.
Cabrera Domínguez, Guillermo. (1993). Liceo "Andrés Bello" un forjador de valores. Caracas: Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia.
Mudarra, Miguel Ángel (1988). Dionisio López Orihuela. En: Mudarra, Miguel Ángel (1988). Semblanza de educadores venezolanos (pp. 195-196). Caracas: Fondo Editorial IPASME.

Fotografías

Pág 1
Obra de Gego.
Foto: http://www.colecciondop.com/spanish/catalogue.html.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena, Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 42
Vectores caminando.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 46
Arquitectura: Imagen social.
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 47
Composición arquitecturas.
Fotos: Himmaru Ledezma, http://www.panoramio.com/photo/2725686,
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 49
Dividiendo en partes iguales.
Fotos: Himmaru Ledezma, http://www.skyscraperlife.com/city-versus-city/.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 49
Mariposa Cynthia (Vanessa) Carye.
Foto: http://www.mucubaji.com/4Mariposas.html.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 61
Fuente de la plaza de Higuerote
Foto: http://www.panoramio.com/photo/15659418
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 70.
Monedas en los planos
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 71
Teatro Nacional, Caracas.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 72
Foto de gemelos.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 73
Composición de M.C. Escher
Fotos: http://www.wikipaintings.org/en/m-c-escher/snakes
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 74
Gemelas.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 82 y 83
M.C. Escher - Two Birds, 1938.
Foto: http://www.wikipaintings.org/en/m-c-escher/snakes
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 121
Igualdad, equidad para mujeres - V.I.H.
Foto: http://congregacionparaelabrazomundial.blogspot.com/2010_12_01_archive.html
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 135
Monedas de 1 Bolívar.
Foto: Rafael Pacheco Rangel.
Diseño gráfico: Rafael Pacheco Rangel. (2012)

Pág 139
Recogiendo la cosecha.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 141
Pedagógico de Caracas – UPEL.
Foto: Rovimar Serrano
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 153
Silos ubicados en Caracas.
Foto: http://3.bp.blogspot.com/-IFQqqyV8xeQ/TdJytZ2OzcI/AAAAAAAAB8w/1ZrzKcQnyOk/s1600/Cargill.jpg.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 192
¿Qué estás bebiendo?
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 207
Joven bebiendo jugo natural.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 212
¿Y si me toca a mí?
Foto: http://www.avn.info.ve/node/106353.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 214
Miembros participantes en el proceso electoral.
Foto: http://www.cne.gob.ve/web/media/fotos/2011febrero/14.jpg.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 237
Pedagógico de Caracas – UPEL.
Foto: Rovimar Serrano.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Este libro fue impreso en los talleres de Gráficas XXXXX
El tiraje consta de 450.000 ejemplares
En el mes de abril de 2012
República Bolivariana de Venezuela